

Artículo publicado en el Repositorio Institucional del IMTA

<i>Título</i>	Las ecuaciones de Reynolds y la distribución de las corrientes en canales de riego.
<i>Autor / Adscripción</i>	Javier Ramírez Luna Roberto Mercado Escalante Hugo Perea Estrada Ernesto Olvera Aranzolo Víctor Ruiz Carmona Mauro Íñiguez Covarrubias Instituto Mexicano de Tecnología del Agua
<i>Publicación</i>	Ingeniería Hidráulica en México, 24(3): 121-130
<i>Fecha de publicación</i>	2009
<i>Resumen</i>	Ante el interés por entender y mejorar el aforo y la descripción de los esfuerzos de Reynolds en canales de riego se estudia la vorticidad en las ecuaciones de Reynolds, y para tres canales, en campo, se toman datos para la distribución de las velocidades en planos transversales a la corriente principal. Con un modelo de turbulencia, y métodos fractales de autoafinidad se obtiene una propuesta para la densidad de la distribución de las velocidades y el rango del índice de ocupación espacial.
<i>Identificador</i>	http://hdl.handle.net/123456789/1182

Las ecuaciones de Reynolds y la distribución de las corrientes en canales de riego

Javier Ramírez-Luna
Roberto Mercado-Escalante
Hugo Perea-Estrada
Ernesto Olvera-Aranzolo
Víctor Ruiz-Carmona
Mauro Íñiguez-Covarrubias

Instituto Mexicano de Tecnología del Agua

El trabajo se motiva en la necesidad de entender y mejorar el aforo y la descripción de los esfuerzos de Reynolds en canales de riego. Se estudia la vorticidad en las ecuaciones de Reynolds, y para tres canales, en campo, se toman datos para la distribución de las velocidades en planos transversales a la corriente principal. Con un modelo de turbulencia, y métodos fractales de autoafinidad se obtiene una propuesta para la densidad de la distribución de las velocidades y el rango del índice de ocupación espacial. A un plano de cada canal se asocia un índice de ocupación espacial. Con el índice de intermitencia, y los coeficientes de Coriolis y Boussinesq, se valora la turbulencia relativa entre los tres canales. Los resultados concuerdan con la predicción teórica para los índices de ocupación espacial propuestos en este trabajo y las dimensiones fractales obtenidas son consistentes con los publicadas por otros autores. La turbulencia resultante es mayor para el canal revestido de concreto y menor para el natural. Las corrientes secundarias se originan en el rotacional de la divergencia de los esfuerzos y las variaciones de las velocidades se distribuyen según una densidad Lévy. La información de campo se obtuvo con equipos perfiladores verticales de efecto Doppler.

Palabras clave: ecuaciones de Reynolds, autoafinidad, modelos de turbulencia, efecto Doppler, funciones de distribución.

Introducción y objetivos

En el presente trabajo el propósito es identificar el índice de ocupación del espacio para tres canales distintos, que de consuno con un modelo de turbulencia produzca la distribución de probabilidades y permita calcular la velocidad media. Además, se quiere valorar la turbulencia relativa para estos tres canales a través del índice de ocupación espacial, el índice de intermitencia, y también por medio de los coeficientes de Coriolis y Boussinesq.

En canales abiertos se conoce la presencia de corrientes secundarias, las cuales fluyen desde los taludes hacia el centro en la superficie, para luego dar vuelta hacia abajo en el centro del canal. Las corrientes

secundarias no se han verificado en campo suficiente y cuantitativamente debido a la poca precisión en la medición de los instrumentos en 3D. Pero además, es necesario realizar las mediciones directas de la turbulencia para profundizar en la investigación de los mecanismos de las corrientes principales y secundarias en canales abiertos.

Se conocen resultados sobre corrientes secundarias obtenidas en el laboratorio y representadas en gráficas por contornos o con vectores en el plano transversal, como en Nezu (2005). Hay resultados experimentales recientes en laboratorio, con cámaras de vórtices, como en Reza *et al.* (2008), y en canales abiertos (Reza *et al.*, 2005), donde se incluye abundante referencia sobre este tema. No se conocen (hasta donde sabemos) resultados

obtenidos en campo y con representación tridimensional que ilustren la "topografía" de las corrientes principales en el plano transversal, como tampoco se conocen determinaciones en campo del índice de ocupación espacial.

La ecuación base para este trabajo es la de Navier-Stokes, que luego es transformada en la ecuación de Reynolds, para finalmente hacer explícita la evolución de su vorticidad, lo que muestra las fuentes de las corrientes secundarias, mismas que exhiben tanto la creación como la destrucción de los vórtices en un plano transversal a la corriente principal.

La representación de los resultados muestra una "topografía" de las velocidades principales en el plano transversal, que se aprecian como una colección de objetos esparcidos, fragmentados, irregulares, y con una estructura invariante en la escala en determinado rango en el que son observados, lo que induce a pensar que su análisis debe ser abordado por medio de la geometría fractal. Para ello se escoge una resolución que permita ajustar la escala y se expresa el número de rasgos como una potencia de la resolución en el espacio de los números de onda. La transferencia de energía se describe por procesos en donde las raíces de las variaciones cuadráticas medias sean de incrementos independientes e idénticamente distribuidos, y con invarianza de escala. Así que se toma en cuenta "el efecto medio de un conjunto de torbellinos, no de los torbellinos individuales" (Levi, 1989). Ese efecto medio se valora a través de la distribución Lévy y su representación analítica como función Fox y como serie (6), las cuales son indispensables para calcular los momentos de orden estrictamente menor que el índice Lévy (Metzler y Klafter, 2000). Sin embargo, los momentos de orden 2 y 3 pueden estimarse por medio de la aproximación de la densidad de probabilidad por los histogramas de barras de las ilustraciones 4, 5, y 6.

El presente artículo inicia con la exposición de la ecuación de Navier-Stokes, ecuación (1); luego las ecuaciones de Reynolds para la velocidad media, temporal (2), en donde se destaca la presencia de los esfuerzos de Reynolds; enseguida se obtiene la vorticidad, para destacar la emergencia de las corrientes secundarias en los planos transversales a la corriente principal (3). Se concibe un modelo multifractal en el dual espacial para las variaciones de la velocidad; con el modelo de cascada para la transferencia estocástica de la energía cinética entre vórtices, se estima el índice de estabilidad de Lévy, lo que permite obtener el exponente de autoafinidad de Hurst (7), la expresión analítica de la densidad (6), el índice de ocupación del espacio para

cada uno de los tres canales en estudio (7), el índice de intermitencia (8) y los dos parámetros de forma de la densidad beta unimodal (7); luego se estiman los promedios y se obtienen los coeficientes de Coriolis y de Boussinesq (9), y (10), con lo que se completan los objetivos trazados para este trabajo. Se hace entonces una lectura de las tres ilustraciones, para valorar la turbulencia relativa entre los tres canales y finalmente se citan las referencias de mayor uso.

Metodología

De acuerdo con el objetivo del presente estudio, para tres canales distintos se miden las velocidades en el plano transversal a la corriente principal y se grafican por contorno y celdas.

El concepto de partida lo constituye la ecuación de evolución de Navier-Stokes, que describe la velocidad instantánea u [LT^{-1}] de un fluido viscoso e incompresible, en un espacio de divergencia nula, y representa la aplicación de los principios de conservación de masa y cantidad de movimiento en un volumen diferencial de fluido (De Kármán y Howarth, 1938).

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u = \nu \Delta u - \text{grad} \frac{p}{\rho} + f, \nabla \cdot u = 0, u(x, 0) = u_0(x) \quad (1)$$

donde $\nu > 0$ es la viscosidad cinemática [L^2T^{-1}]; p , la presión [$ML^{-1}T^{-2}$]; ρ , la densidad del fluido [ML^{-3}]; Δ , el operador de Laplace; ∇ , el operador gradiente; x [L], el vector espacial de posiciones, y t es el tiempo [T].

Las variaciones aleatorias de la velocidad respecto a la velocidad media temporal se identifican como un proceso estocástico estacionario. Suponiendo conocida la función de distribución de probabilidades de las variaciones espaciales de la velocidad, se determinan los promedios temporales sobre la base de la hipótesis ergódica (Batchelor, 1953) para obtener las ecuaciones de Reynolds. Ésta es una ecuación de evolución (2), en donde la función fuente depende de los esfuerzos de Reynolds, los cuales dependen de las minúsculas fluctuaciones de la velocidad y son la causa de la difusión de las diferencias de la cantidad de movimiento:

$$\rho \left[\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \frac{\partial \langle \bar{v}_i \bar{v}_j \rangle}{\partial x_j} \right] = - \frac{\partial p}{\partial x_j} + \rho \nu \frac{\partial^2 \bar{v}_i}{\partial x_j^2} - \rho \frac{\partial \langle \delta v_i \delta v_j \rangle}{\partial x_j} \quad (2)$$

donde la variable con barra identifica el valor medio temporal de la variable respectiva; \bar{v}_i son las componentes de la velocidad [LT^{-1}] y los δv_i son las componentes de

las variaciones de la velocidad; el paréntesis angular indica el promedio temporal (Chen, 2006; Chen *et al.*, 1998).

Se aplica el rotacional a la ecuación de Reynolds. Las corrientes secundarias resultan del rotacional de la divergencia del tensor de Reynolds, el cual se calcula por medio de la derivada de Lie (Torres del C., 1984; Abraham *et al.*, 1988). Se obtiene la evolución de la vorticidad en las ecuaciones de Reynolds, como se muestra en las expresiones (3) y (4):

$$\frac{\partial \Omega_x}{\partial t} + \left(U \frac{\partial}{\partial x} + V \frac{\partial}{\partial y} + W \frac{\partial}{\partial z} \right) \Omega_x = \left(\Omega_x \frac{\partial}{\partial x} + \Omega_y \frac{\partial}{\partial y} + \Omega_z \frac{\partial}{\partial z} \right) U + v \nabla^2 \Omega_x + \frac{1}{2} \text{rot} d(u_1 \downarrow \tau) \quad (3)$$

$$\Omega_x = (\text{rot} \bar{v})_x = \left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} \right); u_1 \downarrow \tau = u^j \frac{\partial}{\partial x^j}; u^j = \langle \tau^j \delta v^j \rangle$$

$$\frac{1}{2} \text{rot} d(u_1 \downarrow \tau) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} (\langle v^2 \rangle - \langle w^2 \rangle) + \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \langle -vw \rangle + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial y} \langle -wv \rangle - \frac{\partial}{\partial z} \langle -vu \rangle \right) \quad (4)$$

en donde U, V y W son las componentes de la velocidad media, y u, v y w , las variaciones de la velocidad en las direcciones de los ejes x, y, z , respectivamente; τ es el tensor de esfuerzos, un tensor mixto de rango dos y de tipo 1,1; $u_1 \downarrow \tau$ es la contracción del tensor de esfuerzos con un vector, por lo que queda reducido a un vector con funciones componentes u^j .

La anterior es una ecuación de evolución de difusión y advección con fuentes, en donde las fuentes están representadas por cuatro términos: el primer término a la derecha de la ecuación (3), y los tres términos a la derecha de la ecuación (4). El primero equivale a una fuerza centrípeta y los tres restantes a la divergencia del esfuerzo de Reynolds. Sin embargo, para flujo uniforme, los cuatro términos se reducen a sólo dos de ellos, los dos primeros a la derecha de la ecuación (4), y son aportados únicamente por la divergencia del esfuerzo de Reynolds, con lo que se tiene $\frac{1}{2} \text{rot} d(u_1 \downarrow \tau) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} (\langle v^2 \rangle - \langle w^2 \rangle) + \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \langle -vw \rangle$, de suerte que el primero aporta a la generación y el segundo a la supresión de los vórtices, y constituyen los elementos esenciales de las corrientes secundarias impulsadas por la turbulencia, los cuales persisten aún

en el caso de flujo estacionario uniforme en canales rectos (Nezu, 2005).

Por otra parte, cuando se observan las ilustraciones 1, 2, y 3, lo primero que podría destacarse es la ausencia de un perfil de velocidades, tal como se ha concebido clásicamente; por el contrario, se aprecian las velocidades principales distribuidas. Por tanto, el propósito es identificar esa distribución, para lo que se requieren conceptos estadísticos y un modelo de turbulencia.

Este modelo de turbulencia se describe a través de una cascada de transferencia de energía cinética desde los vórtices más grandes hacia los más pequeños, hasta llegar a la escala de disipación de la energía. Sin embargo, a diferencia de la visión de Kolmogorov, se considera la transferencia de energía como un proceso estocástico con probabilidad de éxito dada en términos de la resolución, pero también con una función de riesgo y una probabilidad de fracaso que depende del complemento de la resolución, lo que conduce a una distribución dependiente de dos parámetros de forma: el primero es el orden o potencia de la probabilidad de transferencia, mientras que el segundo será el orden o potencia de la probabilidad de fracaso. De acuerdo con los resultados en Mercado (2008), la distribución resulta estar descrita por una densidad de distribución beta, unimodal.

Para el exponente de Hurst, y en particular para una variable aleatoria ξ , con distribución Gaussiana de media m y varianza σ^2 , la invarianza de la distribución respecto a los cambios de escala se consigue mediante el análisis del logaritmo de su función característica, en la variable k , $\ln \Phi_\xi(k) = imk - \frac{1}{2} k^2 \sigma^2$ y bajo los cambios de escala dados por $(t, \sigma^2) \mapsto \lambda(t, \sigma^2)$. La invarianza se manifiesta por la congruencia de las distribuciones expresada en la ecuación (5) y se garantiza por el valor del exponente de Hurst dado en (5):

$$\left\{ \lambda^{-H} \Delta \xi(\lambda t, \lambda \sigma^2) \right\} \equiv \left\{ \Delta \xi(t, \sigma^2) \right\}, \quad H = \frac{1}{2} \quad (5)$$

Las variaciones de las velocidades del flujo turbulento se califican, entonces, como un proceso autoafín debido tanto a la invarianza de las distribuciones obtenida mediante la aplicación de la convolución como a los diferentes escalamientos para la variable temporal (t), y para los incrementos ($\Delta \xi$). Para el caso $H = \frac{1}{2}$, se obtiene el movimiento browniano clásico.

Para otros exponentes k^r , en la función característica, la invarianza de la distribución, bajo los cambios de

Ilustración 1. Representación en contorno y tridimensional de la velocidad por celda de la estación Braniff.

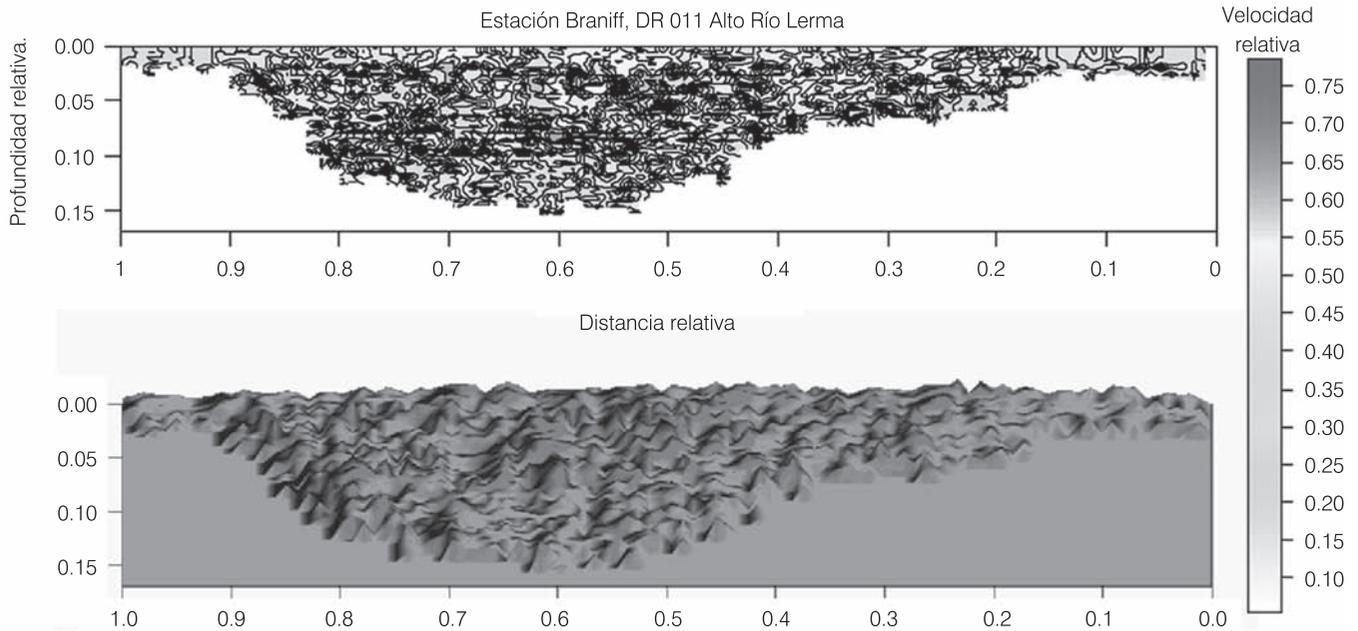
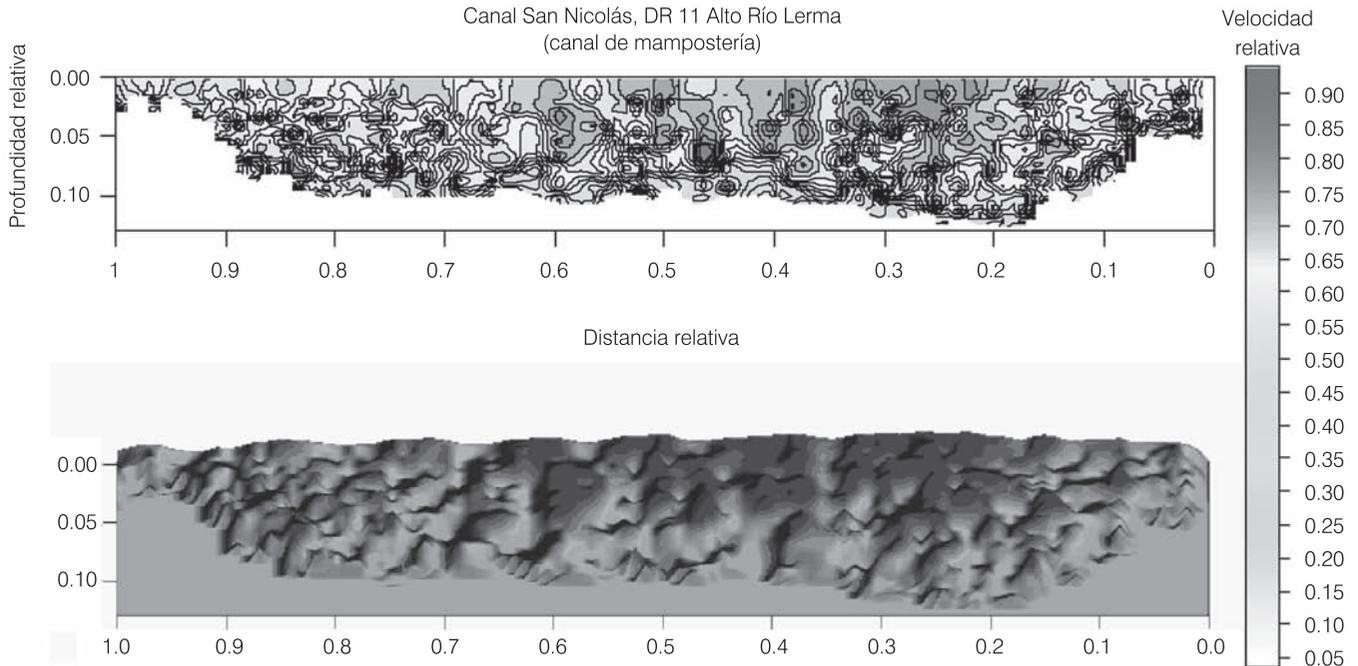


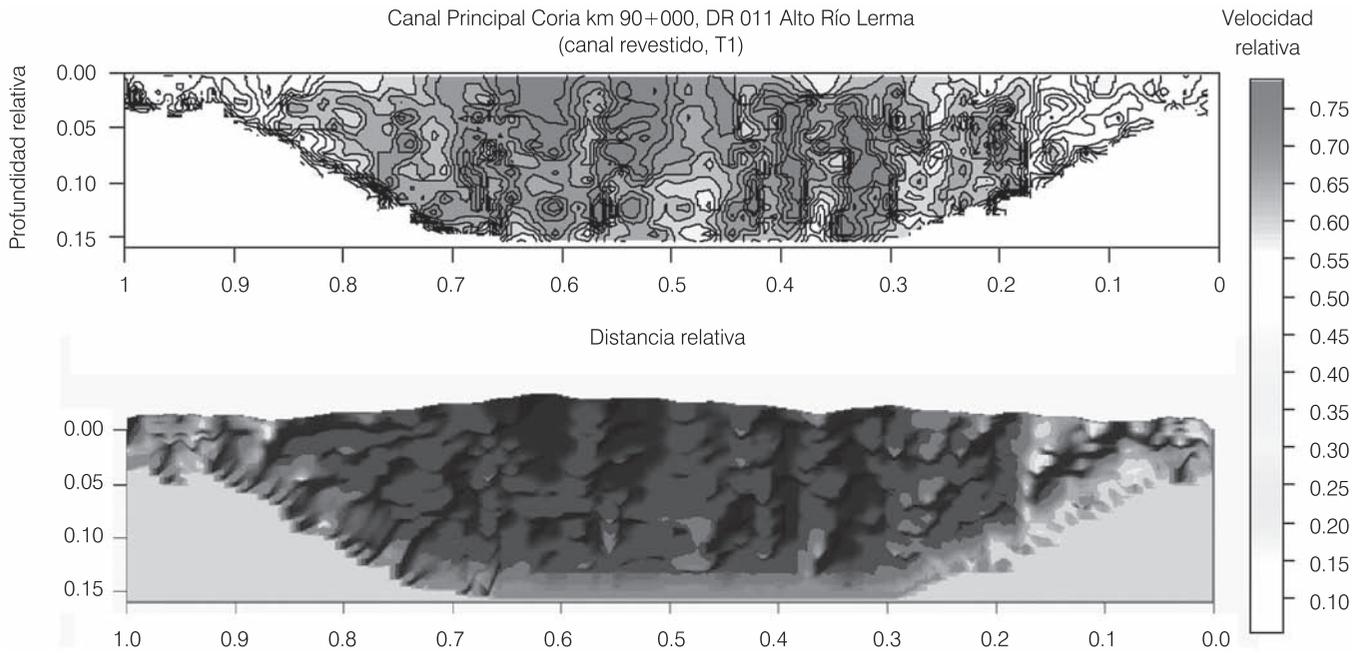
Ilustración 2. Representación en contorno y tridimensional de la velocidad por celda de la estación San Nicolás.



escala, se garantiza si $H=1/\gamma$. Además, los movimientos estables son los únicos, dentro de los de incrementos independientes que tienen una estructura autoafín y su densidad Lévy se representa, en forma analítica a través de la serie y la función Fox $H_{2,2}^{1,1}$, como se muestra

a continuación: $f(v) = f(v, H) = HH_{2,2}^{1,1} \left(v \left| \begin{matrix} (1-H, H), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \\ (0, 1), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \end{matrix} \right. \right)$
(Metzler y Klafter, 2000) y en (6):

Ilustración 3. Representación en contorno y tridimensional de la velocidad por celda de la estación canal Coria km 90+000.



$$f(v) = \frac{1}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j v^j}{\Gamma(j+1)} H \Gamma \left(H(j+1) \cos \left(\frac{\pi}{2} j \right) \right)$$

$$= \frac{1}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j v^j}{\Gamma(j+1)} \frac{1}{\Gamma \left(\frac{1}{2} (1+j) \right)} \frac{H \Gamma(H(j+1))}{\Gamma \left(\frac{1}{2} (1-j) \right)} \quad (6)$$

Para el caso de la densidad Lévy, con tres parámetros hay que considerar el factor $c^\alpha(1-j\beta\omega)$, el cual puede introducirse como factor de escala, tomado en la forma $c(1-j\beta\omega)^{1/\alpha}$. Por último, cuando se toma en cuenta el parámetro de localización μ , basta con considerar una translación y hacer la sustitución $v \mapsto v - \mu$, lo cual se requiere para construir el cuadro 1.

Es posible identificar los exponentes de la función beta a partir del índice de ocupación espacial β y del índice de autoafinidad H , mediante las siguientes relaciones (7) (Mercado, 2008; Embrechts y Maejima, 2000; Mercado et al., 2002):

$$\beta + \frac{H}{D_T} = 1, \quad a = \frac{8}{3} - \beta = \frac{5}{3} + \frac{H}{3};$$

$$b = a \left(2 \frac{\Gamma(H)}{\Gamma(3H)} - 1 \right) = \left(\frac{5}{3} + \frac{H}{3} \right) \left(2 \frac{\Gamma(H)}{\Gamma(3H)} - 1 \right) \quad (7)$$

Donde D_T es la dimensión topológica del espacio en el cual se realiza el movimiento turbulento. Aunque los parámetros de forma son expresiones de dos índices: el grado de ocupación del espacio y el índice de la distribución de Lévy, el índice de estabilidad es el que determina, en última instancia, los dos parámetros de forma. Puede observarse que cuando el índice de ocupación crece hacia la unidad, la moda de la densidad disminuye y se desplaza hacia la izquierda, en tanto que cuando el índice Lévy crece hacia dos, la curvatura en el origen, de su transformada de Laplace, crece hacia la curvatura de la función distribución Gaussiana en el origen.

Los valores de los parámetros de forma pueden calcularse en los extremos de los intervalos del índice de autoafinidad H . Si $H \rightarrow 1$; $a \rightarrow 2$; $b \rightarrow 0$, si $H \rightarrow 0$; $a \rightarrow 5/3$; $b \rightarrow 25/3$ y si $H \rightarrow 1/2$; $a \rightarrow 11/6$; $b \rightarrow 11/2$, puede inferirse que $a > 1$, en todo el intervalo; mientras que $b > 1$ sólo para $H < 0.871$. Además, en el intervalo de persistencia, $1/2 < H < 0.871$, el correspondiente intervalo del parámetro no-lineal b es $1 < b < 11/2$ y se corresponde con $1/2 < H < 0.871$. Por tanto, el rango de los valores esperados para el índice de ocupación del espacio se encuentra en el intervalo $0.70967 < \beta < 5/6$ (ver cuadro 2).

Para un modelo fractal, el índice de intermitencia, ι , se define por la pendiente, cambiada de signo, de

la dimensión generalizada (D_s) evaluada en el origen, (Halsey *et al.*, 1986), lo que produce, para el modelo multifractal estudiado en Mercado (2008), la relación (8), en donde C es el factor de escala, y γ es el índice de estabilidad:

$$\iota = -\frac{\partial}{\partial s} D_s \Big|_{s=0}, \iota = \frac{C}{\gamma-1} \quad (8)$$

Siendo s el orden de reiteración en un proceso fractal.

Para valorar la turbulencia relativa en los tres canales, también se cuenta con los coeficientes que permiten una estimación de la distribución de la energía y de las presiones respecto a un valor medio en el flujo, los cuales se llaman de Coriolis, para la energía, y Boussinesq, para la presión, y se definen según las fórmulas siguientes (9) (Sotelo, 1999):

$$\text{Coriolis} = \frac{1}{A} \iint_A \left(\frac{v}{U} \right)^3 dA \quad y \quad (9)$$

$$\text{Boussinesq} = \frac{1}{A} \iint_A \left(\frac{v}{U} \right)^2 dA$$

Donde v es la velocidad puntual (por celda); U , la velocidad media (temporal) en la sección hidráulica, y A es el área hidráulica de la sección. Como se observa, estas fórmulas representan el tercer y segundo momento de la distribución de la velocidad en la sección, respectivamente, por lo que dichos coeficientes para v^* , la velocidad adimensional (ver cuadro 3), se estiman por:

$$\text{Coriolis} = \int_{v^*} (v^*)^3 f(v^*) dv^* \quad y \quad (10)$$

$$\text{Boussinesq} = \int_{v^*} (v^*)^2 f(v^*) dv^*$$

En el distrito de riego DR011, del alto Lerma, Guanajuato, México, contamos con tres casos, objetos del presente estudio, de los cuales se describen algunas de sus características:

- a) El río Lerma, en la estación Brannif, tiene un cauce natural de sección irregular y un tramo relativamente recto con partes de bordos libres cubiertos de maleza; las gráficas tridimensionales ilustran la sección hidráulica.
- b) El canal San Nicolás de sección trapecial y revestido de mampostería en un tramo relativamente recto.

- c) El canal Coria, en el km 90+000, con un tramo recto y revestido de concreto, con una curva a 90° a doscientos metros aguas arriba del punto de medición.

Los datos se obtienen con dos dispositivos ultrasónicos que discretizan la sección transversal del canal en celdas de altura definida por el usuario y que miden la velocidad en cada celda. Se obtiene también la configuración del lecho del canal a través de los cuatro transductores ultrasónicos de los dispositivos que detectan y ubican el fondo del canal.

Además se desarrolló un programa de computadora en lenguaje C++ para organizar los datos del transductor y procesarlos, creando archivos que contienen las coordenadas espaciales y la velocidad de cada una de las celdas medidas con el dispositivo Doppler. Así que cada sección transversal queda dividida en celdas, y para cada una de las celdas se determina su posición espacial y el valor de su velocidad principal, así como la forma del lecho del canal.

Resultados y discusión

Los datos de velocidad principal se presentan en curvas de contorno (2-D) y en forma tridimensional. Las dimensiones verticales y horizontales, así como el valor estimado de la velocidad son relativos, por lo que se presentan los valores en el intervalo entre cero y uno.

Se grafican la frecuencia relativa y la acumulada de los datos obtenidas por ajuste y con respecto a la velocidad expresada en centímetros por segundo, así como las densidades de las distribuciones: Lévy (---), Gamma (—) y Gaussiana (****) (ver ilustraciones 4, 5 y 6).

En el cuadro 1 están los parámetros estimados, se indican los coeficientes obtenidos de la distribución de Lévy; el exponente de autoafinidad H , ordenado de forma creciente; el índice de intermitencia ι ; los dos exponentes de forma (a , b), y la densidad beta.

En el cuadro 2 se destacan los valores estimados para el índice de ocupación espacial.

Los coeficientes de Coriolis y Boussinesq obtenidos se presentan en el cuadro 3.

En el río, en su estación Braniff, se observan pequeñas áreas con velocidades relativas promedio distribuidas en toda la superficie de la sección transversal. Se aprecian también pequeñas zonas de máxima velocidad debajo de la superficie del agua y velocidades mínimas en el lecho del canal. Se perciben franjas verticales alternadas de altas y bajas velocidades

Ilustración 4. Distribución relativa, acumulada e identificación de funciones Lévy estables (---), función Gamma (—) y Gaussiana (*).**

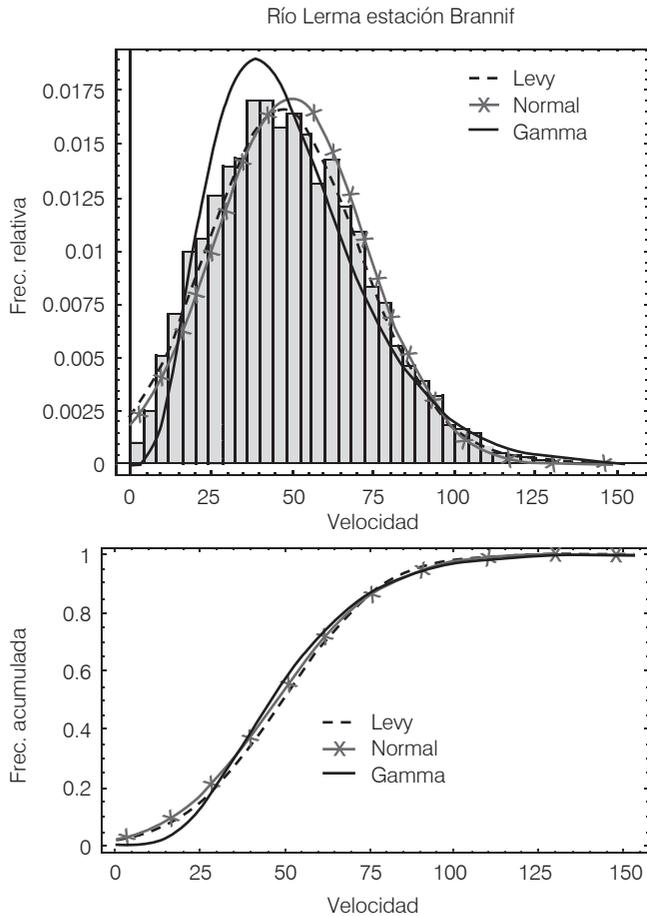
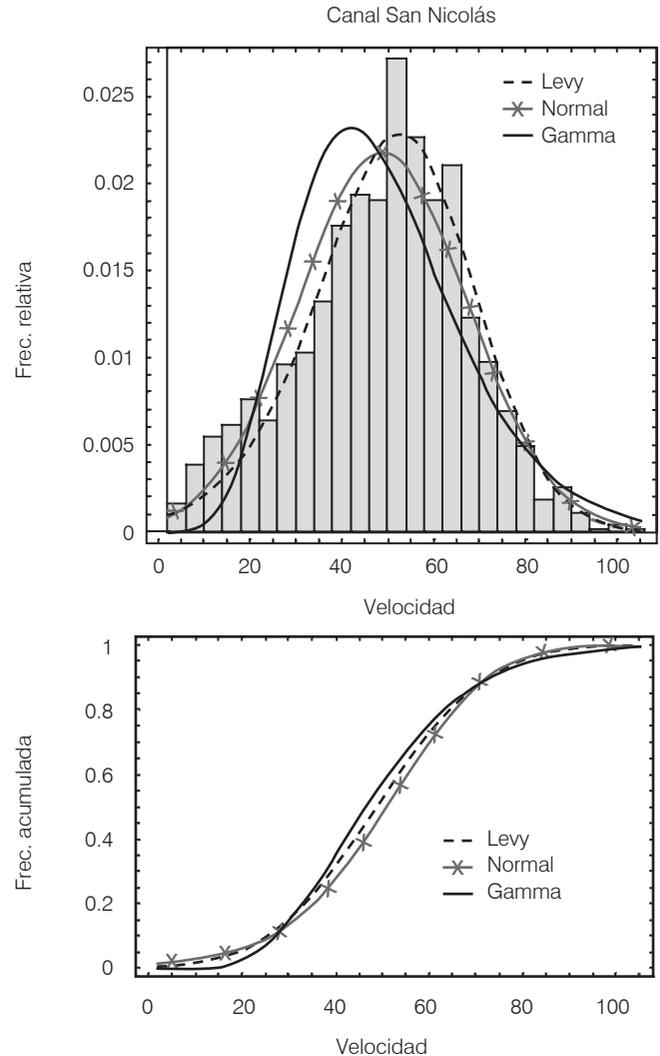


Ilustración 5. Distribución relativa, acumulada e identificación de funciones Lévy estables (---), función Gamma (—) y Gaussiana (*).**



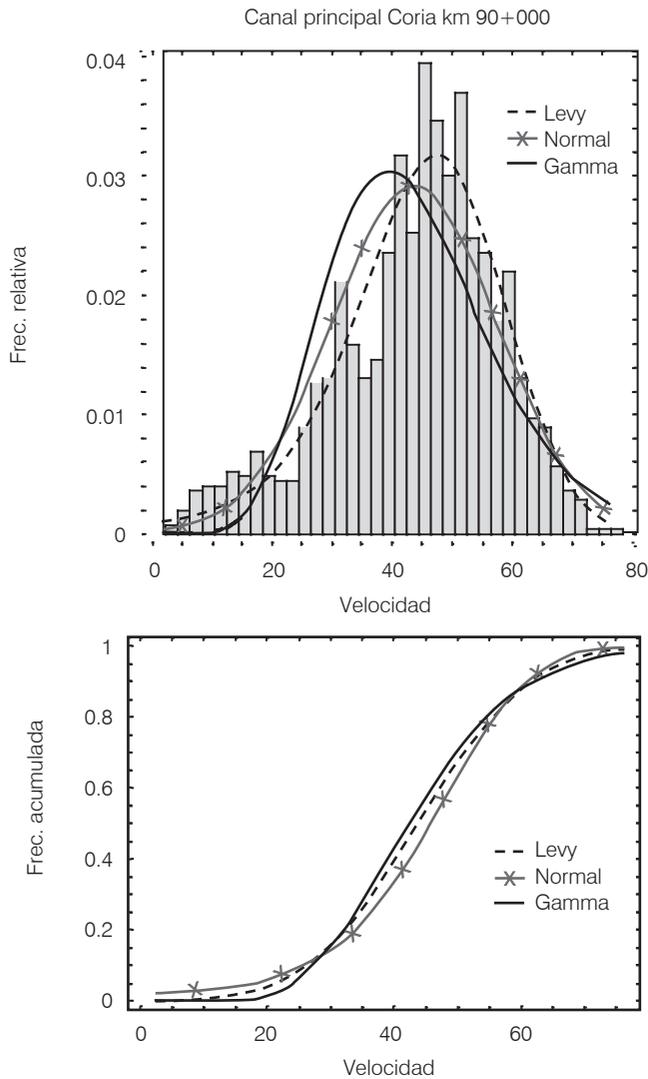
relativas. En el canal San Nicolás se exhiben franjas verticales alternadas de altas y bajas velocidades, pero en forma más definida. En el canal Coria se observa una distribución más homogénea de velocidades máximas en el centro del canal. Por lo demás, se aprecian franjas verticales de velocidades máximas bien definidas desde el fondo hasta la superficie del agua, alternadas con franjas de velocidades bajas, y no se observan velocidades máximas en los taludes del canal.

En el canal de sección irregular y en tierra se aprecia menor intensidad de turbulencia y mayor índice de ocupación espacial (cuadro 2), y por lo tanto, mayor dimensión fractal. Por el contrario, en el canal de concreto se exhibe una mayor intensidad de turbulencia y un menor índice de ocupación espacial, por ende, una menor dimensión fractal.

En las referencias incluidas en Reza *et al.* (2008, 2005), se da cuenta de una dimensión fractal para las fluctuaciones de la velocidad del orden de 1.70 ± 0.05 .

El resultado más cercano que se reporta en el presente trabajo es de 1.743 (cuadro 1), para el canal con revestimiento de concreto; el siguiente más cercano es de 1.856, para el canal en mampostería; y finalmente, de 1.934, para el canal natural en tierra. Los resultados obtenidos por esos autores para la componente tangencial de las variaciones de la velocidad pueden ser comparados con los del presente trabajo, porque las componentes tangenciales a los vórtices son semejantes a las principales. La dimensión fractal para la componente tangencial más frecuente para esos autores resultó del orden de 1.63, lo que concuerda con la predicción teórica de este trabajo, siendo éste el intervalo $1.148 < \gamma < 2$, que tiene como valor medio aritmético 1.574.

Ilustración 6. Distribución relativa, acumulada e identificación de funciones Lévy estables (---), función Gamma (—) y Gaussiana (*).**



Cuadro 2. Índice de ocupación espacial.

Canal	β
Río Braniff	0.8276
San Nicolás	0.8204
Coria	0.8087

Finalmente se reitera que en las gráficas de los tres canales se aprecia una distribución de velocidades y no un perfil de velocidades. Se piensa que puede rescatarse el concepto de perfil de velocidades al plantearlo como una regularización de las velocidades distribuidas.

Conclusiones

- Las ecuaciones de Navier-Stokes y las ecuaciones de Reynolds corresponden a una misma estructura, pero se diferencian en la divergencia de los esfuerzos de Reynolds, siendo el rotacional de esta última la fuente de las corrientes secundarias.
- La función característica de la distribución de las variaciones de las velocidades se expresa como una potencia reforzada, que varía en el rango de 0 a 2, y corresponde a una distribución Lévy que se aproxima por la transformada de Laplace de una distribución beta unimodal con dos parámetros de forma dependientes del índice de ocupación espacial y del índice de autoafinidad.
- Se identificaron los índices de ocupación espacial, de intermitencia, y de estabilidad, así como los parámetros de forma del espectro para un canal natural, un segundo de mampostería y un tercero de concreto. La mayor intensidad de turbulencia le correspondió al canal de concreto y la menor, al cauce natural.
- El índice de ocupación espacial y el exponente de autoafinidad se ubican en el rango predicho por la

Cuadro 1. Parámetros estimados.

Revestimiento	Nombre	Parámetros Levy				H	ι	a	b	Densidad beta
		γ	$\bar{\beta}$	c	μ					
En tierra	Brannif	1.934	0.9	16.99	47.16	0.5172	0.0044	1.8391	5.2559	$\frac{h^{0.9391} (1-h)^{4.2559}}{3.8904 \times 10^{-2}}$
Mampostería	San Nicolás	1.856	-1.0	12.35	52.05	0.5388	0.0109	1.8463	4.9507	$\frac{h^{0.9463} (1-h)^{3.9507}}{4.2625 \times 10^{-2}}$
Concreto	Coria	1.743	-1.0	8.89	47.03	0.5739	0.0298	1.858	4.4603	$\frac{h^{0.959} (1-h)^{3.4603}}{5.0082 \times 10^{-2}}$

Cuadro 3. Coeficientes de Coriolis y de Boussinesq.

Revestimiento	Nombre	Área (m ²)	Coriolis	Boussinesq
En tierra	Brannif	123.35	1.790	1.251
Mampostería	San Nicolás	8.49	1.390	1.136
Concreto	Coria	16.21	1.294	1.107

teoría. Más cerca de 5/6, pero inferior, en el primer caso; de 1/2, pero superior, en el segundo.

- El trabajo predice un rango de las dimensiones fractales de las fluctuaciones de la velocidad entre 1.148 y 2, con un valor medio aritmético de 1.574; mientras que los trabajos publicados reportan un valor modal de 1.63, que pueden considerarse valores muy cercanos tratándose de un objeto estadístico.
- Es posible una mimetización de la distribución Lévy por la Gaussiana debido a que los valores calculados del índice de estabilidad son muy cercanos a dos, esto explicaría el uso de la distribución Gaussiana en los primeros modelos de turbulencia.

Recibido: 10/03/2008
Aprobado: 09/03/2009

Referencias

- ABRAHAM, R., MARSDEN, J.E. and RATIU, T. *Manifolds, tensor analysis and applications*. New York: Springer-Verlag, 1988, 654 pp.
- BATCHELOR, G.K. and BONDO, M.A. *The theory of homogeneous turbulence*. Cambridge Monographs on Mechanics and Applied Mathematics. London: Cambridge at the University Press, 1953, pp. 14-33.
- CHEN, S., FOIAS, C., HOLM, D., OLSON, E., TITI, E.S. and WYNNE, S. Camasa-Holm equations as a closure model for turbulent channel and pipe flow. *Physical Rev. Lett.* Vol. 81, no. 24, 1998, pp. 5338-5341.
- CHEN, W. A speculative study of 2/3-order fractional Laplacian modeling of turbulence: some thoughts and conjectures. Vol.16, issue 2, 2006, pp. 023126-023126-6.
- EMBRECHTS, P. and MAEJIMA, M. An introduction to the theory of selfsimilar stochastic processes. *International Journal of Modern Physics B*. Vol. 14, no. 12-13, 2000, pp. 1399-1420.
- DE KÁRMÁN, T. and HOWARTH, L. On the Statistical Theory of Isotropic Turbulence. *Proc. Roy. Soc. A*. Vol. 164, 1938, pp. 192-215.
- HALSEY, T.C., JENSEN, M.H., KADANOFF, L.P., PROCACCIA, I. and SHRAIMAN, B.I. Fractal measures and their singularities: the characterization of strange sets. *Phys. Rev A*. Vol. 33, 1986, pp. 1141-1151.
- LEVI, E. *El agua según la ciencia*. México, D.F.: Conacyt, Ed. Castell Mexicana, 1989, 677 pp.
- MERCADO, J.R. La ecuación de Navier-Stokes y multifractales. *Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones*. Vol. XV, núm. 1, 2008, pp. 49-72.
- MERCADO, J.R., LÁZARO, P., BRAMBILA, F. y FUENTES, C. Aproximación fractal para los semivariogramas de los niveles freáticos. *Revista de Matemáticas: Teoría y Aplicaciones*. Vol. IX, núm. 2, julio de 2002, pp. 85-100.
- METZLER, R. and KLAFTER, J. The random walk's guide to anomalous diffusion: A fractional dynamics approach. *Phys. Rep.* Vol. 339, 2000, pp. 1-77.
- NEZU, I. Open-channel flow turbulence and its research prospect in the 21st century. *Journal of Hydraulic Engineering*. ASCE. Vol. 131, no. 4, April, 2005, pp. 229-246.
- REZA, A.G. and REZA, A.K. Quantifying flow structure in vortex chamber using fractal dimension. *Chaos, Solitons & Fractals*. Vol. 36, no. 2, April, 2008, pp. 314-321.
- REZA, A.K., NAGHI, A., HOMAYOUN, E. and SHIRVANI, A. Fractal-Markovian scaling of turbulent bursting process in open channel flow. *Chaos, Solitons & Fractals*. Vol. 25, 2005, pp. 307-318.
- TORRES DEL C., G. *Notas sobre variedades diferenciales*. México, D.F.: Cinvestav, 1984.
- SOTELO, G. *Hidráulica general*. Volumen I. México, D.F.: Editorial Limusa, 1999, 126 pp.

Abstract

RAMÍREZ-LUNA, J., MERCADO-ESCALANTE, R., PEREA-ESTRADA, H., OLVERA-ARANZOLO, E., RUIZ-CARMONA, V. & ÍÑIGUEZ-COVARRUBIAS, M. Reynolds equations and water distribution in irrigation canals. Hydraulic engineering in Mexico (in Spanish). Vol. XXIV, no. 3, July-September, 2009, pp. 121-130.

The motivation behind this work is to understand discharge measurements better and to study irrigation canal shear stress in Reynolds equations. Field data for velocity distribution in transversal sections are used to determine the vorticity in Reynolds equations. Based on a turbulence model and self-similarity fractal methods, we obtained a velocity density function and the so called busy-spatial indicator range. For each canal section plan the busy-spatial indicator, the intermittence indicator, and the Coriolis and Boussinesq coefficients were reckoned. The results agreed with the theoretical prediction for busy-spatial indicator, proposed in this work, and we obtained some consistent data for fractal dimensions. The highest turbulence was for the lined canal and the lowest for the natural river. Secondary currents take their origin in the rotational of the divergence shear stress and the velocity variations are distributed according to a Lévy density function. Shift Doppler devices were used to get the field information.

Keywords: Reynolds equation, self-similarity, turbulence models, Doppler shift, density distributions.

Dirección institucional de los autores:

Javier Ramírez-Luna
Roberto Mercado-Escalante
Hugo Perea-Estrada
Ernesto Olvera-Aranzolo
Víctor Ruiz-Carmona
Mauro Íñiguez-Covarrubias

Instituto Mexicano de Tecnología del Agua
Paseo Cuauhnáhuac 8532, Jiutepec, Morelos 62550, México
teléfono: + (52) (777) 3 29 36 00
jramirez@tlaloc.imta.mx
rmercado@tlaloc.imta.mx
hpe650820@gmail.com
aranzolo@tlaloc.imta.mx
vmruiz@tlaloc.imta.mx
mic@tlaloc.imta.mx