

Artículo publicado en el Repositorio Institucional del IMTA

<i>Título</i>	Una solución analítica de la infiltración en un suelo con manto freático somero: aplicación al riego por gravedad.
<i>Autor / Adscripción</i>	Carlos Fuentes Carlos Chávez Universidad Autónoma de Querétaro, México Felipe Zataráin Instituto Mexicano de Tecnología del Agua
<i>Publicación</i>	Tecnología y Ciencias del Agua, 1(3): 39-49
<i>Fecha de publicación</i>	2010
<i>Resumen</i>	Se deduce una solución analítica de la ecuación de Richards utilizando las hipótesis de Green y Ampt para describir la infiltración del agua en un suelo con un manto freático somero. La solución de la infiltración establecida se utiliza en el diseño del riego por gravedad en suelos con un manto freático somero, como ocurre en zonas agrícolas con riego o con drenaje lento.
<i>Identificador</i>	http://hdl.handle.net/123456789/1188

UNA SOLUCIÓN ANALÍTICA DE LA INFILTRACIÓN EN UN SUELO CON MANTO FREÁTICO SOMERO: APLICACIÓN AL RIEGO POR GRAVEDAD

• Carlos Fuentes • Carlos Chávez •
Universidad Autónoma de Querétaro, México

• Felipe Zataráin •
Instituto Mexicano de Tecnología del Agua

Resumen

Se deduce una solución analítica de la ecuación de Richards utilizando las hipótesis de Green y Ampt para describir la infiltración del agua en un suelo con un manto freático somero. Se supone un perfil de humedad inicial lineal, de modo que el valor mínimo se encuentra en la superficie del suelo y el máximo en la superficie del manto freático. Se acepta una variación lineal de la succión en el frente de saturación, de modo que es máxima en la superficie del suelo y nula en el manto freático. La ecuación de Green y Ampt se deduce cuando la profundidad del manto freático tiende a infinito en la solución. La solución se compara con una solución numérica para la condición de contenido de humedad inicial lineal, supuesta para deducir la primera, y para una distribución hidrostática inicial de las presiones, con buenos resultados en ambos casos. En el modelo de Lewis y Milne se introduce la solución de la infiltración para describir tres pruebas de avance en el riego por melgas del cultivo de arroz en La Chontalpa, Tabasco, México, a diferentes profundidades del manto freático y caudales de riego. En la primera se calibran los parámetros relativos a la infiltración y a la ley de resistencia al flujo del agua en la superficie del suelo, y en las otras dos se lleva a cabo la predicción de la evolución del frente de avance; en las tres pruebas, las curvas teóricas de avance son muy cercanas a las curvas experimentales. La solución de la infiltración establecida se utiliza en el diseño del riego por gravedad en suelos con un manto freático somero, como ocurre en zonas agrícolas con riego o con drenaje lento.

Palabras clave: perfil de humedad inicial lineal, variación lineal de la succión en el frente de saturación.

Introducción

En el estudio del movimiento del agua en el riego por gravedad se han utilizado ecuaciones racionales para describir el movimiento en la superficie del suelo y la infiltración. El movimiento en la superficie se modela generalmente con las ecuaciones de Saint-Venant (1871) y sus simplificaciones, como los modelos de onda difusiva, de inercia nula e hidrológico (Woolhiser, 1975; Strelkoff y Katopodes, 1977; Lewis y Milne, 1938). La infiltración se modela

con soluciones numéricas o analíticas de la ecuación de Richards (1931).

Entre las soluciones analíticas de la infiltración se encuentran la de Philip (1957, 1969), Parlange *et al.* (1982) y Fuentes *et al.* (2001), entre otras. Estas soluciones se obtienen suponiendo una columna semi-infinita de suelo con un contenido de humedad inicial constante a lo largo de la misma. Esta condición no es aplicable en suelos con mantos freáticos someros, ya que el perfil de humedad no es uniforme, como ocurre en zonas agrícolas de riego.

El objetivo de este trabajo es la deducción de una solución analítica de la ecuación de Richards basada en las hipótesis de Green y Ampt que incluya la presencia del manto freático en el perfil del suelo.

La solución obtenida se compara con una solución numérica de la ecuación de Richards y se utilizará en la descripción de la fase de avance en el riego por gravedad en el cultivo de arroz en La Chontalpa, Tabasco, México, a través del modelo hidrológico propuesto por Lewis y Milne.

Teoría

Ecuaciones de base

La ecuación de Richards se utiliza ampliamente para estudiar la transferencia de agua en el suelo. En su forma unidimensional en la transferencia vertical se escribe como sigue:

$$C(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[K(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial z} \right] - \frac{dK}{d\psi} \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (1)$$

la cual resulta de la ecuación de continuidad deducida a partir de la aplicación del principio de conservación de la masa:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = - \frac{\partial q}{\partial z} \quad (2)$$

y de la ley de Darcy generalizada a los suelos no saturados:

$$q = -K(\psi) \frac{\partial H}{\partial z}; \quad H = \psi - z \quad (3)$$

donde t es el tiempo; H , el potencial hidráulico igual a la suma del potencial de presión ψ y del potencial gravitacional z asimilado a la coordenada vertical orientada positivamente hacia abajo; q , el flujo; $K(\psi)$, la conductividad hidráulica como una función de la presión; θ ,

el contenido volumétrico de humedad; $\theta(\psi)$, la curva de retención de humedad, y su derivada $C(\psi) = d\theta/d\psi$ es la capacidad específica.

Se han establecido algunas soluciones analíticas del fenómeno de la infiltración vertical basadas en la ecuación (1), correspondientes a formas particulares de las características hidrodinámicas y de las condiciones iniciales y de frontera. Destaca particularmente la solución de Parlange *et al.* (1982), quienes suponen una relación entre la difusividad hidráulica definida por $D(\theta) = K(\theta)d\psi/d\theta$ y la derivada de la conductividad hidráulica con respecto al contenido de humedad $dK/d\theta$, para una columna semi-infinita de suelo con condición de humedad inicial constante (θ_0) y presión nula en la superficie del suelo; la solución incluye como casos extremos las ecuaciones de Green y Ampt (1911), y de Talsma y Parlange (1972). La primera corresponde al caso en que $D(\theta)$ tiene el comportamiento de una densidad de Dirac y $K(\theta)$ es continua, proporcional al contenido de humedad, mientras que la segunda cuando tanto como $D(\theta)$ y $dK/d\theta$ presentan un comportamiento proporcional a dicha densidad. Parlange *et al.* (1982) muestran que su solución es aplicable para describir la infiltración en suelos de textura contrastantes, desde una arena hasta una arcilla. El efecto de una carga positiva lo introducen Parlange *et al.* (1985), aceptando la hipótesis de Green y Ampt en cuanto a la presencia de una zona totalmente saturada en el perfil de humedad; una zona saturada en tensión la agregan Haverkamp *et al.* (1990).

En otra línea de investigación, Fuentes *et al.* (2001) ofrecen una solución que, para las mismas condiciones iniciales y de frontera, suponen que $D(\theta)$ es constante y que $dK/d\theta$ es lineal, generalizando el término convectivo de la ecuación de Burgers (1948) planteada en un problema de aerodinámica y de la cual se han construido soluciones analíticas. El resultado incluye la solución lineal clásica y la presentada por Knigh (1973).

Las soluciones mencionadas no se pueden aplicar en suelos con perfil de humedad inicial

no uniforme, sin cometer posiblemente errores importantes, como el que se presenta cuando existe un manto freático somero en el perfil del suelo. Se va a mostrar que la presencia del manto puede incorporarse de una manera directa en la ecuación de Green y Ampt, razón por la cual se expone la solución original.

La infiltración según Green y Ampt

La ecuación de Green y Ampt se establece con las siguientes hipótesis:

- a) El contenido de humedad inicial (θ_i) es constante a lo largo de la columna de suelo, es decir $\theta_i = \theta_o$ en $0 \leq z$.
- b) Durante la infiltración se forman dos zonas de humedecimiento, una totalmente saturada, es decir $\theta = \theta_s$ en $0 \leq z \leq z_f$ donde θ_s es el contenido de humedad a saturación y $z_f(t)$ es la posición del frente saturado, y otra seca con el contenido de humedad inicial, es decir $\theta = \theta_o$ en $z_f \leq z$. La primera zona evoca un pistón (figura 1).
- c) La distribución de las presiones es hidrostática en la zona saturada, siendo $\psi = h_{sup}$ en $z = 0$, donde $h_{sup} \geq 0$ es la presión impuesta en la superficie del suelo, y $\psi = \psi_f$ en $z = z_f$ donde $\psi_f = -h_f \leq 0$ es una presión negativa efectiva en el frente de saturación y $0 \leq h_f$ es la succión correspondiente. Lo anterior se traduce en $\psi = h_{sup} - (h_{sup} + h_f)z/z_f$

La segunda hipótesis implica que $\partial\theta/\partial t = 0$ en $0 \leq z \leq z_f$ y de acuerdo con la ecuación (2) se tiene $\partial q/\partial z = 0$, esto quiere decir que el flujo de Darcy es independiente de z en la zona saturada y es igual al flujo de infiltración que ocurre en la superficie $qs(t) = dI/dt$, donde $I(t) = (\theta_s - \theta_o)z_f(t)$, de acuerdo con la primera hipótesis, es la lámina de agua infiltrada acumulada. La tercera hipótesis proporciona el gradiente hidráulico $\partial H/\partial z = -[1 + (h_{sup} + h_f)/z_f]$. De la ley de Darcy, ecuación (3), se deduce:

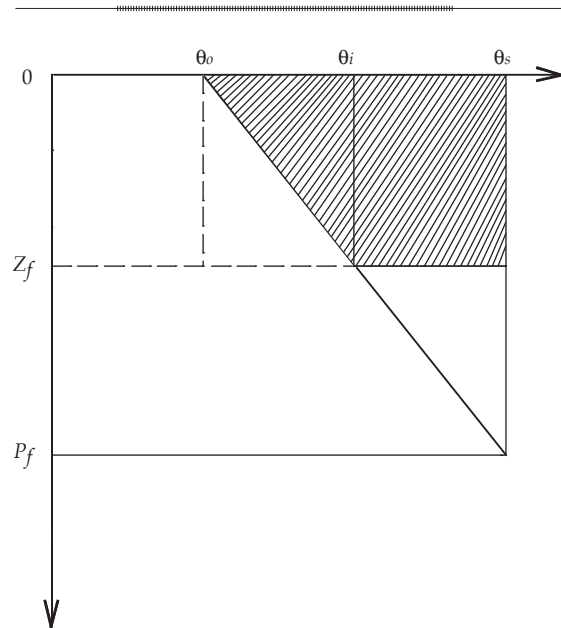


Figura 1. La infiltración en un suelo con manto freático y perfil de humedad inicial lineal, aceptando las hipótesis de Green y Ampt (1911).

$$\frac{dI}{dt} = K_s \left[1 + \frac{h_{sup} + h_f}{z_f(t)} \right]; \quad I(t) = \Delta\theta z_f(t) \quad (4)$$

donde $\Delta\theta = \theta_s - \theta_o$ y $K_s = K(0)$ es la conductividad hidráulica a saturación.

La integración de la ecuación (4), sujeta a la condición $I = 0$ en $t = 0$, conduce a la ecuación de infiltración de Green y Ampt, para h_{sup} independiente del tiempo:

$$K_s t = I - \lambda \ln \left(1 + \frac{I}{\lambda} \right); \quad \lambda = \Delta\theta (h_{sup} + h_f) \quad (5)$$

En una columna de suelo con un manto freático localizado a una profundidad P_f la ecuación (5) podría aplicarse hasta el tiempo t_f que corresponde al momento en que el frente de saturación alcanza el manto freático, con una lámina infiltrada acumulada máxima $I_f = \Delta\theta P_f$. Sin embargo, su aplicabilidad es cuestionable, ya que la presencia de un manto freático induce un perfil de humedad no uniforme (Gardner,

1958; Kunze et al., 1985) y la condición inicial depende de la profundidad $\theta_i(z)$, de modo que $\theta_i(0) = \theta_o$ y $\theta_i(P_f) = \theta_s$.

La infiltración en una columna de suelo con manto freático

Se denota por $\theta_i(z)$ la distribución inicial de la humedad; su desarrollo en potencias alrededor de $z = 0$ es $\theta_i(z) = \theta_o + \theta_i'(0)z + O(z^2)$. Si se retienen los términos hasta el lineal, $\theta_i'(0)$ debe ser reemplazada por $(\theta_s - \theta_o)/P_f$ con la finalidad de satisfacer la condición $\theta_i(P_f) = \theta_s$. Así, la primera hipótesis de Green y Ampt se reemplaza aquí por una dependencia lineal del contenido de humedad inicial con respecto a la profundidad:

$$\theta_i(z) = \theta_o + (\theta_s - \theta_o) \frac{z}{P_f} \quad (6)$$

la cual contiene el caso de un contenido de humedad constante haciendo $P_f \rightarrow \infty$. En la figura 1 se muestra un esquema de la infiltración según Green y Ampt, con el contenido de humedad inicial definido por la ecuación (6).

La lámina infiltrada acumulada en un flujo en pistón con contenido de humedad inicial variable está definida por:

$$I(t) = \int_0^{z_f(t)} [\theta_s - \theta_i(z)] dz \quad (7)$$

La introducción de la ecuación (6) en la ecuación (7) proporciona la relación siguiente entre la lámina infiltrada y la posición del frente de saturación:

$$I(t)/I_M = 1 - [1 - z_f(t)/P_f]^2; \quad I_M = \frac{1}{2} \Delta \theta P_f \quad (8)$$

donde I_M es la lámina infiltrada máxima.

La succión en el frente de saturación depende de los contenidos de humedad inicial y saturación, es decir $h_f = h_f(\theta_o, \theta_s)$. Cuando el frente de saturación está en la superficie se

tiene el valor $h_f(\theta_o, \theta_s)$, y cuando el frente de saturación está en la superficie del manto freático el valor de la succión es nula; su desarrollo en potencias alrededor de $\theta_i = \theta_o$ es $h_f(\theta_o, \theta_s) = h_f(\theta_o, \theta_s) + (\partial h_f / \partial \theta_i)_{\theta_i = \theta_o} (\theta_i - \theta_o) + O[(\theta_i - \theta_o)^2]$. Si se retienen los términos hasta el lineal, $(\partial h_f / \partial \theta_i)_{\theta_i = \theta_o}$ se debe reemplazar por $-h_f(\theta_o, \theta_s) / (\theta_s - \theta_o)$ para satisfacer la condición en el manto freático: $h_f(\theta_o, \theta_s) = h_f(\theta_o, \theta_s)[1 - (\theta_i - \theta_o) / (\theta_s - \theta_o)]$. Utilizando la ecuación (6) se obtiene la dependencia lineal siguiente:

$$h_f[\theta_i(z_f), \theta_s] = h_f(\theta_o, \theta_s) \left(1 - \frac{z_f}{P_f}\right) \quad (9)$$

La ecuación (4) se transforma en la ecuación diferencial siguiente:

$$\frac{dI}{dt} = K_s \left[1 + \frac{h_{sup} + h_f(1 - z_f/P_f)}{z_f}\right]; \quad (10)$$

$$z_f = P_f \left[1 - \sqrt{1 - I/I_M}\right]$$

donde se ha escrito h_f en lugar de $h_f(\theta_o, \theta_s)$, para que corresponda al parámetro de la ecuación original de Green y Ampt. Se debe notar que la velocidad con la que llega el frente al manto freático ($z_f = P_f$) es $q_s = K_s(1 + h_{sup}/P_f)$, en lugar de $q_s = K_s$; esta última situación ocurre cuando $P_f \rightarrow \infty$ o $h_{sup} = 0$.

La integración de la ecuación (10) con la condición $I = 0$ en $t = 0$ conduce a la ecuación de infiltración que sigue, cuando $h_f \neq P_f$:

$$K_s t = \begin{cases} \frac{P_f}{P_f - h_f} I - \frac{2P_f (h_{sup} + P_f) (h_{sup} + h_f) I_M}{(P_f - h_f)^3} \\ \ln \left[1 + \frac{P_f - h_f}{h_{sup} + h_f} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{I}{I_M}}\right)\right] \\ + \frac{2P_f (h_{sup} + h_f) I_M}{(P_f - h_f)^2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{I}{I_M}}\right) \end{cases} \quad (11)$$

y cuando $h_f = P_f$ se tiene:

$$K_s t = \frac{P_f I_M}{h_{\text{sup}} + P_f} \left[\frac{I}{I_M} + \frac{2}{3} \left(1 - \frac{I}{I_M} \right)^{3/2} - \frac{2}{3} \right] \quad (12)$$

Se debe notar que la ecuación (11) se reduce a la ecuación de infiltración de Green y Ampt, ecuación (5), cuando $P_f \rightarrow \infty$. En efecto, considerando que $I_M = \frac{1}{2} \Delta \theta P_f$, en este límite se tiene $1 - (1 - I/I_M)^{1/2} \cong I/2I_M = I/\Delta \theta P_f$. El tercer término es del orden de $1/P_f$ y tiende a cero; en el segundo término, el argumento del logaritmo tiende a $1 + I/\Delta \theta (h_{\text{sup}} + h_f)$ y su coeficiente a $\Delta \theta (h_{\text{sup}} + h_f)$; finalmente, en el primer término, el coeficiente de I tiende a la unidad. Tomando en cuenta la definición $\lambda = \Delta \theta (h_{\text{sup}} + h_f)$, se deduce la ecuación de Green y Ampt.

En tiempos cortos, la solución se desarrolla en la raíz cuadrada del tiempo:

$$I = S_t \sqrt{t} + At + O(t^{3/2}) \quad (13)$$

donde:

$$S_t^2 = 2K_s (h_f + h_{\text{sup}}) \Delta \theta; \quad A = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{h_{\text{sup}} + 3h_f}{2P_f} \right) K_s \quad (14)$$

El parámetro S_t se denomina la sorbilidad total y se infiere que su cuadrado es el resultado de las propiedades del suelo y de la condición en la frontera; es decir, $S_t^2 = S^2 + S_{\text{sup}}^2$, donde $S^2 = 2K_s h_f \Delta \theta$ y $S_{\text{sup}}^2 = 2K_s h_{\text{sup}} \Delta \theta$. El parámetro S es propiamente la sorbilidad del suelo (Philip, 1957). También cuando $P_f \rightarrow \infty$ se obtiene el resultado clásico $A = \frac{2}{3} K_s$ del desarrollo de la ecuación de Green y Ampt.

Para deducir el comportamiento cuando $t \rightarrow t_M$, donde t_M es el tiempo correspondiente a la lámina infiltrada máxima, primero se deduce de las ecuaciones (11) y (12):

$$h_f \neq P_f: K_s t_M = \begin{cases} \frac{P_f}{P_f - h_f} I_M - \frac{2P_f (h_{\text{sup}} + P_f) (h_{\text{sup}} + h_f) I_M}{(P_f - h_f)^3} \\ \ln \left[1 + \frac{P_f - h_f}{h_{\text{sup}} + h_f} \right] + \frac{2P_f (h_{\text{sup}} + h_f) I_M}{(P_f - h_f)^2} \end{cases} \quad (15)$$

$$h_f = P_f: K_s t_M = \frac{P_f I_M}{3 (h_{\text{sup}} + P_f)} \quad (16)$$

Restando las ecuaciones (11) y (15), y las ecuaciones (12) y (16), se deduce el comportamiento buscado:

$$h_f \neq P_f: I \sim I_M + K_s (1 - h_f/P_f) (t - t_M) \quad (17)$$

$$h_f = P_f: I \sim I_M + K_s (1 + h_{\text{sup}}/P_f) (t - t_M) \quad (18)$$

Estimación de parámetros

El parámetro h_f se calcula a partir de las características hidrodinámicas del suelo, utilizando la expresión que define la sorbilidad:

$$S^2 = 2 \int_{\theta_o}^{\theta_s} \frac{\theta - \theta_o}{f(\theta)} D(\theta) d\theta = 2 \int_{\psi_o}^{\psi_s} \frac{\theta(\psi) - \theta_o}{f[\theta(\psi)]} K(\psi) d\psi \quad (19)$$

donde $f(\theta)$ es la relación de concentración de flujos y $\theta_o = \theta(\psi_o)$, siendo ψ_o la presión correspondiente a θ_o .

La expresión que resulta para la succión en el frente de saturación es:

$$h_f = \int_{\psi_o}^{\psi_s} \frac{\Theta(\psi)}{f[\Theta(\psi)]} K_r(\psi) d\psi; \quad \Theta(\psi) = \frac{\theta(\psi) - \theta_o}{\theta_s - \theta_o} \quad (20)$$

donde $K_r(\psi) = K(\psi)/K_s$ es la conductividad hidráulica relativa a su valor en saturación.

La relación de concentración de flujos para una difusividad de Dirac es $f(\Theta) = \Theta$. Mediante un procedimiento de optimización, Parlange (1975) recomienda:

$$f(\Theta) = \frac{2\Theta}{1 + \Theta} \quad (21)$$

El contenido de humedad inicial en la superficie se estima a partir de la curva de retención de humedad. En efecto, Saucedo

et al. (2003) muestran que el supuesto de una distribución hidrostática de las presiones en el tiempo inicial rinde cuenta de la evolución del frente de onda en la fase de avance en el riego por gravedad en suelos con mantos freáticos someros. Este supuesto permite reemplazar el contenido de humedad inicial en la ecuación (7) por la curva de retención $\theta(\psi)$, considerando que $\psi = z - P_f$. Para la lámina de infiltración máxima se tiene:

$$I_M = \int_0^{P_f} [\theta_s - \theta(z - P_f)] dz \quad (22)$$

Así, la ecuación (22) permite estimar un contenido de humedad inicial en la superficie, de modo que se conserve la masa total. De acuerdo con la ecuación (8), $I_M = \frac{1}{2} \Delta\theta P_f$, se tiene:

$$\frac{1}{2} \Delta\theta = \frac{1}{P_f} \int_0^{P_f} [\theta_s - \theta(z - P_f)] dz \quad (23)$$

si $\theta_0 \leq \theta_r$, entonces $\theta_0 = \theta_r$, donde θ_r es el contenido de humedad residual de Brooks y Corey (1964), definido de modo que la conductividad hidráulica asociada es cero.

Comparación entre las soluciones analítica y numérica de la infiltración

Para comparar la solución analítica con la solución numérica de la ecuación de Richards se utiliza un suelo arcilloso de La Chontalpa, caracterizado hidrodinámicamente por Saucedo et al. (2003). Estos autores representan la curva de retención con la ecuación de Van Genuchten (1980) y la curva de conductividad hidráulica con la ecuación de Brooks y Corey (1964), como es sugerido por Fuentes et al. (1992):

$$\theta(\psi) = \theta_r + (\theta_s - \theta_r) \left[1 + \left(\frac{\psi}{\psi_d} \right)^n \right]^{-m}; \quad m = 1 - 2/n \quad (24)$$

$$K(\theta) = K_s \left(\frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} \right)^\eta \quad (25)$$

Los valores de los parámetros en este suelo arcilloso son $\theta_s = 0.5245 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$, $\theta_r = 0 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$, $\psi_d = -15 \text{ cm}$, $K_s = 1.86 \text{ cm/h}$, $m = 0.066$, $\eta = 21.19$.

Se utiliza el código numérico propuesto por Zataráin et al. (1998) para obtener la solución de la ecuación de Richards, ecuación (1), sujeta a la condición inicial definida por la ecuación (6) con $\theta_0 = 0.4 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$ y diferentes profundidades del manto freático $P_f = 50, 100, 150 \text{ cm}$. La presión en la superficie seleccionada es $h_{\text{sup}} = 10 \text{ cm}$, que es del orden de magnitud del tirante de agua formado en el riego por melgas en el cultivo de arroz. En la figura 2 se muestra la evolución de la lámina infiltrada calculada con la ecuación de Richards y con la solución analítica propuesta; el buen acuerdo entre ambas soluciones es evidente.

En la figura 3 se tiene la misma comparación que en la figura 2; pero en este caso, la ecuación de Richards se resuelve suponiendo una distribución hidrostática de las presiones. El acuerdo sigue siendo bueno, aunque la solución analítica se obtiene para una condición inicial diferente.

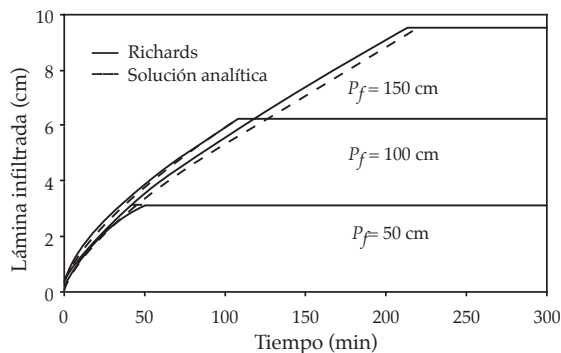


Figura 2. Comparación entre la solución numérica de la ecuación de Richards sujeta a un perfil de humedad inicial lineal y la solución analítica definida por la ecuación (11).

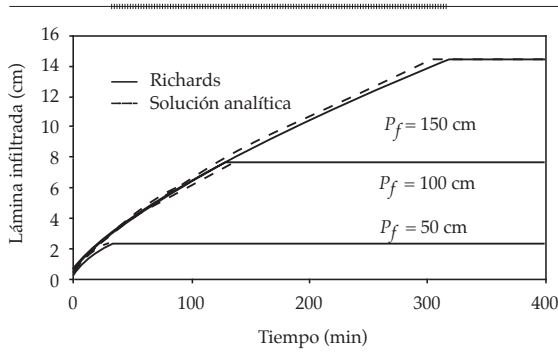


Figura 3. Comparación entre la solución numérica de la ecuación de Richards sujeta a una distribución hidrostática inicial de las presiones y la solución analítica definida por la ecuación (11).

Aplicaciones

Una de las posibles aplicaciones de la ecuación de infiltración deducida es la descripción de la evolución del frente de onda en la fase de avance del riego por gravedad en suelos con mantos freáticos someros.

Las pruebas de riego por melgas del cultivo de arroz fueron realizadas por Pacheco (1994) y modeladas mediante el acoplamiento de las ecuaciones de Saint-Venant y de Richards por Saucedo *et al.* (2003). Por simplicidad, aquí se utiliza el modelo hidrológico de Lewis y Milne (1938):

$$q_0 t = \bar{h} x_f(t) + \int_0^{x_f(t)} I(t - t_x) dx \quad (26)$$

donde q_0 es el caudal de aporte de agua por unidad de ancho de la melga o caudal unitario de aporte; \bar{h} , un tirante de agua medio en la superficie del suelo; $\tau = t - t_x$, el tiempo de contacto del agua en un punto x de la melga, y es igual a la diferencia entre el tiempo de avance (t) y el tiempo en que la onda arriba al punto en cuestión (t_x).

La ecuación (26) puede ser resuelta numéricamente. La solución para Δt constante, utilizando la regla de los trapecios, es la siguiente:

$$x_j = x_{j-1} + \frac{q_0 t_j - \bar{h} x_{j-1} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{j-1} (I_{j+1-i} + I_{j-i})(x_i - x_{i-1})}{\bar{h} + c_f I_1}; \quad (27)$$

$$j = 2, 3, \dots$$

con $t_1 = \Delta t$, $t_j = j \Delta t$, $x_0 = 0$ y $x_1 = q_0 t_1 / (\bar{h} + c_f I_1)$. El coeficiente de forma está en $\frac{1}{2} < c_f < 1$; se puede tomar el valor $c_f = \frac{2}{3}$.

Para el cálculo del tirante medio en función del caudal unitario de aporte es necesario introducir una ley de resistencia al flujo. Se utiliza la ley de resistencia en potencia siguiente (Fuentes *et al.*, 2004):

$$q = kv \left(\frac{gh^3 J}{v^2} \right)^d \quad (28)$$

donde q es el caudal unitario; h , el tirante de agua; J , la pendiente de fricción; v , el coeficiente de viscosidad cinemática; g , la aceleración gravitacional; $\frac{1}{2} \leq d \leq 1$, el límite inferior corresponde a la ley de Chézy (1776) y el superior a la ley de Poiseuille (1841); y k es un coeficiente adimensional. Se suponen los valores $v = 1 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ y $g = 9.81 \text{ m}/\text{s}^2$.

A partir de un análisis de la forma de la onda de avance en tiempos largos, Zataráin *et al.* (2003) concluyen que el tirante medio del modelo hidrológico puede ser estimado con la fórmula:

$$\bar{h} \cong \frac{4d}{5d+1} h_0; \quad h_0 = \left(\frac{q_0}{kv} \right)^{1/3d} \left(\frac{v^2}{gJ_0} \right)^{1/3} \quad (29)$$

donde h_0 es el tirante normal y J_0 es la pendiente topográfica de la melga. El tirante medio es tomado como el valor de la presión en la superficie del suelo: $h_{\text{sup}} = \bar{h}$.

Los caudales unitarios de las tres pruebas de riego son reportados en el cuadro 1; la pendiente topográfica de la melga es $J_0 = 0.00085 \text{ m}/\text{m}$. Tomando el caudal unitario máximo, el criterio del número de Reynolds $Re \propto q_0/v = 1\,428$ indica que el régimen de flujo es laminar, es decir

$d = 1$. En cuanto al parámetro k , Saucedo *et al.* (2003) lo calibran de modo de reproducir la curva de avance en la primera prueba de riego; con las ecuaciones de Saint-Venant y Richards obtienen $k \approx 0.0033$; las dos pruebas restantes se predicen correctamente utilizando este valor.

Dado que la evolución del tirante proporcionada por las ecuaciones completas de Saint-Venant se reemplaza por un tirante medio y constante en el modelo hidrológico, la calibración del parámetro k en la primera prueba de riego es diferente; el valor óptimo es $k \approx 0.0025$. En el cuadro 1 se muestran los valores de la infiltración máxima calculada con la ecuación (22), el contenido de humedad en la superficie calculada con la ecuación (23), la succión en el frente de saturación en la superficie calculado con las ecuaciones (20) y (21), y el tirante medio calculado con la ecuación (29).

En la figura 4 se muestran las tres curvas de avance. En la primera prueba de riego, la curva teórica es de calibración, mientras que en las pruebas segunda y tercera, las curvas son de predicción. El buen ajuste entre ellas indica que la solución analítica planteada puede describir la evolución de la lámina infiltrada en un suelo con manto freático en su perfil.

Los parámetros de la solución analítica h_f y K_s se han calculado a partir de las características hidrodinámicas obtenidas a su vez mediante la calibración de la curva de avance con las ecuaciones de Saint-Venant y Richards. Sin embargo, los parámetros pueden obtenerse mediante la calibración directa de la curva de avance con el modelo hidrológico y la solución analítica de la infiltración; el parámetro $h_{f'}$ como se observa en el cuadro 1,

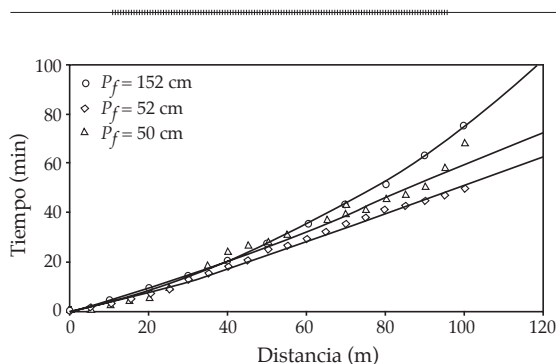


Figura 4. Posición del frente de avance en el riego por melgas en el cultivo de arroz en La Chontalpa, Tabasco, México. En el cuadro 1 se reportan los valores de los parámetros del modelo teórico.

es relativamente constante en un buen rango del contenido de humedad en la superficie del suelo y puede tomarse como el que resulta de la primera prueba de riego. Los parámetros se estiman también a partir de pruebas clásicas de infiltración.

Conclusiones

Se ha deducido una solución analítica de la ecuación de Richards de la transferencia de agua en el suelo utilizando las hipótesis de Green y Ampt para describir la infiltración del agua en un suelo con un manto freático en su perfil. Por una parte, se supone un perfil de humedad inicial lineal, de modo que el valor mínimo se encuentra en la superficie del suelo y el máximo en la superficie del manto freático. Por otra parte, se acepta una variación lineal de la succión en el frente de saturación, de modo que es máxima en la superficie del

Cuadro 1. Valores de los parámetros en las tres pruebas de riego en el cultivo de arroz realizadas en una melga de 10.5 m de ancho y 100 m de largo, en La Chontalpa, Tabasco, México.

Prueba	q_0 (m ³ /s/m)	P_f (cm)	I_M (cm)	θ_0 (cm ³ /cm ³)	h_f (cm)	\bar{h} (cm)
1	0.001428	152	14.54	0.3331	14.79	2.73
2	0.001428	50	2.15	0.4386	13.55	2.73
3	0.001238	52	2.32	0.4353	13.64	2.60

suelo y nula en el manto freático. La solución analítica tiende a la ecuación de Green y Ampt conforme la profundidad del manto freático se incrementa. La solución se compara con una solución numérica de la ecuación de Richards para la condición de contenido de humedad inicial lineal, supuesta para deducir la primera, y para una distribución hidrostática inicial de las presiones, con buenos resultados en ambos casos.

En el modelo de Lewis y Milne de la fase de avance del riego por gravedad, la solución de la infiltración se introduce para la descripción de tres pruebas de riego por melgas realizadas en el cultivo de arroz en La Chontalpa, Tabasco, México, a diferentes profundidades del manto freático. En la primera prueba se calibraron los parámetros relativos a la infiltración y a la ley de resistencia al flujo del agua en la superficie del suelo; en las pruebas segunda y tercera se llevó a cabo la predicción de la evolución del frente de avance. Tanto en la calibración como en la predicción, las curvas teóricas de avance son muy cercanas a las curvas experimentales.

A partir de lo anterior, la solución de infiltración propuesta puede ser utilizada en el diseño del riego por gravedad en suelos con un manto freático somero, como ocurre en zonas agrícolas de riego o suelos con drenaje natural lento que inducen tales condiciones.

Recibido: 17/02/09
Aprobado: 19/03/10

Referencias

- BROOKS, R.H. and COREY, A.T. *Hydraulic properties of porous media*. Hidrol. Pap. 3. Fort Collins: Colorado State University, 1964.
- CHÉZY, A. Rapport sur le canal de l'Yvette. En Herschel, C. On the origin of the Chézy formula. *J. Assoc. Eng. Soc.* Vol. 18, (1776), 1897, pp. 363-365.
- FUENTES, C., HAVERKAMP, R. and PARLANGE, J.Y. Parameter constraints on closed-form soil-water relationships. *Journal of Hydrology*. Vol. 134, 1992, pp. 117-142.
- FUENTES, C., PARLANGE, J.Y., HAVERKAMP, R. and VAUCLIN, M. La solución cuasi-lineal de la infiltración vertical. *Ingeniería hidráulica en México*. Vol. 16, núm. 4, octubre-diciembre de 2001, pp. 25-33.
- FUENTES, C., DE LEÓN, B., SAUCEDO, H. PARLANGE, J.Y. y ANTONINO, A.C.D. El sistema de ecuaciones de Saint-Venant y Richards del riego por gravedad: 1. La ley de resistencia hidráulica en potencia. *Ingeniería hidráulica en México*. Vol. 19, núm. 2, abril-junio de 2004, pp. 65-75.
- GARDNER, W.R. Some steady-state solutions of the unsaturated moisture flow equation with application to evaporation from a water table. *Soil Sci.* Vol. 85, 1958, pp. 228-232.
- GREEN, W.H. and AMPPT, G.A. Studies in soil physics, 1: the flow of air and water through soils. *J. Agric. Sci.* Vol. 4, 1911, pp. 1-24.
- HAVERKAMP, R., PARLANGE, J.Y., STARR, J.L., SCHMITZ, G. and FUENTES, C. Infiltration under ponded conditions: 3. A predictive equation based on physical parameters. *Soil Sci.* Vol. 149, 1990, pp. 292-300.
- KNIGHT, J.H. Recent progress in the solution of nonlinear diffusion equations. (In Philip, J.R., 1973). *Soil Sci.* Vol. 117, no. 5, 1974, pp. 257-264.
- KUNZE, R.J., PARLANGE, J.Y. and ROSE, C.W. A comparison of numerical and analytical techniques for describing capillary rise. *Soil Sci.* Vol. 139, 1985, pp. 491-496.
- LEWIS, M.R. and MILNE, W.E. Analysis of border irrigation. *Transactions of the ASAE*. Vol. 19, 1938, pp. 267-272.
- PACHECO, P. *Comparación de los métodos de riego por surcos y por melgas y alternativas de diseño en el cultivo del arroz (Oryza sativa L)*. Tesis de Maestría en Ciencias. Montecillo, México: Centro de Hidrociencias, Colegio de Postgraduados, 1994.
- PARLANGE, J.Y. On solving the flow equation in unsaturated soils by optimization: Horizontal infiltration. *Soil Sci. Soc. Amer. Proc.* Vol. 39, 1975, pp. 415-418.
- PARLANGE, J.Y., BRADDOCK, R.D., LISLE, I. and SMITH, R.E. Three parameter infiltration equation. *Soil Sci.* Vol. 111, 1982, pp. 170-174.
- PARLANGE, J.Y., HAVERKAMP, R. and TOUMA, J. Infiltration under ponded conditions: 1. Optimal analytical solution and comparison with experimental observations. *Soil Sci.* Vol. 139, 1985, pp. 305-311.
- PHILIP, J.R. Theory of infiltration. *Adv. In Hydrosoci.* Vol. 5, 1969, pp. 215-296.
- PHILIP, J.R. The theory of infiltration: 4. Sorptivity and algebraic infiltration equations. *Soil Sci.* Vol. 84, 1957, pp. 257-264.
- POISEUILLE J.L. Recherches expérimentales sur le mouvement des liquides dans les tubes de très petits diamètres. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*. Vol. 12, 1841, pp. 112-115. Vol. 11, 1840, pp. 961-1048.
- RICHARDS, L.A. Capillary conduction of liquids through porous mediums. *Physics 1*. 1931, pp. 318-333.

- SAINT-VENANT, A.J.C. BARRÉ de. Théorie du mouvement non permanent des eaux, avec application aux crues des rivières et à l'introduction des marées dans leur lits. *Comptes rendus des Séances de l'Académie des Sciences*. Vol. 73, 1871, pp. 147-154 y 237-240.
- SAUCEDO, H., PACHECO, P., FUENTES, C. y ZAVALA, M. Efecto de la posición del manto freático en la evolución del frente de avance en el riego por melgas. *Ingeniería hidráulica en México*. Vol. 18, núm. 4, octubre-diciembre de 2003, pp. 119-126.
- STRELKOFF, T. and KATOPODES, N.D. Border-irrigation hydraulics with zero inertia. *Journal of the Irrigation and Drainage Division, ASCE*. Vol. 103, 1977, pp. 325-342.
- TALSMA, T., and PARLANGE, J.Y. One-dimensional vertical infiltration. *Aust. J. Soil. Res.* Vol. 10, 1972, pp. 143-150.
- VAN GENUCHTEN, M.TH. A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils. *Soil Sci. Soc. Amer. J.* Vol. 44, 1980, pp. 892-898.
- WOOLHISER, D.A. *Simulation of unsteady overland flow. Unsteady flow in open channels*. Vol. II. Mahmood, K. and Yevjevich, V. (editors). Fort Collins, Colorado: Water Resources Publications. 1975, pp. 485-508.
- ZATARÁIN, F., FUENTES, C., PALACIOS-VÉLEZ, O.L., MERCADO-ESCALANTE, J.R., BRAMBILA-PAZ, F. y GARCÍA-VILLANUEVA, N.H. Modelación del transporte de agua y de solutos en el suelo. *Agrociencia*. Vol. 32, núm. 4, 1998, pp. 373-383.
- ZATARÁIN, F., FUENTES, C., RENDÓN, L. y VAUCLIN, M. Propiedades hidrodinámicas efectivas en el riego por melgas. *Ingeniería hidráulica en México*. Vol. 18, núm. 3, julio-septiembre de 2003, pp. 5-15.

Abstract

FUENTES, C., CHÁVEZ, C. & ZATARÁIN, F. An analytical solution for infiltration in soils with a shallow water table: application to gravity irrigation. *Water Technology and Sciences, formerly Hydraulic engineering in Mexico (in Spanish)*. Vol. I, no. 3, July-September, 2010, pp. 39-49.

An analytical solution of the Richards equation is deduced using Green and Ampt hypotheses to describe the infiltration in soils with a shallow water table. A linear initial moisture profile is assumed, so that the minimum value is at the soil surface and the maximum value at the water table level. A linear variation of the driver pressure is accepted, it is maximum at the soil surface and zero at the water table level. The Green and Ampt equation is deduced from the solution when the water table depth tends to infinite. The solution is compared with a numerical solution for linear initial moisture profile and for an initial hydrostatic pressure distribution, with good results in both cases. In the Lewis and Milne model, the infiltration solution is introduced to describe three tests of advance phase in border irrigation of the rice culture at La Chontalpa, Tabasco, Mexico, to different water table depths. In the first one the parameters regarding the infiltration and the flow resistance law at the soil surface are calibrated and in the other two tests, the prediction of the advance front evolution is carried out; in the three tests, the advance theoretical curves are very near to the experimental curves. The established infiltration solution can be used designing border irrigation in soils with shallow water table like agricultural zones under irrigation or with slow drainage.

Keywords: linear initial moisture profile, linear variation of the driver pressure.

Dirección institucional de los autores

Dr. Carlos Fuentes

Dr. Carlos Chávez

Facultad de Ingeniería
Universidad Autónoma de Querétaro
Cerro de las Campanas
76010 Santiago de Querétaro, Querétaro, México
teléfono: +52 (442) 1921 200, extensión 6036
fax: +52 (442) 1921 200, extensión 6006
cfuentes@uaq.mx
chagcarlos@gmail.com

M.C. Felipe Zataráin

Coordinación de Riego y Drenaje
Instituto Mexicano de Tecnología del Agua
Paseo Cuauhnáhuac 8532, colonia Progreso
62550 Jiutepec, Morelos, México
teléfono: +52 (777) 3293 600, extensión 444
fax: +52 (777) 3293 659
fzata@tlaloc.imta.mx