

Artículo publicado en el Repositorio Institucional del IMTA

<i>Título</i>	Presión hidrodinámica en tanques de almacenamiento producida por aceleración horizontal.
<i>Autor / Adscripción</i>	Aldo Iván Ramírez Instituto Mexicano de Tecnología del Agua
<i>Publicación</i>	Ingeniería Hidráulica en México, 11(3): 35-45
<i>Fecha de publicación</i>	1996
<i>Resumen</i>	Almacenar agua en forma segura, a la vez que se le proporciona cierta carga, son actividades indispensables para el desarrollo de un grupo de individuos. En este trabajo se presenta una solución simplificada, basada en los estudios de G. W. Housner, para obtener expresiones explícitas destinadas a la distribución de presiones y a las fuerzas de presión total, producidas por aceleración horizontal (componente principal de un sismo) y ejercidas sobre las paredes y el fondo de tanques superficiales, tanto rectangulares como cilíndricos (doblemente simétricos). Se muestra, además, una metodología para el análisis hidrodinámico de tanques de almacenamiento elevados.
<i>Identificador</i>	http://hdl.handle.net/123456789/1256

Presión hidrodinámica en tanques de almacenamiento producida por aceleración horizontal

Aldo Iván Ramírez

Instituto Mexicano de Tecnología del Agua

Almacenar agua en forma segura, a la vez que se le proporciona cierta carga, son actividades indispensables para el desarrollo de un grupo de individuos. En este trabajo se presenta una solución simplificada, basada en los estudios de G. W. Housner, para obtener expresiones explícitas destinadas a la distribución de presiones y a las fuerzas de presión total, producidas por aceleración horizontal (componente principal de un sismo) y ejercidas sobre las paredes y el fondo de tanques superficiales, tanto rectangulares como cilíndricos (doblemente simétricos). Se muestra, además, una metodología para el análisis hidrodinámico de tanques de almacenamiento elevados. Las expresiones obtenidas, de fácil aplicación, son particularmente importantes para los ingenieros civiles interesados en el análisis hidrodinámico de tanques de almacenamiento sujetos a aceleraciones horizontales, principalmente para el predimensionamiento de este tipo de estructuras.

Palabras clave: análisis sísmico, tanques de almacenamiento, tanques elevados, aceleración horizontal, presión hidrodinámica, distribución de presiones.

Introducción

El diseño de estructuras de almacenamiento implica no sólo satisfacer el requerimiento del líquido, sino también garantizar la seguridad de las personas que habitan en las zonas adyacentes. Además, sin un suministro seguro de agua, los incendios subsecuentes a grandes sismos pueden causar mayor daño que el temblor mismo, como el de San Francisco, Estados Unidos de América, EUA, en 1906. Por otro lado, el derrame de líquidos tóxicos pueden causar daños equivalentes a muchas veces el valor de los tanques y su contenido.

Los interesados en el diseño de tanques se han cuestionado si las variaciones de la presión causadas por movimientos sísmicos pueden ser un factor importante en los esfuerzos previstos. El comportamiento de los tanques durante los temblores es de mucho interés para los ingenieros, tanto por las razones anteriores, como por el hecho de que la estructura simple de un tanque es relativamente fácil de analizar y puede brindar información acerca del comportamiento de otras estructuras durante temblores.

La necesidad de investigación sobre este problema se traduce en mejores métodos de análisis capaces de predecir las presiones ejercidas por el líquido sobre las paredes y el fondo y los niveles máximos de fluctuación de la superficie libre esperados bajo la acción sísmica.

La primera solución a este problema la dio Westergaard (1931), quien determinó las presiones sobre una pared vertical rectangular sujeta a aceleración horizontal. Jacobsen (1949) solucionó el problema de un tanque cilíndrico conteniendo líquido y una pila cilíndrica rodeada del mismo. Werner y Sundquist (1943) extendieron este trabajo al caso de un recipiente rectangular. Graham y Rodríguez (1952) realizaron un análisis completo de las presiones en un recipiente rectangular. Hunt y Priestley (1978, 1982) desarrollaron fórmulas que permiten seguir las variaciones de características importantes durante acelerogramas sísmicos específicos. El método ha sido aplicado con acelerogramas reales de El Centro, California, EUA, y Bucarest, Rumania, obteniendo resultados bastante aproximados. El uso de una computadora es indispensable para su aplicación. Todos los análisis mencionados se

basan en la solución de la ecuación de Laplace cumpliendo con las condiciones de frontera adecuadas.

Este trabajo se fundamenta en los documentos de Housner (1954, 1957, 1961, 1963), de Haroun (1980, 1984) y de Ramírez (1987) a partir de los cuales se propone un método aproximado, que evita la solución de ecuaciones diferenciales parciales y presenta soluciones simples. El método recurre a intuiciones físicas y facilita la visualización del comportamiento del líquido, lo que es particularmente conveniente para aplicaciones en ingeniería.

Las investigaciones realizadas a la fecha se dividen en dos grupos:

- Las que consideran paredes rígidas (como el concreto reforzado)
- Las que tratan con paredes flexibles (acero) en donde la interacción entre la deformación del tanque y las presiones del líquido es considerable. Este último caso ha sido tratado por Clough (1977).

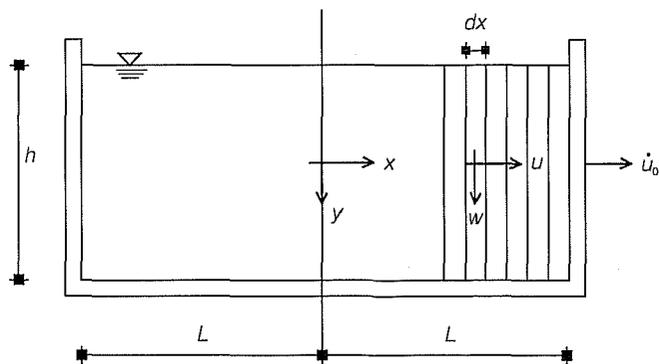
Se presentan en este trabajo, soluciones para el caso de tanques con paredes rígidas, de sección rectangular y cilíndrica tanto superficiales como elevados. Se obtienen además de las expresiones del movimiento de la superficie libre, ecuaciones para las fuerzas de presión y momentos flexionantes con fines de diseño.

Consideraciones generales

Se han establecido las siguientes hipótesis:

- El líquido es homogéneo, incompresible y no viscoso
- El flujo producido por el movimiento es irrotacional
- Los números de Reynolds son los suficientemente pequeños como para despreciar los efectos de turbulencia

1. El tanque rectangular. Nomenclatura



- El líquido está inicialmente en reposo
- Las fronteras del tanque son rígidas
- Los efectos en la interfaz líquido-tanque son despreciables, por lo que las fluctuaciones de la superficie libre no se amortiguan
- El tanque sufre aceleración horizontal exclusivamente
- Se trata con desplazamientos pequeños

Solución del problema

Si un tanque que contiene un líquido con una superficie libre queda sujeto a movimientos sísmicos del terreno experimenta dos tipos de presiones dinámicas:

- Presiones impulsivas proporcionales a la aceleración de las paredes al acelerarse éstas
- Presiones convectivas, producidas por la oscilación del líquido y proporcionales a la amplitud del movimiento

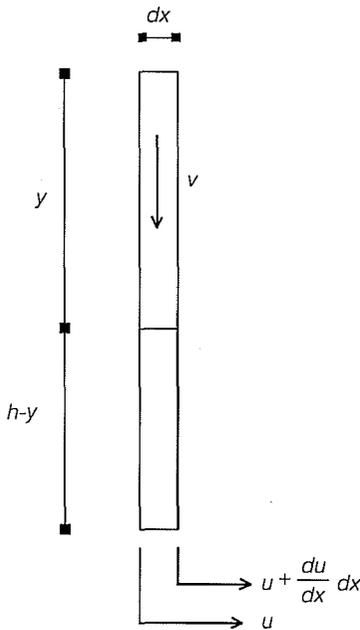
Presiones impulsivas

Considérese un recipiente con paredes laterales verticales y fondo horizontal simétrico con respecto a la vertical x - y y a los planos z - y . Al aplicar a las paredes una aceleración impulsiva, \dot{u}_0 en la dirección x , se generan aceleraciones del líquido \dot{u} y \dot{v} en las direcciones x , y y también una aceleración con componente \dot{w} en la dirección z . Para un tanque rectangular doblemente simétrico \dot{w} es cero y Jacobsen (1949) ha demostrado que lo anterior también se cumple para tanques cilíndricos. El que \dot{w} sea cero equivale a tener el líquido limitado por delgadas membranas verticales, por lo cual el movimiento del líquido tiene lugar en el plano x , y y exclusivamente. Basta entonces analizar una sola lámina de líquido de espesor diferencial, tal y como se muestra en la ilustración 1.

El efecto inicial de la aceleración \dot{u}_0 consiste en impartir al líquido una aceleración horizontal y también una componente vertical de aceleración. Dicho efecto es similar al que se presentaría si la componente horizontal u , de la velocidad del líquido fuera independiente de la coordenada y ; es decir el líquido se encuentra restringido por membranas verticales libres de moverse en la dirección x . Al aplicar la aceleración a las paredes, las membranas se aceleran con el líquido y éste será oprimido verticalmente respecto a las membranas.

Con base en la ilustración 2 y al analizar el líquido entre dos membranas adyacentes se obtiene que la presión en el líquido está dada por (Ramírez, 1987):

2. Velocidades del líquido comprendido entre dos membranas



$$p = -\rho h^2 \frac{d\dot{u}}{dx} \left[\frac{y}{h} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{h} \right)^2 \right] \dot{\quad} \quad (1)$$

de donde la fuerza total de presión por unidad de ancho se puede calcular como:

$$P = -\frac{\rho h^3}{3} \frac{d\dot{u}}{dx} \quad (2)$$

La aceleración \dot{u} está determinada a partir del movimiento horizontal del líquido contenido entre dos membranas. Esta rebanada de líquido se acelera en la dirección x si las presiones en las dos caras difieren. Con base en la ilustración 2, de la ecuación de movimiento del líquido se obtiene que

$$\frac{dP}{dx} = -\rho h \left[u + \frac{du}{dx} - u \right]$$

considerando (2), la solución de esta ecuación diferencial es:

$$\dot{u} = C_1 \cosh \frac{\sqrt{3}}{h} x + C_2 \sinh \frac{\sqrt{3}}{h} x \quad (3)$$

Las ecuaciones (2) y (3) determinan las presiones impulsivas del líquido y son aplicables cuando la superficie libre es horizontal. Housner (1957) considera que si el recipiente es *esbelto* ($h > 1.5 L$) se obtienen

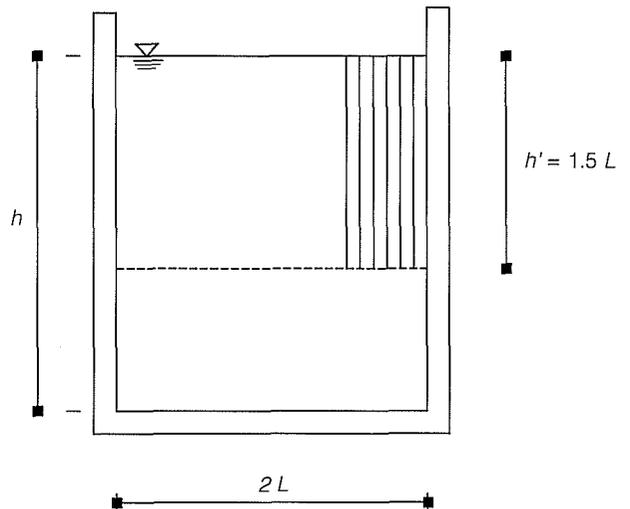
mejores resultados si se considera que la parte inferior del líquido está completamente restringida, es decir que se mueve rígidamente con el tanque, como se muestra en la ilustración 3. De esta manera, se aplicará la expresión (2) sólo a la porción superior ($h' = 1.5 L$), mientras la parte inferior ejercerá una presión $p = \rho L \dot{u}_0$ (ilustración 3).

Presiones convectivas

Cuando las paredes de un recipiente conteniendo líquido están sujetas a aceleraciones, el líquido es excitado en oscilaciones, las cuales producen presiones tanto en las paredes como en el fondo del tanque. El movimiento del líquido obedece a sus modos naturales de vibración. Un líquido posee un número infinito de modos de vibrar por lo cual puede representarse por una serie de masas ligadas por elementos de diferentes rigideces (ilustración 4).

El líquido de la parte baja tiene un determinado volumen encima que en cierta manera lo restringe, mientras la porción inmediata superior también tiene un volumen líquido encima, aunque en menos cantidad por lo que dicha restricción es menor. Estas restricciones están asociadas precisamente a las rigideces de los elementos de liga. De esta manera se tiene que $k_1 > k_2 > k_3 > \dots > k_n$. La contribución de los diferentes modos de vibrar es semejante al de todas las estructuras, de tal forma que los dos primeros modos contribuyen con más de un 95% del total. Un estudio preciso examinaría, digamos los tres primeros modos de vibrar, lo que incrementa sustancialmente la complejidad del análisis. Hunt y Priestley (1982) demostraron que el primer modo no es representativo del movimiento del líquido

3. El recipiente "esbelto" de Housner (1957)



y consideraron que los cinco primeros modos predicen resultados razonablemente precisos. En este trabajo se ha examinado el primer modo de vibrar y se establece la forma de tomar en cuenta los modos superiores en un análisis más preciso.

Housner (1957) presenta el análisis de las presiones convectivas a partir del cual se desarrollan las expresiones básicas para el cálculo.

Para examinar el primer modo de vibrar, considérese que existen restricciones tales que se forman membranas horizontales rígidas y libres de rotar, como se muestra en la ilustración 5.

Si u, v, w son las componentes de la velocidad del líquido en los sentidos x, y, z las restricciones están descritas por:

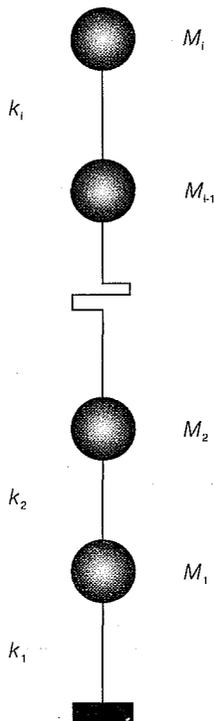
$$\frac{\partial}{\partial x} (ub) = -b \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}$$

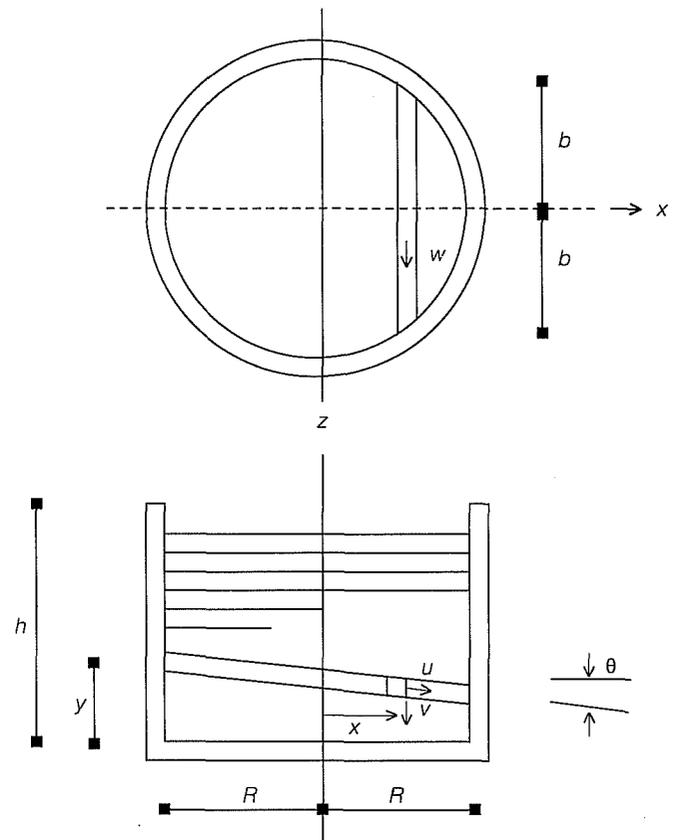
Es decir, el líquido en un punto dado (x, y) se mueve con velocidad uniforme $v = x \dot{\theta}$. La continuidad también se cumple:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

4. Representación sísmica del líquido



5. Disposición de membranas para presiones convectivas



Las ecuaciones anteriores pueden escribirse para la forma particular del recipiente considerado. Sin embargo, Housner (1957) desarrolló expresiones generales para tanques doblemente simétricos resultando:

$$u = -\frac{1}{b} \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} \int_{-R}^x x b dx$$

$$w = -z \frac{b'}{b} u$$

donde $b' = db/dx$ y $\dot{\theta} = d\theta/dt$.

Las energías cinética y potencial del líquido están dadas respectivamente por:

$$E_c = \frac{1}{2} \rho \int_0^h \left\{ l_z \dot{\theta}^2 + K \left(\frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} \right)^2 \right\} dy$$

$$E_p = \frac{1}{2} \rho g \theta^2 l_z$$

donde:

$$I_z = \int_A x^2 dA \quad (4)$$

es el momento de inercia y

$$K = 2 \int_{-R}^{+R} \frac{1}{b} \left(\int_{-R}^x b x dx \right)^2 \left(1 + \frac{b'^2}{3} \right) dx \quad (5)$$

Por el principio de Hamilton (Housner, 1961), se debe cumplir que:

$$\int_{t_1}^{t_2} (E_c - E_p) dt = 0$$

de donde se obtienen las ecuaciones para la oscilación libre y la frecuencia natural del modo fundamental de vibración:

$$\theta = \theta_0 \frac{\sinh \sqrt{\frac{I_z}{K}} h}{\sinh \sqrt{\frac{I_z}{K}} h} \sin \omega t \quad (6)$$

$$\omega^2 = g \sqrt{\frac{I_z}{K}} \tanh \sqrt{\frac{I_z}{K}} h \quad (7)$$

de manera que para un recipiente de forma específica es necesario evaluar solamente I_z y K .

La presión en el líquido está dada por:

$$p = -\rho \frac{\partial \theta''}{\partial x} \left\{ -\int \frac{Q}{b} dx + \frac{z^2}{2} \frac{b'}{b^2} Q \right\} \quad (8)$$

donde

$$Q = \int_{-R}^x x b dx \quad (9)$$

y $\theta'' = d^2\theta/dt^2$

El recipiente rectangular

Para un recipiente rectangular de ancho unitario, las condiciones de frontera son $\dot{u} = \dot{u}_0$ en $x = \pm L$, por lo cual (3) resulta:

$$\dot{u} = \dot{u}_0 \frac{\cosh \sqrt{3} \frac{x}{h}}{\cosh \sqrt{3} \frac{L}{h}} \quad (10)$$

la distribución de presiones impulsivas y la presión impulsiva total pueden obtenerse de (1) y (2) resultando

$$p = -\rho \dot{u}_0 h \sqrt{3} \left(\frac{y}{h} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{h} \right)^2 \right) \frac{\sinh \sqrt{3} \frac{x}{h}}{\cosh \sqrt{3} \frac{L}{h}} \quad (11)$$

$$P = -\frac{\rho \dot{u}_0 h^2}{\sqrt{3}} \frac{\sinh \sqrt{3} \frac{x}{h}}{\cosh \sqrt{3} \frac{L}{h}} \quad (12)$$

mientras la presión en el fondo del tanque puede calcularse como:

$$P_f = -\rho \dot{u}_0 h \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sinh \sqrt{3} \frac{x}{h}}{\cosh \sqrt{3} \frac{L}{h}} \quad (13)$$

y la fuerza de presión total actuante sobre la pared resulta:

$$P_T = -\frac{\rho \dot{u}_0 h^2}{\sqrt{3}} \tanh \sqrt{3} \frac{L}{h} \quad (14)$$

actuando a una distancia $h_0 = 3 h/8$ sobre el fondo.

La fracción de líquido sujeta rígidamente a las paredes es, según Housner (1957): $(2 P)/(2 L h \rho \dot{u}_0)$ de la masa líquida total M , por lo cual resulta:

$$M_0 = M \frac{\tanh \sqrt{3} \frac{L}{h}}{\sqrt{3} \frac{L}{h}} \quad (15)$$

El momento flexionante total ejercido sobre el fondo está dado por:

$$M_f = \int_{-L}^{+L} p_f x dx$$

resultando

$$M_f = -\rho \dot{u}_0 h^2 L \left[1 - \frac{\tanh \sqrt{3} \frac{L}{h}}{\sqrt{3} \frac{L}{h}} \right] \quad (16)$$

En el caso de las oscilaciones libres del líquido para el tanque rectangular se obtiene

$$\theta = \theta_n \frac{\operatorname{senh} \sqrt{\frac{5}{2}} \frac{y}{L}}{\operatorname{senh} \sqrt{\frac{5}{2}} \frac{h}{L}} \operatorname{sen} \omega t \quad (17)$$

$$\omega^2 = \sqrt{\frac{5}{2}} \frac{g}{L} \tanh \sqrt{\frac{5}{2}} \frac{h}{L} \quad (18)$$

La presión en el líquido resulta:

$$p = -\frac{\rho L^3}{2} \left[\frac{x}{L} - \frac{1}{3} \left(\frac{x}{L} \right)^3 \right] \frac{d\theta''}{dy} \quad (19)$$

la cual evaluada en la pared del recipiente ($x = L$) es:

$$P_p = \frac{\rho L^2}{3} \sqrt{\frac{5}{2}} \frac{\cosh \sqrt{\frac{5}{2}} \frac{y}{L}}{\operatorname{senh} \sqrt{\frac{5}{2}} \frac{h}{L}} \omega^2 \theta_n \operatorname{sen} \omega t \quad (20)$$

de donde la fuerza total de presión en la pared es:

$$P = \frac{\rho L^3}{3} \omega^2 \theta_n \operatorname{sen} \omega t \quad (21)$$

Housner (1957) observó que la fuerza total ejercida sobre el tanque por el líquido es la misma que la producida por una masa equivalente M_1 montada elásticamente, como se indica en la ilustración 6.

Si M_1 oscila con desplazamiento x_1 , la fuerza contra el tanque y la energía cinética de la masa son respectivamente:

$$x_1 = A_1 \operatorname{sen} \omega t$$

$$F_1 = -M_1 A_1 \omega^2 \operatorname{sen} \omega t$$

$$E_c = \frac{1}{2} M_1 A_1^2 \omega^2 \operatorname{sen}^2 \omega t$$

Comparando estas expresiones con las correspondientes al líquido oscilante se obtiene:

$$A_1 = \theta_n \frac{h}{\sqrt{\frac{5}{2}} \frac{h}{L} \tanh \sqrt{\frac{5}{2}} \frac{h}{L}} \quad (22)$$

$$M_1 = M \left[\frac{1}{3} \sqrt{\frac{5}{2}} \frac{L}{h} \tanh \sqrt{\frac{5}{2}} \frac{h}{L} \right] \quad (23)$$

y la elevación de M_1 sobre el fondo del tanque, obtenida por igualación de momentos resulta:

$$h_1 = h \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{2}} \frac{h}{L} \tanh \sqrt{\frac{5}{2}} \frac{h}{L}} \right) \quad (24)$$

La rigidez con que M_1 está unida al tanque se obtiene considerando un oscilador simple y a partir de su frecuencia y periodo naturales de vibrar, resultando:

$$K_1 = \frac{5}{6} \frac{g}{h} \tanh^2 \sqrt{\frac{5}{2}} \frac{h}{L} M \quad (25)$$

Con lo anterior se ha concluido que el efecto total del líquido sobre el recipiente es el mismo que el producido por un sistema de una masa fija y una serie de masas montadas elásticamente M_2, M_3 , etcétera.

Las fórmulas para los modos más altos ($n = 3, 5$, etc.) son las mismas que para el primer modo si se reemplaza L con L/n . La respuesta de un sistema como el de la ilustración 6 sujeto a aceleración horizontal puede calcularse fácilmente.

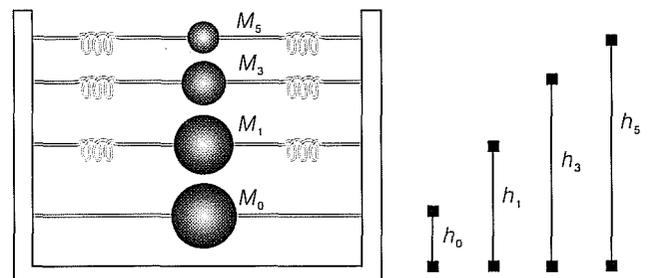
Evaluando (19) en $y = h$ es posible obtener el desplazamiento de la superficie libre, resultando que la presión sobre el plano $y = h$ es:

$$p_h = \frac{\rho L^3}{2} \left[\frac{x}{L} - \frac{1}{3} \left(\frac{x}{L} \right)^3 \right] \omega^2 \theta_n \operatorname{sen} \omega t \quad (26)$$

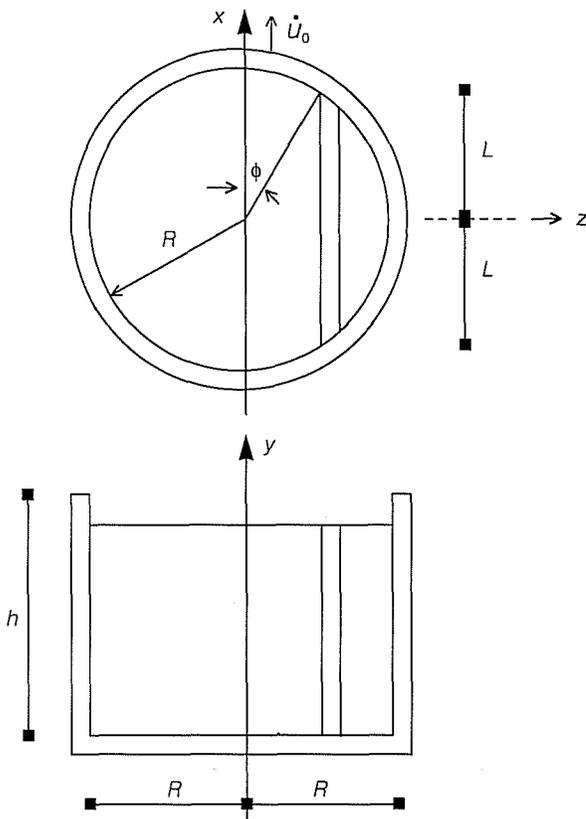
de donde la profundidad d del líquido sobre este plano resulta:

$$d = \frac{p_h}{\rho g} \quad (27)$$

6. Sistema equivalente para un tanque



7. El tanque cilíndrico. Nomenclatura



El recipiente cilíndrico

Considérese el tanque mostrado en la ilustración 7, que está sujeto a una aceleración horizontal \dot{u}_0 y hagamos que el líquido esté restringido entre membranas paralelas al eje x .

Jacobsen (1949) demostró que un impulso \dot{u}_0 no genera una componente de velocidad w en el líquido, así que las membranas no son realmente una restricción y cada *rebanada* de líquido puede ser tratada como un esbelto tanque rectangular y aplicar las expresiones para ese caso. Introduciendo la notación de la ilustración 7 se llega a las expresiones siguientes.

La presión en la pared es:

$$p_p = -\rho \dot{u}_0 h \left[\frac{y}{h} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{h} \right)^2 \right] \sqrt{3} \cos \phi \tanh \frac{\sqrt{3}R}{h} \quad (28)$$

y la presión en el fondo del tanque resulta

$$p_i = -\rho \dot{u}_0 h \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sinh \sqrt{3} \frac{x}{h}}{\cosh \sqrt{3} \frac{R \cos \phi}{h}} \quad (29)$$

La fuerza resultante total sobre la pared es:

$$P_T = -\rho \dot{u}_0 \pi R^2 h \frac{\tanh \frac{\sqrt{3}R}{h}}{\frac{\sqrt{3}R}{h}} \quad (30)$$

con masa equivalente

$$M_0 = M \frac{\tanh \frac{\sqrt{3}R}{h}}{\frac{\sqrt{3}R}{h}} \quad (31)$$

a una altura $h_0 = 3h/8$ a fin de se igualen los momentos.

Las oscilaciones libres del líquido están descritas por:

$$\theta = \theta_n \frac{\sinh \sqrt{\frac{27}{8}} \frac{y}{R}}{\sinh \sqrt{\frac{27}{8}} \frac{h}{R}} \sin \omega t \quad (32)$$

$$\omega^2 = \sqrt{\frac{27}{8}} \frac{g}{R} \tanh \sqrt{\frac{27}{8}} \frac{h}{R} \quad (33)$$

la presión en el líquido esta descrita por:

$$p = -\frac{\rho R^3}{2} \left[\frac{x}{R} - \frac{1}{3} \left(\frac{x}{R} \right)^3 - \frac{1}{4} \frac{x}{R} \left(\frac{z}{R} \right)^2 \right] \frac{d\theta''}{dy} \quad (34)$$

de donde se obtiene que la presión sobre la pared es:

$$p_p = -\frac{\rho R^3}{3} \frac{\partial \theta''}{\partial y} \left[1 - \frac{\cos^2 \phi}{3} - \frac{\sin^2 \phi}{4} \right] \cos \phi \quad (35)$$

con

$$\frac{\partial \theta''}{\partial y} = - \left(\sqrt{\frac{27}{8}} \frac{1}{R} \frac{\cosh \sqrt{\frac{27}{8}} \frac{y}{R}}{\sinh \sqrt{\frac{27}{8}} \frac{h}{R}} \right) \theta_n \omega^2 \sin \omega t \quad (36)$$

y la fuerza resultante de presión sobre la pared es:

$$P = -\pi \frac{11}{48} \rho \omega^2 R^4 \theta_n \sin \omega t \quad (37)$$

asociadas a la masa equivalente M_1 , oscilando en un plano horizontal con movimiento $x_1 = A_1 \sin \omega t$.

$$M_1 = M \frac{1}{4} \left(\frac{11}{12} \right)^2 \sqrt{\frac{27}{8}} \frac{R}{h} \tanh \sqrt{\frac{27}{8}} \frac{h}{R} \quad (38)$$

$$A_1 = \theta_n \frac{\frac{12}{11} h}{\sqrt{\frac{27}{8}} \frac{h}{R} \tanh \sqrt{\frac{27}{8}} \frac{h}{R}} \quad (39)$$

localizada a una distancia sobre el fondo del tanque de:

$$h_1 = h \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\frac{27}{8}} \frac{h}{R} \tanh \sqrt{\frac{27}{8}} \frac{h}{R}} \right) \quad (40)$$

La rigidez con que M_1 esta sujeta al tanque resulta:

$$k_1 = \frac{27}{32} \left(\frac{11}{12} \right)^2 \frac{g}{h} \tanh^2 \sqrt{\frac{27}{8}} \frac{h}{R} M \quad (41)$$

La presión ejercida sobre el fondo del tanque resulta:

$$p_i = -\rho \omega^2 \sqrt{\frac{3}{8}} \frac{R^2}{\sinh \sqrt{\frac{27}{8}} \frac{h}{R}} \left[\frac{x}{R} - \frac{1}{3} \left(\frac{x}{R} \right)^3 - \frac{1}{4} \frac{x}{R} \left(\frac{z}{R} \right)^2 \right] \theta_n \sinh \omega t \quad (42)$$

Para el caso de un tanque elevado, el movimiento del líquido contenido responde a la aceleración del tanque, la cual a su vez depende de la aceleración del terreno y de las características de la estructura de apoyo. En este caso es posible introducir el sistema equivalente mostrado en la ilustración 8, en donde M'_0 es una masa equivalente e igual a la suma de la masa de la estructura de soporte y M_0 . Entonces, para el análisis de un tanque elevado se debe determinar a partir de las características de la estructura de apoyo y la aceleración del terreno, la aceleración a la cual se moverá el tanque y después aplicar las expresiones indicadas anteriormente.

En un tanque rígido completamente lleno, cubierto con una tapa rígida, toda la masa del líquido se mueve rígidamente con el tanque, sin embargo si existe un espacio entre la superficie libre del líquido y la tapa del tanque, las presiones ejercidas por el líquido serán

prácticamente iguales a las producidas con un superficie efectivamente libre. Jacobsen y Ayre (1951) encontraron que el espacio libre necesario para que un tanque sea considerado como de superficie libre es aproximado a 2% de la profundidad del líquido.

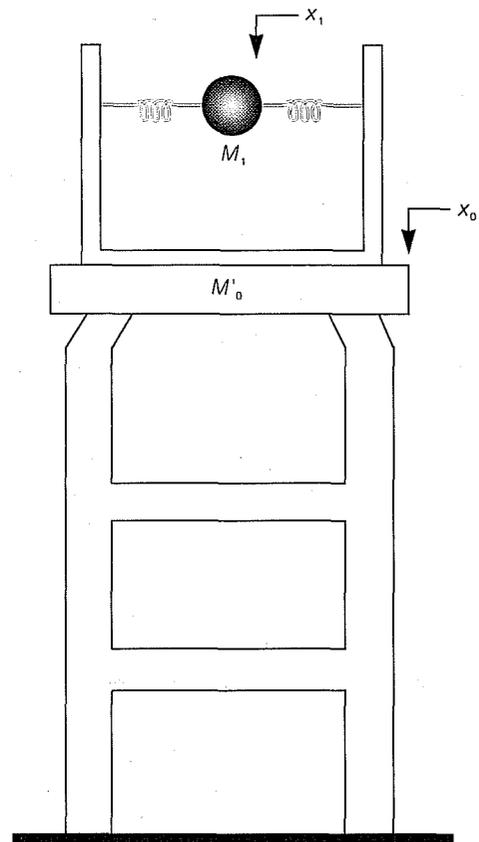
Ejemplos de aplicación

Como primera aplicación considérese un tanque rectangular de 20 m de ancho, 30 m de largo y 6 m de tirante sujeto a una aceleración $\dot{u}_0 = 0.2g$ durante 1/5s y $\dot{u}_0 = -0.2g$ durante el siguiente 1/5s. De acuerdo a esto, el tanque tiene velocidad $v = 0.3924$ m/s con desplazamiento $x = 0.04$ m después del primer impulso, mientras que con el segundo impulso regresa a su posición inicial.

Considerando que \dot{u}_0 es paralela a la pared de 30 m la distribución de presiones impulsivas estará dada por (11) evaluada en $x = L$:

$$p_p = 2077.74 \left[\frac{y}{6} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{6} \right)^2 \right]$$

8. Sistema equivalente para un tanque elevado



de donde la fuerza total (15) resulta $P = 165600$ kg. Del análisis de presiones convectivas se obtiene (18) una frecuencia $\omega = 0.761$ rad/s y un periodo $T = 8.3$ s. La masa asociada según (23) es $M_1 = 0.738 M$. Ya que $8.3s \gg 0.2s$ el efecto de la aceleración $\dot{u}_0 = 0.2g$ es generar un desplazamiento inicial de 0.04 m. Entonces $A_1 = 0.04 \text{ sen } \omega t$ y $\theta_h = 0.0024$ rad de acuerdo a la expresión (22), por lo que la fuerza debida a la oscilación de líquido es $P = 6272 \text{ sen } \omega t$, ya que $P = M_1 A_1 \omega^2 \text{ sen } \omega t$ según se estableció anteriormente. La presión en la pared ($x = L$) está dada por (26) resultando $P_p = 159.4 \text{ sen } \omega t$, la cual para $t = 0.2s$ resulta $P_p = 24.17 \text{ kg/m}^2$ con una sobre elevación de la superficie libre de $d = 2.4$ cm según (27).

En este caso, la variación de la superficie libre del líquido es pequeña, pero por las características del recipiente podría ser importante; Rinne (1967) reportó evidencia de movimientos verticales de hasta 4.20 m en la superficie libre de un tanque de 30 m de diámetro durante el temblor de Alaska, EUA, de 1964.

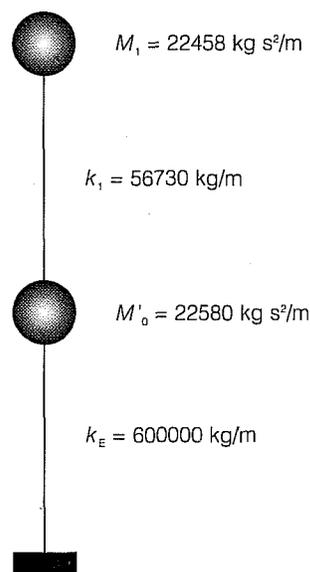
En resumen, durante el primer $1/5s$ el líquido ejerce una fuerza de 165.6 Ton contra la pared en la dirección x negativa, durante el siguiente $1/5s$ esta misma fuerza actúa en la dirección x positiva y después la fuerza contra la pared es la debida a la oscilación del líquido, cuya amplitud es de 6.3 Ton con un periodo de $8.3s$, y durante la cual la amplitud máxima de la superficie libre del líquido es 2.4 cm sobre la horizontal.

Considérese ahora, como segunda aplicación, un tanque cilíndrico de 20 m de diámetro y 8 m de tirante, sujeto a una aceleración horizontal de $\dot{u}_0 = 0.1g$ durante $0.5s$. Con estos datos, el tanque estará sujeto a una velocidad de 0.49 m/s y un desplazamiento máximo de $x = 0.123$ m. La distribución de la presión impulsiva resulta de (28):

$$p_p = 1385.64 \left[\frac{y}{8} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{8} \right)^2 \right] \tanh(2.165 \cos \phi)$$

de donde la fuerza total de presión resulta $P = 113097$ kg ya que $P = M_0 \dot{u}_0$. Se obtiene también una frecuencia $\omega = 1.273$ rad/s y un periodo $T = 4.9s$ dadas por (33). De (38) la masa asociada es $M_1 = 0.434 M$ y $A_1 = 0.123 \text{ sen } \omega t$ con $\theta_h = 0.019$ rad por lo que la fuerza total convectiva (37) es $P = 22545 \text{ sen } \omega t$. La presión en la pared resulta según (35) y (36) $p_p = 67.96 \text{ kg/m}^2$ con una sobre elevación de la superficie libre, según (27) de $d = 6.8$ cm. Entonces en resumen, durante el primer $0.5s$, el líquido ejerce una fuerza de 113.1 Ton contra la pared del tanque en dirección x , después de este tiempo, la única fuerza que actúa sobre las paredes es la fuerza debida a la oscilación del líquido, cuya amplitud es de 22.5 Ton con un periodo de $4.9s$.

9. Sistema para análisis sísmico de un tanque elevado



Durante esta oscilación la amplitud máxima de la superficie libre del líquido es de 6.8 cm sobre la horizontal.

Considérese finalmente un tanque cilíndrico elevado de 12 m de diámetro y 4 m de tirante. La masa del líquido es $46\ 115 \text{ kg s}^2/\text{m}$ y las masas equivalente que consideran el efecto impulsivo y el de oscilación resultan respectivamente de (31) y (38) $M_0 = 0.381 M$ y $M_1 = 0.487 M$. La rigidez del resorte que sujeta a M_1 está dada por (41) y resulta $k_1 = 56730 \text{ kg/m}$. Suponiendo que la estructura de apoyo del tanque tiene una masa $M_E = 5000 \text{ kg s}^2/\text{m}$ y una rigidez $k_E = 600000 \text{ kg/m}$ se puede realizar el análisis sísmico del sistema mostrado en la ilustración 9, tomando $M'_0 = M_0 + M_E$.

Aplicando el método de Hölzer (Green, 1981) para la determinación de los modos naturales de vibrar del sistema se obtiene para el primer modo: $\omega = 1.513$ rad/s, $T = 4.15s$ con desplazamientos relativos $u_0 = 1.00$ y $u_1 = 10.66$ de las masas M_0 y M_1 respectivamente y coeficiente de participación $CP = 0.5919$. Para el segundo modo resulta $\omega = 5.415$ rad/s, $T = 1.16s$, con desplazamientos relativos $u_0 = 1.00$ y $u_1 = -0.0943$ y un coeficiente de participación $CP = 0.4081$. Finalmente, con los datos anteriores, se procede a la obtención de los elementos mecánicos para el diseño.

Conclusiones

Se ha presentado en este trabajo, una metodología simplificada para determinar la distribución de presiones y las fuerzas de presión sobre las paredes y el fondo de tanques de almacenamiento, rectangulares y

cilíndricos, tanto superficiales como elevados, basada en los estudios de G. W. Housner (1957) y M. A. Haroun (1980), en la cual se evita la solución tradicional de la ecuación de Laplace. La formulación resulta adecuada para el ingeniero práctico interesado en las soluciones simples con resultados satisfactorios, ya que no es indispensable la utilización de una computadora.

Se ha observado, mediante la comparación de los resultados obtenidos con las expresiones presentadas en este trabajo con ejemplos realizados por otros autores, que estas formulaciones sobrestiman en un 4% como máximo los valores reales, lo cual indica que el análisis es confiable para el diseño y la revisión de tanques de almacenamiento en la ingeniería civil (Ramírez, 1987).

Con base en los estudios conocidos hasta la fecha, se puede establecer, aunque sin certeza, que la resonancia no es un problema en ningún caso, debido a la naturaleza aleatoria, alta frecuencia y corta duración de las aceleraciones sísmicas (Hunt y Priestley, 1978, 1982).

En el trabajo se presentan soluciones sólo para el caso de paredes efectivamente rígidas (como el concreto reforzado) y para tanques que contengan líquidos de baja viscosidad, de manera que la aplicación de estas expresiones en los casos de tanques de acero y de depósitos de líquidos viscosos no son recomendables.

Se ha considerado, solamente la respuesta a aceleraciones horizontales, sin embargo en un análisis más depurado se deberá incluir la componente vertical de la aceleración (Marchaj, 1979) (Haroun, 1980, 1984). Por otro lado, para obtener la respuesta de un tanque de almacenamiento a un acelerograma sísmico específico se recomiendan los trabajos de Hunt y Priestley (1978, 1982).

La aplicación de esta formulación resulta recomendable para cálculos simplificados en la ingeniería práctica o para obtener estimados en el proceso de predimensionamiento de los elementos estructurales.

Notación

A	amplitud del movimiento
E_c	energía cinética del líquido
E_p	energía potencial del líquido
h	profundidad del líquido dentro del tanque
h'	altura parcial en un tanque "esbelto"
h_0	elevación de la masa M_0 sobre el fondo del tanque
h_1	elevación de la masa M_1 sobre el fondo del tanque

I_z	momento de inercia de la masa líquida
K	nombre asignado a la expresión (5)
k	en los ejemplos, rigidez
L	mitad del ancho del tanque rectangular
M_1	masas en el sistema equivalente
M'_0	masa equivalente para un tanque elevado
p	presión en el líquido
p_p	presión del líquido sobre la pared
p_f	presión del líquido sobre el fondo del tanque
p_n	presión del líquido sobre el plano $y = h$
P	fuerza total de presión
Q	nombre asignado a la expresión (9)
R	para un tanque de cualquier forma, es la mitad del ancho. Para el tanque cilíndrico es el radio
t	tiempo
u, v, w	componentes de la velocidad en las direcciones x, y, z
$\dot{u}, \dot{v}, \dot{w}$	derivadas de u, v, w con respecto al tiempo, es decir, aceleraciones
\dot{u}_0	aceleración a que está sujeto el tanque
θ	ángulo que forma con la horizontal una membrana del líquido excitado
θ_n	θ evaluado en la superficie libre
ϕ	ángulo que una <i>rebanada de líquido</i> forma con el eje x , en un tanque cilíndrico
ρ	densidad del líquido

Recibido: septiembre, 1995

Aprobado: enero, 1996

Referencias

- Clough, D.P. 1977. Experimental evaluation of seismic design methods for broad cylindrical tanks. *Report No. UCB/EERC 77/10*, Earthquake Engineering Research Center, Univ. of California, Berkeley. 273 pp.
- Green, N. B. 1981. *Earthquake resistant building design and construction*. New York: Van Nostrand Reinhold Company.
- Graham, E.W. y A. M. Rodríguez. 1952. Characteristics of fuel motion which affect airplane dynamics. *Journal of Applied Mechanics*, 19(3):381-388.
- Haroun, M.A. 1980. *Dynamic analyses of liquid storage tanks*. Earthquake Engineering Research Laboratory, California Institute of Technology, Pasadena, California.
- Haroun, M.A. 1984. Stress analysis of rectangular walls under seismically induced hydrodynamic loads. *Bulletin of the Seismic Society of America*, 74(3):1031-1041.
- Housner, G.W. 1954. *Earthquake pressures on fluid containers*. California Institute of Technology, Pasadena, California.
- Housner, G.W. 1957. Dynamic pressures on accelerated fluid containers. *Bulletin of the Seismic Society of America*, 47:15-35.

- *Housner, G.W. 1961. "Applied dynamics".
- Housner, G.W. 1963. The dynamic behaviour of water tanks, *Bulletin of the Seismic Society of America*, 53(2):381-387.
- Hunt, B. y M.J.N. Priestley. 1978. Seismic water waves in a storage tank. *Bulletin of the Seismic Society of America*, 68(2):487-489.
- Hunt, B. y M.J.N. Priestley. 1982. Seismic response of elevated water reservoirs. *Bulletin of the New Zealand Society for Earthquake Engineering*, 15(2):68-76.
- Jacobsen, L.S. 1949. Impulsive hydrodynamics of fluids inside a cylindrical tank and of fluid surrounding a cylindrical pier. *Bulletin of the Seismic Society of America*, 33(3):189-204.
- Jacobsen, L.S. y R.S. Ayre. 1951. Hydrodynamic experiment with rigid cylindrical tanks subjected to transient motions. *Bulletin of the Seismic Society of America*, 41(4):313-346.
- Marchaj, T.J. 1979. Importance of vertical accelerations in the design of the liquid-containing tank. *Proceedings of the 2nd. U.S. National Conference on Earthquake Engineering*, Stanford California.
- Ramírez-Orozco, A. I. 1987. Efecto de la presión hidrodinámica en tanques de almacenamiento debida a sismo. *Tesis profesional*, Esc. Ingeniería Civil, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Morelia, Mich.
- Rinne, J. E. Oil storage tanks. *The Prince William Sound, Alaska, Earthquake of 1964 and Aftershocks, Vol. 2, Part A*. U. S. Dept. of Commerce.
- Werner, P.W. y Sundquist, K.J. 1943. On hydrodynamic earthquake effects. *Transactions of the American Geophysical Union*, 30(5): 636-657.
- Westergaard, H. M. 1931. Water pressures on dams during earthquakes. *Proceedings of the American Society of Civil Engineers*, ASCE, 57:1031.

Abstract

Ramírez, A.I. "Hydrodynamic Pressure in Storage Tanks Due to Horizontal Acceleration" *Hydraulic Engineering in Mexico (in Spanish)*. Vol XI. Num. 3, pages 35-45, September-December, 1996.

Storing water and providing it with a head are indispensable elements for a constant water supply. At the same time, the safety of the population living near the storage tank must be safeguarded. A simplified solution to obtain explicit expressions for the pressure distribution and forces against the walls and bottom of elevated rectangular and cylindrical tanks (doubly symmetrical) produced by horizontal acceleration (main component of earthquakes), based on G. W. Housner's studies is presented. A method for the hydrodynamic analysis of elevated storage tanks is also introduced. The expressions obtained are easy to apply and are particularly important for civil engineers interested in simple solutions and satisfactory results for storage tanks subjected to horizontal accelerations.

Key words: Seismic analysis, storage tanks, elevated tanks, horizontal acceleration, hydrodynamic pressure, pressure distribution.