

Artículo publicado en el Repositorio Institucional del IMTA

<i>Título</i>	Propiedades hidrodinámicas efectivas del suelo en el riego por melgas.
<i>Autor / Adscripción</i>	Felipe Zataráin Carlos Fuentes Instituto Mexicano de Tecnología del Agua  Luis Rendón Comisión Nacional del Agua  Michel Vauclin Laboratoire d'Etude des Transferts en Hydrologie et Environnement
<i>Publicación</i>	Ingeniería Hidráulica en México, 18(3): 5-15
<i>Fecha de publicación</i>	2003
<i>Resumen</i>	Se estudia la variabilidad espacial de las características hidrodinámicas en el suelo de Montecillo, México, a través de factores de escala. Los factores de escala se calculan a través de la conductividad hidráulica a saturación determinada con la función de infiltración de Green y Ampt (1911), a partir de 21 pruebas de infiltración realizadas en puntos espaciados cada cinco metros en el sentido longitudinal de una melga. También se analiza la influencia de la variabilidad espacial en la fase de avance del riego por melgas. La fase de avance se modela con el modelo hidrológico de Lewis y Milne (1938) y la variabilidad espacial se estudia a través de simulación Montecarlo, interpolación krige y simulación estocástica.
<i>Identificador</i>	<a href="http://hdl.handle.net/123456789/1259">http://hdl.handle.net/123456789/1259</a>

# Propiedades hidrodinámicas efectivas del suelo en el riego por melgas

Felipe Zataráin  
Carlos Fuentes

Instituto Mexicano de Tecnología del Agua

Luis Rendón

Comisión Nacional del Agua

Michel Vauclin

Laboratoire d'Etude des Transferts en Hydrologie et Environnement

*Se estudia la variabilidad espacial de las características hidrodinámicas en el suelo de Montecillo, México, a través de factores de escala. Los factores de escala se calculan a través de la conductividad hidráulica a saturación determinada con la función de infiltración de Green y Ampt (1911), a partir de 21 pruebas de infiltración realizadas en puntos espaciados cada cinco metros en el sentido longitudinal de una melga. También se analiza la influencia de la variabilidad espacial en la fase de avance del riego por melgas. La fase de avance se modela con el modelo hidrológico de Lewis y Milne (1938), y la variabilidad espacial se estudia a través de simulación Montecarlo, interpolación krige y simulación estocástica. Mediante el análisis se muestra que la fase de avance en el riego por melgas puede describirse por medio de características hidrodinámicas únicas e independientes de las condiciones en los límites.*

**Palabras clave:** variabilidad espacial de la infiltración, escalamiento.

## Introducción

La caracterización hidrodinámica del suelo para la modelación del riego por melgas se enfrenta a la variabilidad espacial de las propiedades del suelo. En efecto, el suelo es un medio complejo y la caracterización detallada de los parámetros que afectan el flujo del agua difícilmente puede realizarse de manera determinista, por lo que en ocasiones se requiere del uso de métodos estocásticos.

Cuando las propiedades estadísticas de los parámetros aleatorios pueden inferirse de aquellos medidos, es posible resolver la ecuación estocástica de flujo numéricamente por simulación Montecarlo; los

resultados se analizan de forma estadística. La simulación Montecarlo es conceptualmente sencilla y aplicable a un amplio rango de problemas de flujo. Sin embargo, algunas aplicaciones pueden tener una alta demanda de tiempo de cómputo y almacenamiento para cada una de las realizaciones y además se requiere de un gran número de simulaciones para asegurar que los momentos de salida converjan a sus valores teóricos (Neuman *et al.*, 1997).

Por otra parte, cuando se usan modelos deterministas con valores medios de los parámetros, las salidas son diferentes a la media condicional que se obtiene con la simulación Montecarlo. Para solucionar este problema, la investigación se ha centrado sobre los llamados

parámetros efectivos o equivalentes que deberán ser usados en lugar de los valores medios. La metodología más utilizada ha sido la del escalamiento de las propiedades.

Algunos autores (Russo y Bresler, 1980) señalan que los factores de escala para la curva de retención y la conductividad hidráulica saturada no son necesariamente idénticos; sin embargo, la posibilidad de caracterizar las propiedades hidrodinámicas del suelo por un solo conjunto de factores de escala es deseable para simular y predecir el flujo del agua en suelos espacialmente variables (Tuli et al., 2001). Si se acepta el concepto de medios similares y con base en la validez de las ecuaciones de capilaridad y Poiseuille, se espera igualdad en los factores de escala de la curva de retención y la conductividad hidráulica saturada.

Los objetivos del presente trabajo son el análisis de la variabilidad espacial de la infiltración en una melga y su influencia en la posición del frente de avance, y establecer algunas condiciones para que la posición del frente de avance pueda ser representado por propiedades hidrodinámicas "efectivas" del suelo; es decir, independientes del gasto de riego.

El segundo objetivo es de fundamental importancia para la caracterización del suelo con parámetros efectivos a partir de la curva de avance experimental.

### La infiltración

Para el estudio de la variabilidad espacial de la infiltración se utiliza, sin pérdida de generalidad, el modelo de Green y Ampt (1911), el cual puede deducirse a partir de la ecuación de Richards (1931) (unidimensional vertical) cuando la difusibilidad hidráulica definida por  $D(\theta) = K(\theta)d\psi/d\theta$ , se asimila a una densidad de Dirac y la función de conductividad hidráulica  $K(\theta)$  es continua (Parlange et al., 1982, 1985), donde  $\theta$  es el contenido volumétrico de humedad [ $L^3L^{-3}$ ] y  $\psi$  es el potencial de presión del agua en el suelo [ $L$ ].

#### El modelo de Green y Ampt

El modelo de Green y Ampt (1911) es representado por la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$\frac{dl}{dt} = K_s \left[ 1 + \frac{(h + h_f)(\theta_s - \theta_o)}{l} \right] \quad (1)$$

donde  $l$  es la lámina infiltrada acumulada [ $L$ ];  $t$ , el tiempo [ $T$ ];  $K_s$ , la conductividad hidráulica a saturación [ $LT^{-1}$ ];  $\theta_s$  y  $\theta_o$ , el contenido de humedad a saturación e inicial,

respectivamente [ $L^3L^{-3}$ ];  $h_f$ , la succión en el frente de humedecimiento (flujo en pistón) [ $L$ ], y  $h$ , la lámina de agua sobre la superficie del suelo (presión positiva) [ $L$ ].

La integración de la ecuación 1 con la condición  $l = 0$  en  $t = 0$  conduce a:

$$l = K_s t + \lambda \ln \left( 1 + \frac{l}{\lambda} \right) \quad (2)$$

donde  $\lambda = (h + h_f)(\theta_s - \theta_o)$

La ecuación 2 presenta dos parámetros desconocidos:  $h_f$  y  $K_s$ . Los parámetros  $\theta_s$ ,  $\theta_o$  y  $h$  son medidos. Si se cuentan con  $N_s$  pruebas de infiltración se deben identificar  $2N_s$  parámetros. El análisis de la variabilidad espacial de estos parámetros puede simplificarse con la utilización de la teoría de los medios similares de Miller y Miller (1956) (medios fractales autosimilares).

#### Factores de escala

De acuerdo con la teoría de los medios similares de Miller y Miller (1956), los parámetros  $K_s$  y  $\lambda$  de la ecuación 2 de un suelo cualquiera están relacionados con los parámetros respectivos del suelo de referencia por:

$$K_{sj} = r_j^2 K_{s*} \quad ; \quad \lambda_j = \frac{\lambda_*}{r_j} \quad (3)$$

donde el subíndice  $j$  identifica a los suelos  $j = 1, 2, \dots, N_s$ , donde  $N_s$  es el número de pruebas de infiltración y  $r_j$  los factores de escala; los parámetros con asterisco corresponden al suelo de referencia.

De la ecuación 3 se infiere:

$$K_{sj} = \lambda_j^2 = K_{s*} \lambda_*^2 = \Omega_f \quad (4)$$

donde el parámetro  $\Omega_f$  [ $L^3T^{-1}$ ] es una constante característica de la región estudiada.

La ecuación 4 permite reducir el número de parámetros desconocidos de  $2N_s$  a  $N_s + 1$ . Los parámetros se pueden obtener minimizando la suma de los cuadrados de los errores (SCE) entre los valores experimentales y los proporcionados por la ecuación de Green y Ampt:

$$SCE(K_{s1}, K_{s2}, \dots, K_{sN_s}; \Omega_f) = \sum_{j=1}^{N_s} \sum_{i=1}^{N_j} [l_{ij} - l(t_{ij}; K_{sj}, \Omega_f)]^2 \quad (5)$$

donde  $N_j$  es el número de puntos experimentales en la prueba de infiltración  $j$ .

Fuentes (1992) sugiere que el suelo de referencia sea construido de manera que la conductividad hidráulica a saturación del suelo de referencia sea igual a la media geométrica:

$$\ln(K_{s*}) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \ln(K_{sj}) \quad ; \quad \mu_\tau = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \ln(r_j) = 0 \quad (6)$$

donde  $\mu_\tau$  es la media aritmética de los logaritmos de los factores de escala  $\tau = \ln(r)$ .

De la ecuación 3 se deduce la fórmula para calcular los factores de escala:

$$r_j = \sqrt{\frac{K_{sj}}{K_{s*}}} \quad (7)$$

De la teoría de los medios similares se deducen las relaciones entre la curva de infiltración acumulada del suelo  $j$ -ésimo ( $t_j, I_j$ ) y la del suelo de referencia ( $t_*, I_*$ ):

$$t_* = r_j^3 t_j \quad ; \quad I_* = r_j I_j \quad (8)$$

Debido a que la conductividad hidráulica a saturación se asume como independiente de la carga de agua sobre la superficie del suelo y de la condición inicial, el escalamiento proporcionado por la ecuación 4 debe ser escrito como:

$$K_{sj} h_{fj}^2 = K_{s*} h_{f*}^2 = \Omega \quad (9)$$

donde el nuevo parámetro regional  $\Omega$  se puede estimar considerando la definición del parámetro  $\lambda$ , a partir de:

$$\left(\sqrt{K_{s*}}\right) h_{f*} = \sqrt{\Omega_f} / (\theta_s - \theta_o) - \left(\sqrt{K_{s*}}\right) h = \sqrt{\Omega}$$

#### La distribución probabilista de los factores de escala

De acuerdo con resultados experimentales reportados en la literatura sobre la distribución de la variable  $\ln(K_s)$  (e.g. Nielsen *et al.*, 1973; Warrick y Amoozegard-Fard, 1979; Sharma *et al.*, 1980; Vauclin, 1982) se puede suponer que la variable  $\tau = \ln(r)$  sigue una distribución de Gauss. La consideración de la normalización definida por la ecuación 6 permite definir la densidad de probabilidad  $p(\tau)$  y la probabilidad acumulada  $F(\tau)$  gaussianas, respectivamente, como sigue:

$$p(\tau) = \frac{1}{\sigma_\tau \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{\tau^2}{2\sigma_\tau^2}\right] \quad (10)$$

$$F(\tau) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \operatorname{erf}\left(\frac{\tau}{\sigma_\tau \sqrt{2}}\right) \right] \quad (11)$$

donde  $\sigma_\tau$  es la desviación estándar del logaritmo de los factores de escala y  $\operatorname{erf}(x)$  denota la función error.

#### Propiedades medias de los parámetros

Para calcular la media de las propiedades es importante introducir el valor medio de  $r^n$  (momento de orden  $n$ ), definido por:

$$\langle r^n \rangle = E\{r^n\} = \int_{-\infty}^{\infty} r^n p(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{n\tau} p(\tau) d\tau \quad (12)$$

donde  $E$  es el operador esperanza matemática.

Con la función de distribución de Gauss (ecuación 10) se obtiene:

$$\langle r^n \rangle = \exp\left[\frac{n^2 \sigma_\tau^2}{2}\right] \quad (13)$$

#### La media estocástica de la infiltración

La media estocástica de la infiltración se define por:

$$I(t) = E\{I(t; r)\} = \int_{-\infty}^{\infty} I(t; e^\tau) p(\tau) d\tau \quad (14)$$

Con la función de distribución de Gauss definida por la ecuación 10 y con el cambio de variable  $\eta = \tau / (\sigma_\tau \sqrt{2})$ , se puede escribir la ecuación 14 en la forma:

$$I(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} I\left[t; \exp\left(\sqrt{2}\sigma_\tau \eta\right)\right] \exp(-\eta^2) d\eta \quad (15)$$

El cálculo de la integral se facilita con la utilización de los polinomios de Hermite (Abramowitz y Stegun, 1970):

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-x^2) dx \approx \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) \quad (16)$$

donde  $w_i$  y  $x_i$  son, respectivamente, los factores de peso y las raíces de los polinomios.

*La estructura espacial de la infiltración*

Para llevar a cabo la interpolación por *krigeado* se obtiene el semivariograma del logaritmo de los factores de escala. Para la modelación del semivariograma se utiliza la hipótesis markoviana de primer orden:

$$\rho(h) = a \exp(-h/\lambda_m) \quad (17)$$

y

$$\gamma(h) = \sigma^2 [1 - \rho(h)] \quad (18)$$

donde  $\gamma(h)$  es el semivariograma;  $\rho(h)$ , la función de autocorrelación;  $h$ , la separación entre puntos de observación;  $a$ , el alcance;  $\lambda_m$ , la longitud de autocorrelación, y  $\sigma^2$ , la variancia.

**Información experimental y escalamiento**

*Pruebas de infiltración*

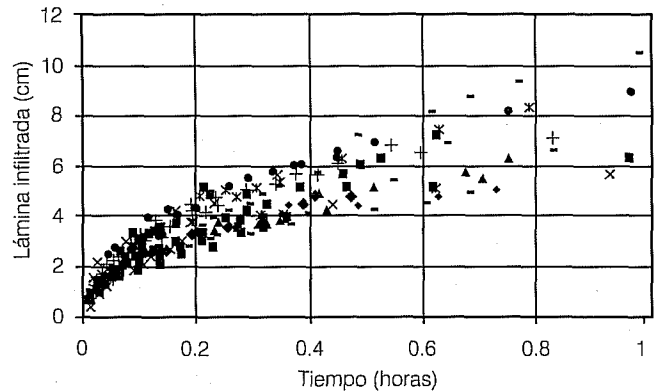
Los experimentos se realizaron en un suelo de textura esencialmente arenosa ubicado en Montecillo, México. En una melga de cien metros de longitud, cinco metros de ancho y pendiente longitudinal  $J_o = 0.002 \text{ m m}^{-1}$ ; se realizaron 21 pruebas de infiltración, una cada cinco metros a lo largo de la melga, utilizando el método del doble cilindro, con 0.35 y 1.45 m de diámetro interior y exterior, respectivamente. La evolución en el tiempo de la lámina infiltrada se muestra en la ilustración 1, en donde se pueden observar diferencias de hasta cuatro centímetros en una hora y setenta centímetros en un día.

*Los factores de escala*

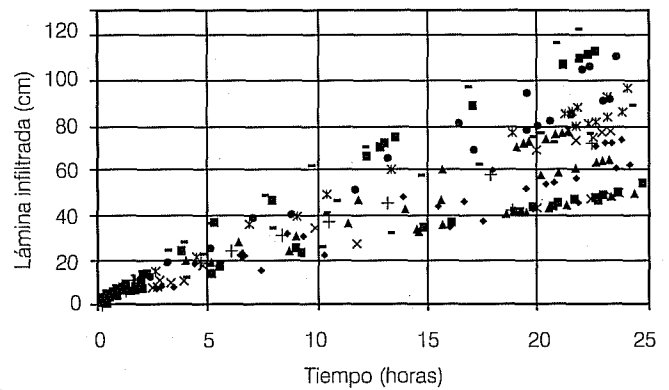
Durante las pruebas de infiltración se determinaron experimentalmente los siguientes valores medios: la carga sobre la superficie  $h = 8.5 \text{ cm}$ ; el contenido volumétrico de humedad a saturación  $\theta_s = 0.4865 \text{ cm}^3 \text{ cm}^{-3}$ , y el contenido volumétrico de humedad inicial  $\theta_o = 0.2366 \text{ cm}^3 \text{ cm}^{-3}$ .

En el cuadro 1 se reportan los resultados de la regresión realizada con la ecuación 5, utilizando los datos experimentales de las 21 pruebas de infiltración. Los parámetros del suelo de referencia son  $K_{s*} = 2.33 \text{ cm/h}$  y  $\lambda_* = 7.71 \text{ cm}$ . Los parámetros regionales resultan

**Ilustración 1. Lámina infiltrada acumulada en función del tiempo, observada en 21 puntos, separados cada cinco metros a lo largo de una melga de cinco metros de ancho y cien metros de largo en Montecillo, México.**



(a) Una hora



(b) Un día

$$\Omega_r = 138.5 \text{ cm}^3/\text{h} \text{ y } \Omega = 5.84 \text{ cm}^3/\text{h}.$$

En la ilustración 2 se muestran los datos experimentales escalados con la ecuación 8 y la función de Green y Ampt (ecuación 2) con los parámetros del suelo de referencia. El excelente ajuste (coeficiente de determinación:  $R^2 = 0.999$ ) muestra que la teoría de los medios similares es aplicable en la melga Montecillo.

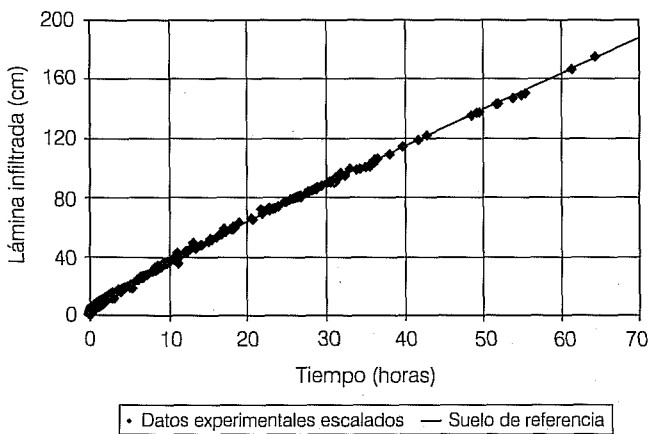
En la ilustración 3 se compara la probabilidad acumulada, calculada con la ecuación 11, con la probabilidad empírica acumulada. El valor de la desviación estándar en la melga Montecillo es de  $\sigma_\tau = 0.019$ . El acuerdo que muestra probabilidad empírica con la función teórica de probabilidad, a pesar de la poca cantidad de realizaciones, permite suponer efectivamente que la variable  $\tau = \ln(r)$  sigue una distribución de Gauss.

Para la melga Montecillo:

**Cuadro 1. Valores de la conductividad hidráulica a saturación y los factores de escala en la melga Montecillo ( $K_{s*} = 2.33$  cm/h).**

Distancia (m)	$K_s$ (cm/h)	$r$
0	1.21	0.7198
5	1.31	0.7491
10	2.01	0.9270
15	1.32	0.7521
20	3.27	1.1831
25	3.16	1.1637
30	2.37	1.0072
35	2.63	1.0610
40	4.80	1.4338
45	2.35	1.0040
50	4.26	1.3499
55	2.81	1.0977
60	2.56	1.0464
65	2.87	1.1085
70	3.96	1.3016
75	3.96	1.3015
80	2.95	1.1247
85	1.35	0.7600
90	1.81	0.8813
95	1.36	0.7641
100	1.31	0.7493

**Ilustración 2. Lámina infiltrada acumulada en función del tiempo: datos experimentales escalados y función de Green y Ampt con parámetros del suelo de referencia en la melga Montecillo.**



$$\langle r \rangle = 1.0228 \quad (19.1)$$

$$\sigma_r^2 = E\{r^2\} - E^2\{r\} = 0.22168 \quad (19.2)$$

$$\langle K_s \rangle = K_{s*} \langle r^2 \rangle = 2.55 \text{ cm/h} \quad (19.3)$$

donde  $\langle r \rangle$  y  $\sigma_r^2$  son la media aritmética y variancia de los factores de escala, respectivamente, y  $\langle K_s \rangle$ , la media aritmética de la conductividad hidráulica a saturación.

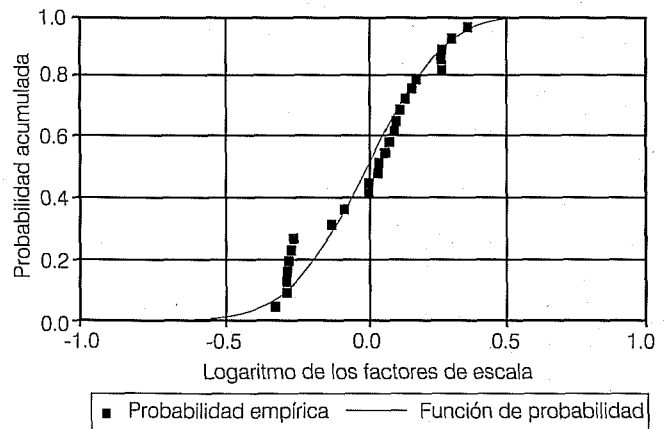
Con respecto a la estructura espacial de la infiltración, se supone  $\rho(0) = a = 1$ , lo que permite estimar una longitud de autocorrelación  $\lambda_m = 10$  m. En la ilustración 4 se muestran los semivariogramas teórico y experimental, y se puede observar que a pesar de que el número de observaciones es limitado, los factores de escala en la melga Montecillo presentan una estructura espacial bien definida.

### La fase de avance

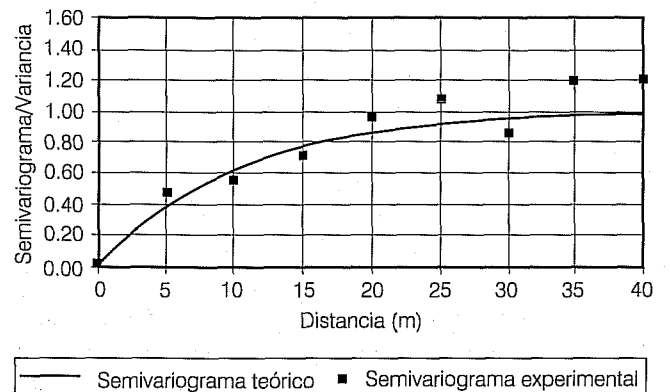
#### Las características hidrodinámicas efectivas

Para establecer las condiciones sobre las cuales la fase de avance puede ser descrita por características efectivas, se parte de las consideraciones siguientes: la infiltración

**Ilustración 3. Probabilidad acumulada del logaritmo de los factores de escala en la melga Montecillo.**



**Ilustración 4. Semivariograma del logaritmo de los factores de escala.**



tiene un régimen permanente al infinito, el flujo de Darcy es igual a  $K_s$ ; la media  $\langle K_s \rangle$  existe, y la variabilidad espacial de las características hidrodinámicas en la fase de avance se manifiesta plenamente en los tiempos largos (ilustración 1).

La existencia de un régimen permanente de la infiltración permite establecer los límites siguientes:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_f(t) = x_{\text{máx}} \quad (20)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U_f(t) = 0 \quad (21)$$

donde  $x_f$  es la posición del frente de avance del agua [L];  $t$ , el tiempo [T];  $x_{\text{máx}}$ , la posición máxima del frente de avance [L], y  $U_f(t) = dx_f/dt$  [ $LT^{-1}$ ], la velocidad de avance.

Cuando  $t \rightarrow \infty$ , la onda de Saint-Venant está completamente establecida, el tirante ya no depende del tiempo:  $\partial h/\partial t = 0$ , donde  $h$  es el tirante del agua [L]. La ecuación de continuidad (ecuación A.1.1) se reduce a:  $dq/dx + K_s(x) = 0$ , donde  $q$  es el gasto por unidad de ancho de melga o gasto unitario [ $L^2T^{-1}$ ] y  $x$ , la dirección principal del movimiento [L]. Su integración conduce a ( $q = 0$  en  $x = x_{\text{máx}}$ ):

$$q(x) = \int_x^{x_{\text{máx}}} K_s(\bar{x}) d\bar{x} \quad (22)$$

Ya que en  $x = 0$ ,  $q = q_0$ , donde  $q_0$  es el gasto unitario a la entrada de la melga [ $L^2T^{-1}$ ], se tiene:

$$q_0 = \int_0^{x_{\text{máx}}} K_s(\bar{x}) d\bar{x} \quad (23)$$

De acuerdo con el teorema del valor medio de las integrales, se puede definir la media sobre el intervalo  $[0, x_{\text{máx}}]$  como:

$$\bar{K}_s(x_{\text{máx}}) = \frac{1}{x_{\text{máx}}} \int_0^{x_{\text{máx}}} K_s(\bar{x}) d\bar{x} \quad (24)$$

es decir:

$$q_0 = \bar{K}_s(x_{\text{máx}}) x_{\text{máx}} \quad (25)$$

La ecuación 25 indica que para un gasto de riego dado existe un valor medio de la conductividad hidráulica que define una posición del frente de avance máximo. Para

una melga de longitud  $L$ , el gasto mínimo que asegura la llegada de la onda a su extremo final se deduce de la ecuación 25:

$$q_m = \bar{K}_s(L)L \quad (26)$$

Considerando que la media de la conductividad es una constante sobre el intervalo  $[0, L]$ ,  $\bar{K}_s(L) = \langle K_s \rangle$ , la representación de la fase de avance por características hidrodinámicas efectivas, es decir, independientes del gasto en la entrada de la melga, es posible para gastos superiores al proporcionado por la ecuación 26. Este resultado se ilustra utilizando los datos experimentales obtenidos en dos pruebas de avance realizadas en la melga Montecillo.

### El modelo hidrológico

Para representar la fase de avance, las ecuaciones de Saint-Venant se resuelven de manera aproximada. La versión integral de la ecuación de continuidad (ecuación A.1.1), considerando las condiciones iniciales y de frontera (ecuación A.2), es la siguiente:

$$q_0 t = \int_0^{x_f} \varphi(x, t) dx \quad (27)$$

donde  $\varphi(x, t) = h(x, t) + l(x, t)$  representa la lámina total de agua almacenada;  $h(x, t)$ , la lámina de agua sobre la superficie del suelo, e  $l(x, t)$ , la lámina infiltrada acumulada.

En el riego por gravedad es común asumir que la lámina infiltrada es una función solamente del tiempo de contacto ( $\tau$ ) del agua con el suelo en el punto  $x$ , definido por  $\tau(x, t) = t - t_x$ , donde  $t$  es el tiempo total de avance y  $t_x$ , el tiempo de llegada de la onda de avance al punto  $x$ . El tirante de agua sobre la superficie del suelo se tomará como un valor medio ( $\bar{h}$ ). Estas dos suposiciones constituyen el modelo hidrológico de Lewis y Milne (1938).

El volumen almacenado se define como:

$$\varphi(\tau) = \bar{h} + l(\tau) \quad (28)$$

El tirante medio puede ser estimado a partir del perfil de la onda en régimen permanente ( $\partial h/\partial t = 0$  y  $\partial q/\partial t = 0$ ). De las ecuaciones A.1.1 y A.1.2 se deduce:

$$\frac{dh}{dx} = \frac{J_0 - J + 2\gamma K_s q / gh^2}{1 - F^2} \quad (29)$$

donde  $J_0 = -\partial Z/\partial x$  (con  $Z$  la coordenada vertical orientada positivamente hacia arriba [L]) es asimilada generalmente a la pendiente topográfica de la superficie del suelo cuando el ángulo de inclinación es pequeño [ $LL^{-1}$ ];  $J = J(x, t)$  es la pendiente de fricción [ $LL^{-1}$ ];  $g$ , la aceleración gravitacional [ $LT^{-2}$ ];  $\gamma = 1-1/2\beta$ , donde el parámetro adimensional  $\beta$  está definido como  $\beta = V_x/U$ , donde  $V_x$  es la proyección en la dirección del movimiento de la velocidad de salida de la masa de agua debido a la infiltración (ver anexo) y  $F$ , el número de Froude:  $F^2 = q^2/gh^3$ .

La ecuación 29 se integra en general de manera numérica; sin embargo, se puede obtener una solución analítica aproximada si se considera que en la posición del frente de la onda ( $x = x_f$ ) el término predominante es la pendiente de fricción  $dh/dx \approx -J$ . La pendiente de fricción, en términos del tirante y del gasto, se deduce de la ecuación A.3:  $J = (v^2/g h^3)(q/kv)^{1/d}$ , donde  $v$  es el coeficiente de viscosidad cinemática [ $L^2T^{-1}$ ];  $k$ , una constante adimensional que depende principalmente de la rugosidad del suelo, y la potencia  $d$  es tal que  $1/2 < d < 1$ , el límite inferior corresponde al régimen de Chézy y el superior, al régimen de Poiseuille (ver anexo).

La variación del gasto con respecto a  $x$  se puede estimar considerando que la conductividad hidráulica en la ecuación 22 es igual a la media; es decir,  $q = q_0 (1-x/x_{m\acute{a}x})$ . La integración conduce a  $h(x) = h_r (1-x/x_{m\acute{a}x})^\delta$ , con  $\delta = (1 + d)/4d$  y  $h_r = (v^2 x_{m\acute{a}x}/\delta g)^{1/4}$  y para extrapolar este perfil hasta la entrada de la melga se reemplaza el tirante  $h_r$  por el tirante normal  $h_0$ . El tirante medio se obtiene del volumen sobre la superficie dividido por  $x_{m\acute{a}x}$ :

$$\bar{h} \approx \left( \frac{4d}{5d+1} \right) h_0 \quad (30)$$

donde:

$$h_0 = \left( \frac{v^2}{gJ_0} \right)^{1/3} \left( \frac{q_0}{kv} \right)^{1/3d} \quad (31)$$

La lámina infiltrada se calcula con la ecuación 2 con  $\lambda = (\bar{h} + h_f) (\theta_s - \theta_0)$ .

#### Identificación de parámetros

Con los factores de escala calculados con base en las pruebas de infiltración realizadas con el doble cilindro (cuadro 1) se obtuvieron 106 datos de los factores de escala (uno por cada metro) a través del método Montecarlo e interpolación *krige* (ilustraciones 5 y 6).

Los valores de referencia  $K_s^* = 2.33 \text{ cm/h}$  y  $\lambda^* = 7.71 \text{ cm}$  permiten obtener  $h_f^* = 27 \text{ cm}$ .

La pendiente de la melga es  $J_0 = 0.002 \text{ m m}^{-1}$  y el contenido de humedad a saturación es  $\theta_s = 0.4865 \text{ cm}^3 \text{ cm}^{-3}$ .

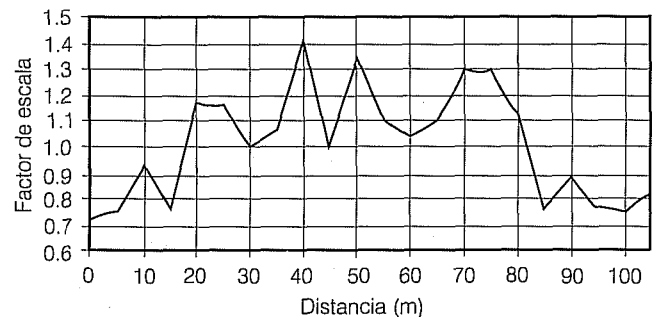
Al iniciar la prueba de avance, la humedad del suelo es  $\theta_0 = 0.2479 \text{ cm}^3 \text{ cm}^{-3}$  y el gasto unitario introducido a la melga,  $q_0 = 0.0032 \text{ m}^3/(\text{s m})$ .

Utilizando el modelo hidrológico y mediante calibración se obtiene  $\bar{h} \approx 1.38 \text{ cm}$ . El ajuste con los datos experimentales se muestra en la ilustración 7.

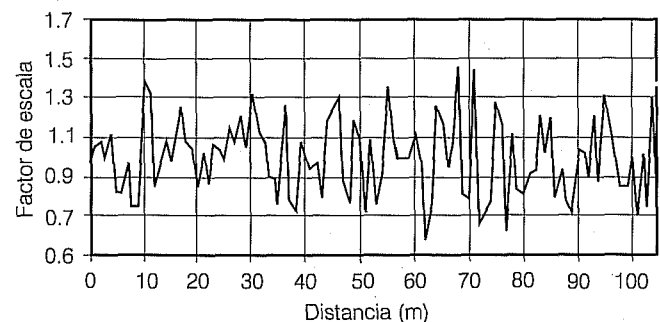
En la ilustración 7a se puede observar que mediante la calibración se logra reproducir con diferencias mínimas la curva de avance experimental con las tres formas de considerar la variabilidad espacial de la infiltración: aleatorio (Montecarlo), con estructura espacial (*kriging*) y la media estocástica. La ilustración 7b muestra la variación de la lámina infiltrada a lo largo de la melga para los tres tipos de modelos.

Para calcular el tirante medio para otras pruebas de riego es necesario definir los parámetros  $k$  y  $d$  de la ley de resistencia. El número de Reynolds es definido por  $Re$

**Ilustración 5. Distribución espacial de los factores de escala (krigeado).**

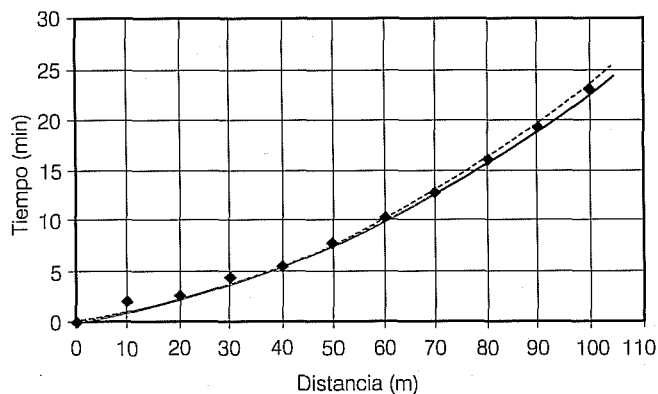


**Ilustración 6. Distribución espacial de los factores de escala (método Montecarlo).**



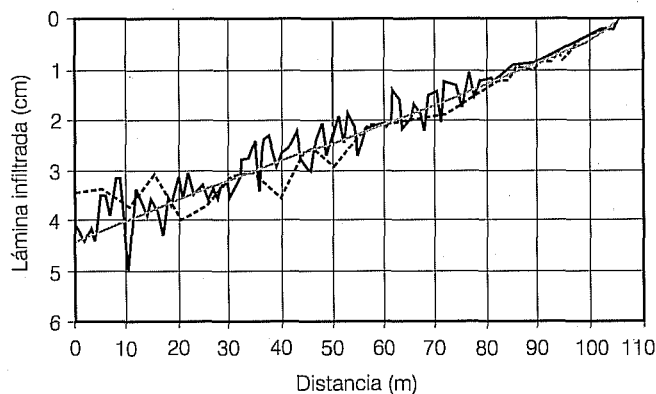


**Ilustración 7. Datos experimentales y modelación de la fase de avance del riego en la melga Montecillo, gasto unitario  $q_0 = 3.2$  lps/m (calibración).**



◆ Experimental — Aleatorio - - - - - Kriging ····· Media estocástica

(a) Avance del agua en función del tiempo.



— Aleatorio - - - - - Kriging — Media estocástica

(b) Lámina infiltrada a lo largo de la melga.

$= Uh/v = q/v$ ; con  $v = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  se obtiene para esta prueba  $Re = 3,200$ , valor que permite utilizar la ley de Poiseuille ( $d = 1$ ). De la ecuación 30 se obtiene el tirante normal  $h_o = 3/2 \bar{h} = 2.07 \text{ cm}$ . De la ecuación 22 se deduce  $k \cong 1/54$ .

**Predicción**

Para verificar la calibración del modelo se realiza una segunda prueba con otro gasto de riego  $q_0 = 0.0024 \text{ m}^3/(\text{s m})$  y con un contenido de humedad inicial  $\theta_0 = 0.3017 \text{ cm}^3 \text{ cm}^{-3}$ .

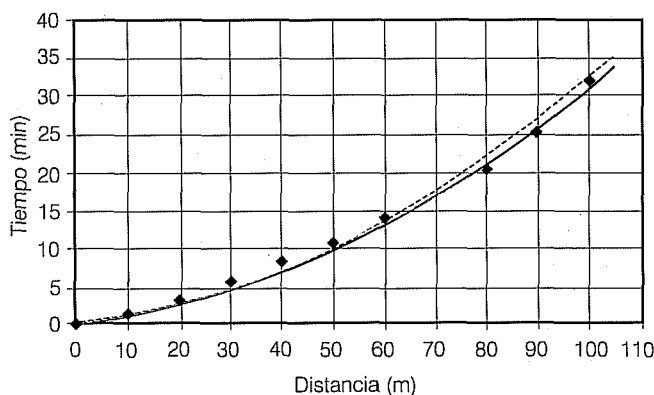
De la ley de resistencia se obtiene  $h_o \cong 1.87 \text{ cm}$  y  $\bar{h} \cong 1.25 \text{ cm}$ .

El excelente ajuste del modelo con los datos experimentales (ilustración 8a) en la predicción del avance del riego muestra que a pesar de la variabilidad espacial de la infiltración (ilustración 8b), el frente de avance puede ser representado por propiedades hidrodinámicas únicas e independientes del gasto de riego. Las propiedades efectivas pueden obtenerse través de una prueba de avance.

**Conclusiones**

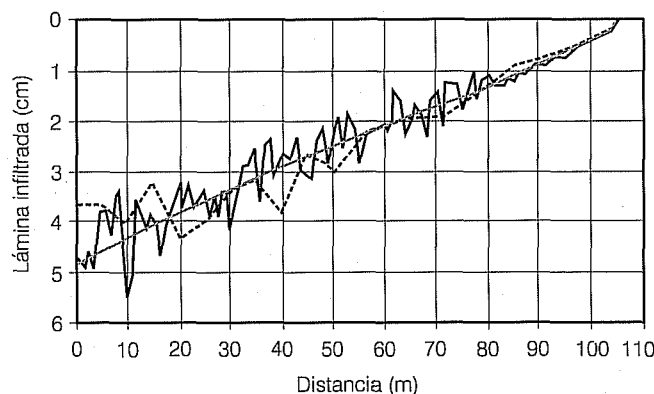
Se estudia la variabilidad espacial de las propiedades hidrodinámicas del suelo y su influencia en la fase de

**Ilustración 8. Datos experimentales y modelación de la fase de avance del riego en la melga Montecillo, gasto unitario  $q_0 = 2.4$  lps/m (predicción).**



◆ Experimental — Aleatorio - - - - - Kriging ····· Media estocástica

(a) Avance del agua en función del tiempo.



— Aleatorio - - - - - Kriging — Media estocástica

(b) Lámina infiltrada a lo largo de la melga.

avance del riego por melgas. El análisis se lleva a cabo a partir de datos de la evolución de la lámina infiltrada obtenidos en 21 pruebas de infiltración realizadas en el suelo Montecillo. En el estudio se acepta la teoría de similitud de los medios porosos.

Para describir la infiltración se utiliza la ecuación de Green y Ampt (1911). La consideración de que los factores de escala son los mismos para todas las propiedades hidrodinámicas permite reducir el número de parámetros a optimizar de  $2N_s$  a  $N_s+1$  (donde  $N_s$  es el número de pruebas de infiltración).

El acuerdo mostrado entre los datos experimentales de infiltración escalados y el suelo de referencia permite concluir que la teoría de los medios similares es aplicable a la melga Montecillo. La distribución de los datos alrededor de una sola curva promedio, representativa de toda la información, indica también la utilidad del escalamiento en el estudio de la heterogeneidad de la infiltración.

Se muestra que el logaritmo de los factores de escala sigue una distribución de Gauss y que tiene una estructura espacial bien definida.

El análisis de la influencia de la variabilidad espacial de las características hidrodinámicas del suelo sobre la fase de avance en el riego por melgas, realizado a través de interpolación *krige*, el método Montecarlo y la media estocástica, permite señalar que esta fase puede ser descrita mediante características hidrodinámicas efectivas.

### Anexo. Ecuaciones de Saint-Venant

El riego por gravedad en una melga se puede modelar con las ecuaciones de Saint-Venant, formadas por las ecuaciones obtenidas de los principios de conservación de la masa y de la cantidad de movimiento:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} + V_i = 0 \quad (\text{A.1.1})$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial(qU)}{\partial x} + gh \frac{\partial h}{\partial x} + gh(J - J_o) + \beta V_i U = 0 \quad (\text{A.1.2})$$

en donde  $x$  es la dirección principal del movimiento [ $L$ ];  $t$ , el tiempo [ $T$ ];  $q(x, t) = U(x, t) h(x, t)$ , el gasto por unidad de ancho de melga o gasto unitario [ $L^2T^{-1}$ ];  $U = U(x, t)$ , la velocidad media en una sección transversal [ $L T^{-1}$ ];  $h = h(x, t)$ , el tirante del agua sobre la superficie del suelo [ $L$ ];  $J_o = -\partial Z / \partial x$ , (con  $Z$  la coordenada vertical orientada positivamente hacia arriba [ $L$ ]), es asimilada generalmente

a la pendiente topográfica de la superficie del suelo cuando el ángulo de inclinación es pequeño [ $LL^{-1}$ ];  $J = J(x, t)$ , la pendiente de fricción [ $LL^{-1}$ ];  $g$ , la aceleración gravitacional [ $LT^{-2}$ ];  $V_i = V_i(x, t) = \partial I(x, t) / \partial t$ , la velocidad de infiltración [ $LT^{-1}$ ];  $I = I(x, t)$ , el volumen infiltrado por unidad de ancho y por unidad de longitud de la melga o lámina infiltrada [ $L$ ]; el parámetro adimensional  $\beta$  está definido como  $\beta = V_{ix} / U$ , donde  $V_{ix}$  es la proyección en la dirección del movimiento de la velocidad de salida de la masa de agua debido a la infiltración, generalmente es despreciada (Woolhiser, 1975).

En la fase de avance del riego las condiciones iniciales y de frontera son las siguientes:

$$q(x, 0) = 0 \quad \text{y} \quad h(x, 0) = 0 \quad (\text{A.2.1})$$

$$q(0, t) = q_o, \quad q(x_f, t) = 0 \quad \text{y} \quad h(x_f, t) = 0 \quad (\text{A.2.2})$$

donde  $q_o$  es el gasto unitario constante impuesto a la entrada de la melga;  $x_f(t)$  es la posición del frente de onda.

Para cerrar el sistema (ecuaciones 20 y 21) es necesario proporcionar ecuaciones para la velocidad de infiltración y la pendiente de fricción.

La velocidad de infiltración se puede calcular con la ecuación de Richards (1931).

En cuanto a la ley de resistencia hidráulica, que relaciona la pendiente de fricción con la velocidad media y el tirante de agua, se puede utilizar la ley propuesta por Fuentes (1992), que resulta del análisis del acoplamiento de las ecuaciones de Saint-Venant y Richards en la singularidad presente a la entrada de la melga:

$$U = k \frac{g^d}{v^{2d-1}} h^{3d-1} J^d \quad ; \quad q = Uh = kv \left( \frac{gh^3 J}{v^2} \right)^d \quad (\text{A.3})$$

donde  $v$  es el coeficiente de viscosidad cinemática [ $L^2T^{-1}$ ];  $k$ , una constante adimensional que depende principalmente de la rugosidad del suelo; la potencia  $d$  es tal que  $1/2 < d < 1$ , el límite inferior corresponde al régimen de Chézy y el superior, al régimen de Poiseuille.

Recibido: 16/04/2002  
Aprobado: 03/08/2002

### Referencias

ABRAMOWITZ, M. y STEGUN, I.A. *Handbook of mathematical functions*. New York: Dover Publications, Inc., 1970, 1046 pp.

- FUENTES, C. *Approche fractale des transferts hydriques dans les sols non-saturés*. Tesis de doctorado. Grenoble: Université Joseph Fourier de Grenoble, 1992, 267 pp.
- GREEN, W.H. y AMPT, G.A. Studies in soil physics, 1: the flow of air and water through soils. *J. Agric. Sci.* Vol. 4, 1911, pp. 1-24.
- LEWIS, M.R. y MILNE, W.E. Analysis of border irrigation. *Trans. of ASAE*. Vol. 19, 1938, pp. 267-272.
- MILLER, E.E. y MILLER, R.D. Physical theory for capillary flow phenomena. *J. appl. phys.* Vol. 27, 1956, pp. 324-332.
- NEUMAN, S.P., TARTAKOVSKY, D.M., FILIPPONE, C., AMIR, O. y LU, Z. Deterministic prediction of unsaturated flow in randomly heterogeneous soils under uncertainty without up scaling. *Proceedings of the international workshop on characterization and measurement of the hydraulic properties of unsaturated porous media*. Riverside, California, 1997.
- NIELSEN, D.R., BIGGAR, J.W. y ERH, K.T. Spatial variability of field measured soil-water properties. *Hilgardia*. Vol. 42, 1973, pp. 215-259.
- PARLANGE, J.-Y., BRADDOCK, R.D. LISLE, I. y SMITH, R.E. Three parameter infiltration equation. *Soil sci.* Vol. 111, 1982, pp. 170-174.
- PARLANGE, J.-Y., HAVERKAMP, R. y TOUMA, J. Infiltration under ponded conditions: 1. Optimal analytical solution and comparison with experimental observations. *Soil sci.* Vol. 139, núm. 4, 1985, pp. 305-311.
- RICHARDS, L.A. Capillary conduction of liquids through porous mediums. *Physics*. Vol. 1, 1931, pp. 318-333.
- RUSSO, D. y BRESLER, E. Scaling soil hydraulic properties of heterogeneous field. *Soil sci. soc. Am. J.* Vol. 44, 1980, pp. 681-684.
- SHARMA, M.L., GARDNER, G.A. y HUNT, C.G. Spatial variability of infiltration in watershed. *J. of hydrology*. Vol. 45, 1980, pp. 101-122.
- TULI, A., KOSUGI, K. y HOPMANS, J.W. Simultaneous scaling of soil water retention and unsaturated hydraulic conductivity functions assuming lognormal pore-size distribution. *Advances in water resources*. Vol. 24, 2001, pp. 677-688.
- VAUCLIN, M. Méthodes d'étude de la variabilité spatiale des propriétés d'un sol. *Variabilité spatiale des processus de transfert dans les sols*. Colloque SHF-INRA. Vol. 15, 1982, pp. 9-43.
- WARRICK, A.W. y AMOOZEGARD-FARD, A. Infiltration and drainage calibration using a similar media concept. *Water resources res.* Vol. 13, 1979, pp. 355-362.
- WOOLHISER, D.A. Simulation of unsteady overland flow. *Unsteady flow in open channels*. Vol II. Mahmood, K. y Yevjevich, V. (editores). Fort Collins, Colorado: Water Resources Publications, 1975, pp. 485-508.

#### Abstract

ZATARÁIN, F., FUENTES, C., RENDÓN, L. & VAUCLIN, M. *Effective soil hydrodynamic properties in border irrigation. Hydraulic Engineering in Mexico (in Spanish). July-September, 2003, vol. 18, no. 3, pp. 5-15.*

*The spatial variability of infiltration in the Montecillo soil is studied by means of scale factors. Scale factors are calculated with the saturated hydraulic conductivity determined by Green-Ampt's infiltration equation (1911), based on 21 double cylinder infiltration tests carried out over a 100 m transection. The influence of spatial variability on the advance of the water front in border irrigation is studied by means of Lewis-Milne's hydrological model (1938), while spatial variability is studied using Montecarlo's simulation, kriging interpolation, and stochastic simulation. The study shows that the advance of the water front in border irrigation can be described by unique hydrodynamic properties, independently of boundary conditions.*

**Keywords:** *spatial variability of infiltration, scaling.*

#### Dirección institucional de los autores:

*Felipe Zataráin  
Carlos Fuentes*

Instituto Mexicano de Tecnología del Agua,  
Paseo Cuauhnáhuac 8532,  
Progreso, Jiutepec, Morelos, México,  
CP 62550,  
teléfono: +(52) (777) 329 3659,  
fzata@tlaloc.imta.mx, cfuentes@tlaloc.imta.mx.

*Luis Rendón*

Comisión Nacional del Agua,  
Avenida Insurgentes Sur 1960, piso 6,  
Colonia Florida, México, D.F.,  
CP 01050,  
teléfono: + (52) 5591 592407.

*Michel Vauclin*

Laboratoire d'Etude des Transferts en Hydrologie et Environnement,  
(CNRS, INPG, IRD, UJF) BP 53,  
38 041 Grenoble Cedex 09, France,  
teléfono: +(33) 0476 825056,  
lthe@hmg.inpg.fr.