

Artículo publicado en el Repositorio Institucional del IMTA

<i>Título</i>	Teoría de la catástrofe aplicada en la hidráulica.
<i>Autor / Adscripción</i>	Poliopro Martínez Austria Gabriel Echávez Aldape División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería, UNAM
<i>Publicación</i>	Ingeniería Hidráulica en México, (2): 50-60
<i>Fecha de publicación</i>	1986
<i>Resumen</i>	La teoría de la catástrofe es una nueva herramienta matemática que permite el estudio y la descripción de fenómenos con características anómalas de comportamiento como histéresis y discontinuidades. En mecánica de fluidos e hidráulica existen varios casos de flujos con este tipo de comportamiento que, por la carencia de métodos sencillos de análisis, casi no se han estudiado. En este trabajo se presentan los conceptos fundamentales de la teoría de la catástrofe, enfatizando más sus implicaciones físicas que sus antecedentes matemáticos, y se ofrecen ejemplos de fenómenos de interés en hidráulica que pueden describirse mediante geometrías de catástrofe.
<i>Identificador</i>	<a href="http://hdl.handle.net/123456789/1269">http://hdl.handle.net/123456789/1269</a>

# Teoría de la catástrofe aplicada en la hidráulica

Polioproto Martínez Austria  
Gabriel Echávez Aldape

División de Estudios de Posgrado  
de la Facultad de Ingeniería, UNAM

*La teoría de la catástrofe es una nueva herramienta matemática que permite el estudio y la descripción de fenómenos con características anómalas de comportamiento como histéresis y discontinuidades. En mecánica de fluidos e hidráulica existen varios casos de flujos con este tipo de comportamiento que, por la carencia de métodos sencillos de análisis, casi no se han estudiado. En este trabajo se presentan los conceptos fundamentales de la teoría de la catástrofe, enfatizando más sus implicaciones físicas que sus antecedentes matemáticos, y se ofrecen ejemplos de fenómenos de interés en hidráulica que pueden describirse mediante geometrías de catástrofe.*

La hidráulica y la mecánica de fluidos en general, se ocupan de algunos flujos en los que, en ciertos rangos, se observa un comportamiento discontinuo; es decir, que pueden modificarse significativamente al introducir pequeños cambios en las variables que los gobiernan. Este tipo de comportamiento pudiera parecer contrario al que cabría esperar del sentido común, según el cual *Causas pequeñas producen efectos pequeños*; sin embargo, en mecánica de fluidos no es extraño encontrar flujos que no siguen esta regla. De hecho, ya en 1950 Birkhoff afirmaba que debe reconocerse la posibilidad de que *causas arbitrariamente pequeñas produzcan efectos finitos*, a lo que denominó *paradoja asintótica*.

Además de la discontinuidad, algunos de estos flujos presentan histéresis; es decir, su estado depende no sólo de los valores que adopten las variables que los gobiernan, sino de la manera en que se ha llegado a estos valores; esto es, dependen de su historia.

Las discontinuidades e histéresis, aunadas a otras características asociadas, han originado que el análisis de los flujos que las presentan sea difícil si se recurre a los métodos matemáticos clásicos.

Afortunadamente existe una nueva teoría, conocida como *Teoría de la catástrofe* (René Thom, 1975), que permite justamente el estudio de los fenómenos con este tipo de comportamiento.

Dicha teoría tiene aplicación matemática rigurosa, en mecánica de fluidos, sobre la teoría de flujos potenciales. Sin embargo, las ecuaciones y geometrías de catástrofe tienen un valor intrínseco como modelos descriptivos que permite agrupar en una sola geometría diversas características de un fenómeno que, de otro modo, permanecerían aisladas o, incluso, pasarían inadvertidas.

Por otra parte, este ordenamiento permite establecer programas experimentales con los que es factible lograr una mejor presentación y comprensión de los resultados y, por lo tanto, del fenómeno mismo.

Este artículo muestra, después de exponer algunos conceptos generales de la teoría de la catástrofe, sus posibilidades de aplicación como método descriptivo, es decir de manera cualitativa, mediante las propiedades de las geometrías de catástrofe. Se dan ejemplos de algunos fenómenos de interés en la hidráulica.

En la presentación de los conceptos fundamentales de la teoría se hace énfasis en su parte conceptual, más que en sus antecedentes matemáticos.

## Generalidades

Considérese un fenómeno cuyo comportamiento, es decir, su estado, puede ser completamente

descrito mediante  $n$  variables  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , que se denominarán *variables de estado*. El significado físico de estas variables cambiará de acuerdo con el problema que se analice. Podría tratarse, por ejemplo, de tirantes, gastos o presión, o de variables adimensionales como los coeficientes de arrastre o las relaciones entre dimensiones geométricas.

El estado del sistema, y por tanto, sus variables, se modificarán conforme cambien otros parámetros que lo gobiernan:  $C_1, C_2, \dots, C_k$  que se denominan *parámetros de control*.

El significado físico de estos parámetros es similar al de las variables de estado, como las geométricas; puede tratarse también de números de Froude o de Reynolds, por ejemplo.

Considérese, para ilustrar, una función sencilla:

$$f(x;C) = X^3 + Cx \quad (1)$$

La forma de esta ecuación cambiará según los valores que adopte el parámetro  $C$ . Si  $C < 0$ , tendrá dos puntos críticos: un máximo y un mínimo; si  $C = 0$ , tendrá un solo crítico, un punto de inflexión; y si  $C > 0$ , no tendrá ninguno, como se muestra en la ilustración 1.

Notar la importancia de los puntos críticos resulta de gran interés para definir la forma cualitativa de la función. De hecho, si se conoce su ubicación y tipo se puede trazar su geometría aproximada.

Los puntos críticos son aquellos en los que la primera derivada de la función se anula; es decir, los que cumplen:

$$\frac{df}{dx} = 0 \quad (2)$$

Puesto que la función se puede modificar significativamente si se cambia  $C$ , y el fenómeno físico que representa sufrirá alteraciones de importancia, es de interés estudiar el comportamiento de los puntos críticos de la función.

Una función de  $n$  variables,  $X_1, X_2, \dots, X_n$  tiene un punto crítico si:

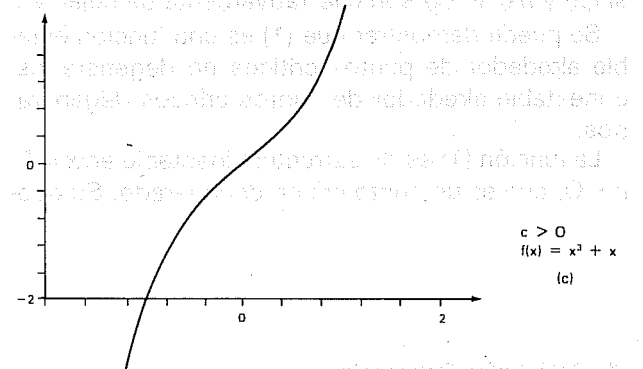
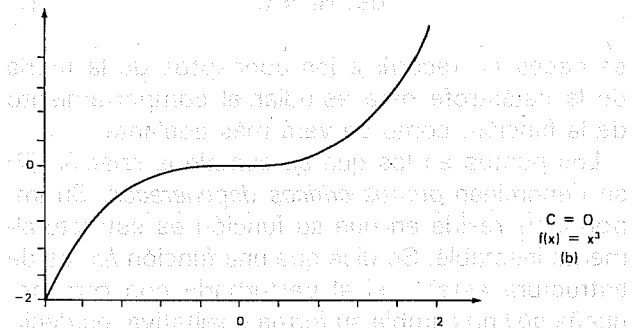
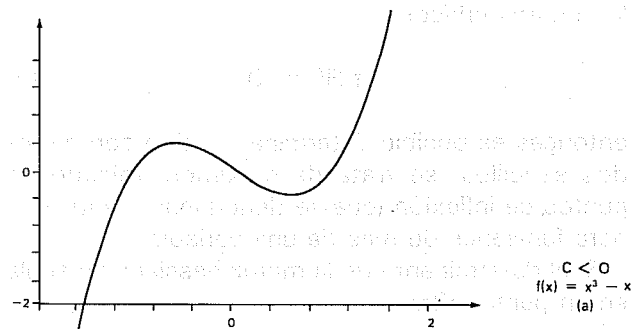
$$\frac{\delta f}{\delta x_1} = \frac{\delta f}{\delta x_2} = \frac{\delta f}{\delta x_3} = \dots = \frac{\delta f}{\delta x_n} = 0 \quad (3)$$

o, en notación compacta, si:

$$\nabla f(X_1, X_2, \dots, X_n) = 0 \quad (4)$$

El tipo de los puntos críticos se puede estudiar mediante el determinante de la matriz hessiana:

1. Función  $x^3$  perturbada con  $p(x)=cx$



$$Hf = \begin{vmatrix} \frac{\delta^2 f}{\delta x_1^2} & \frac{\delta^2 f}{\delta x_1 \delta x_2} & \dots & \frac{\delta^2 f}{\delta x_1 \delta x_n} \\ \frac{\delta^2 f}{\delta x_2 \delta x_1} & \frac{\delta^2 f}{\delta x_2 \delta x_2} & \dots & \frac{\delta^2 f}{\delta x_2 \delta x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\delta^2 f}{\delta x_n \delta x_1} & \frac{\delta^2 f}{\delta x_n \delta x_2} & \dots & \frac{\delta^2 f}{\delta x_n^2} \end{vmatrix} \quad (5)$$

Si el determinante de esta matriz no se anula en los puntos críticos:

$$\det H_f \neq 0 \quad (6)$$

entonces es posible determinar su tipo con métodos sencillos: se trata de máximos, mínimos o puntos de inflexión (que se denominan *puntos silla* para funciones de más de una variable).

Si el determinante de la matriz hessiana se anula en un punto crítico:

$$\det H_f = 0 \quad (7)$$

es necesario recurrir a los conceptos de la teoría de la catástrofe para estudiar el comportamiento de la función, como se verá más adelante.

Los puntos en los que se cumple la relación (7) se denominan *puntos críticos degenerados*. Su importancia reside en que su función es estructuralmente inestable. Se dice que una función  $f(x)$  es de estructura estable si al perturbarla con otra pequeña  $p(x)$  no cambia su forma cualitativa; es decir, si  $f(x)$  y  $f(x) + p(x)$  son cualitativamente semejantes.

Se puede demostrar que (1) es una función estable alrededor de puntos críticos no degenerados, e inestable alrededor de puntos críticos degenerados.

La función (1) es de estructura inestable en  $x = 0$ ,  $c = 0$ , que es un punto crítico degenerado. Su geo-

metría y el comportamiento del fenómeno cambian de manera drástica con incrementos o decrementos pequeños en  $C$ , que producen dos puntos críticos o ninguno, como se observa en la ilustración 1.

El concepto de estabilidad estructural tiene un gran interés cuando se aplica a fenómenos reales, dado que permite considerar la condición en que una pequeña modificación produce cambios importantes y súbitos.

La definición de estabilidad estructural no debe confundirse con otras utilizadas en hidráulica. En el análisis de estabilidad más usado se introduce una perturbación a un flujo básico y se observa si ésta crece o no con el tiempo; en tanto que en el análisis de estabilidad estructural se introduce una pequeña perturbación, y se observa si existe o no una modificación significativa en el flujo. Se trata del paso de un flujo a otro cualitativamente diferente.

Resulta de especial interés, por consiguiente, establecer los puntos o regiones donde una función de  $n$  variables de estado y  $k$  parámetros de control posee puntos críticos degenerados, y presenta, por lo tanto, inestabilidad estructural.

R. Thom desarrolló una serie de teoremas que culminan en el llamado *teorema de clasificación*. En él demuestra que si  $n \leq 2$  y  $k \leq 5$ , el fenómeno en cuestión puede representarse adecuadamente por medio de ecuaciones específicas y sencillas, denominadas funciones de catástrofe (véase cuadro 1).

### 1. Catástrofes Elementales

Denominación	K	Germen	Perturbación	Nombre
A <sub>2</sub>	1	$x^3$	$a_1x$	Pliegue
A	2	$\pm x^4$	$a_1x + a_2x^2$	Cúspide
A <sub>4</sub>	3	$x^5$	$a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$	Cola de golondrina
A $\pm$ <sub>5</sub>	4	$\pm x^6$	$a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$	Mariposa
A <sub>6</sub>	5	$x^7$	$a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5$	
D <sub>-4</sub>	3	$x^2y - y^3$	$a_1x + a_2y + a_3y^2$	Ombligo elíptico
D <sub>4</sub>	3	$x^2y + y^3$	$a_1x + a_2y + a_3y^2$	Ombligo hiperbólico
D <sub>5</sub>	4	$x^2y + y^4$	$a_1x + a_2y + a_3y^2 + a_4x^2$	Ombligo parabólico
D <sub>-6</sub>	5	$x^2y + y^5$	$a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4y^2 + a_5y^3$	
D <sub>6</sub>	5	$x^2y + y^5$	$a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4y^2 + a_5y^3$	
$\Sigma \pm$ <sub>5</sub>	5	$x^3 \pm y^4$	$a_1x + a_2y + a_3xy + a_3y^2 + a_5xy^2$	

La ecuación (1), utilizada como ejemplo, se puede identificar ahora como la más sencilla de las funciones de catástrofe, con sólo una variable de estado y un parámetro de control.

Como se ha visto, la forma de la función, y por lo tanto el estado del sistema físico que modela, dependen en gran medida del número y tipo de sus puntos críticos, que están dados por las soluciones de:

$$\nabla f(x_i; a_j) = 0 \quad (8)$$

Si se grafican los valores de  $x_i$  que cumplen esta ecuación, conforme varíen los parámetros  $C_j$ , se obtendrá la superficie de equilibrio o superficie de estado.

Para la función (1), por ejemplo, la ecuación de su superficie de estado será, utilizando la notación del cuadro 1:

$$\nabla f(x, a_1) = x^2 + a_1 = 0 \quad (9)$$

En esta ecuación las constantes obtenidas en la derivación se absorben en el parámetro  $a_1$ .

En la ilustración 2 se presenta la geometría de esta catástrofe, que se conoce como pliegue. El lugar geométrico de los puntos críticos degenerados, conocido como *conjunto singularidad*, está determinado por los puntos que cumplan:

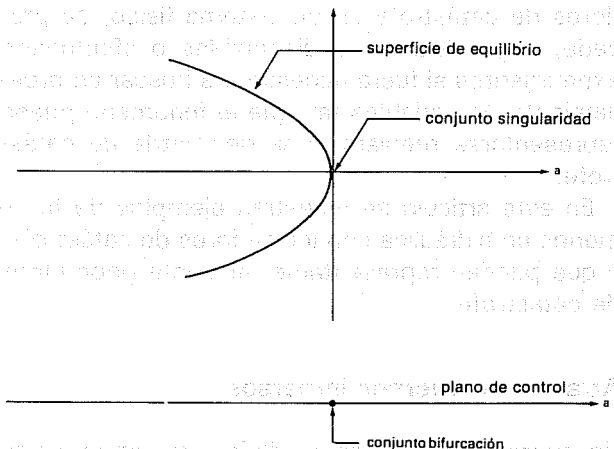
$$\nabla^2 f(x_i; a_j) = 0 \quad (10)$$

Para la catástrofe pliegue:

$$\nabla^2 f(x, a_1) = 2x = 0 \quad (11)$$

es decir, se tiene un punto singular en el origen.

### 2. Superficie de equilibrio



La proyección del conjunto singularidad sobre el plano formado por los ejes de los parámetros de control (en este caso un solo eje), se denomina *conjunto bifurcación*, puesto que representa los valores de dichos parámetros para los que las soluciones se bifurcan.

Tal vez la geometría de catástrofe más interesante sea la de la catástrofe cúspide, cuya ecuación es:

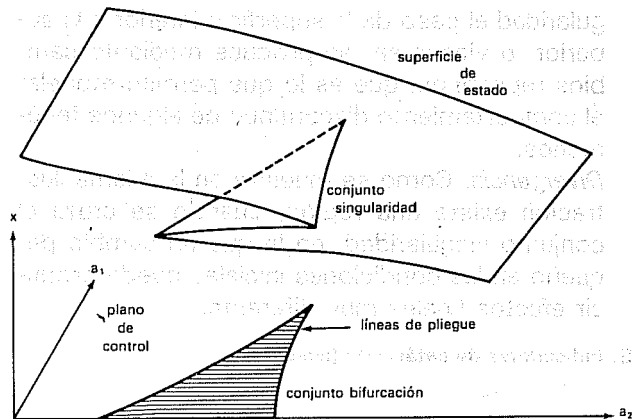
$$f(x; a_1, a_2) = x^4 + a_1 x^2 + a_2 x \quad (12)$$

Su superficie de equilibrio está dada por la ecuación:

$$\nabla f(x; a_1, a_2) = x^3 + a_1 x + a_2 \quad (13)$$

y se muestra en la ilustración 3. En este caso se

### 3. Geometría de la catástrofe cúspide

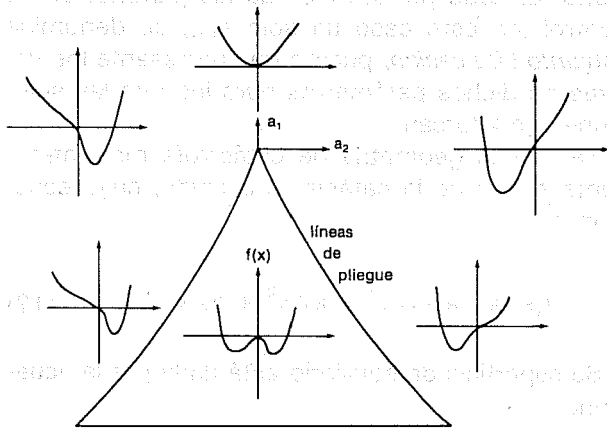


tiene un plano de control, formado por los ejes  $a_1$  y  $a_2$ , y el conjunto bifurcación semeja una cúspide, de donde toma nombre la catástrofe.

Es interesante notar como cambia la función (2) conforme se varíen los parámetros de control, como se observa en la ilustración 4, en la que se muestra cualitativamente en diversas regiones de plano de control.

La geometría de esta catástrofe es especialmente importante porque en ella pueden identificarse las principales características de los fenómenos de catástrofe, que son:

4. Funciones de la familia de la catástrofe cúspide

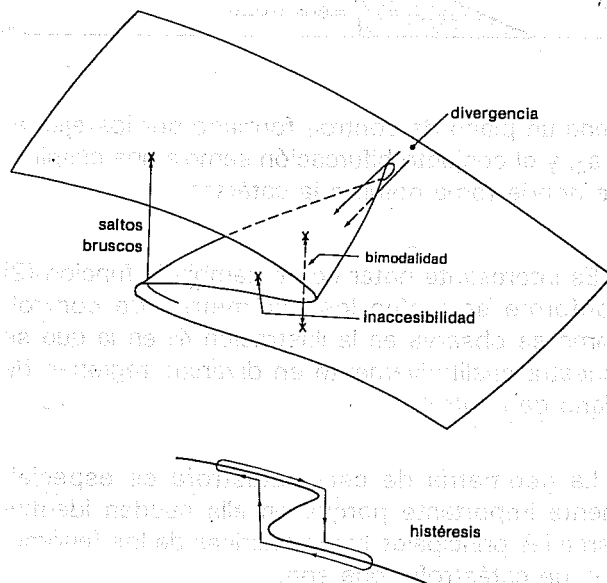


**Bimodalidad.** En la región del conjunto singularidad existen dos valores posibles de  $X$  es decir, dos estados posibles (véase ilustración 5). La zona intermedia entre estos valores es inestable, así que la superficie que une a las zonas superior e inferior es inaccesible.

**Saltos bruscos.** Cuando se cruza el conjunto singularidad el paso de la superficie inferior a la superior, o viceversa, se produce mediante cambios repentinos, que es lo que permite modelar el comportamiento discontinuo de algunos fenómenos.

**Divergencia.** Como se muestra en la misma ilustración existe una región, cuando se cruza el conjunto singularidad, en la que un cambio pequeño en las condiciones iniciales puede producir efectos finales muy diferentes.

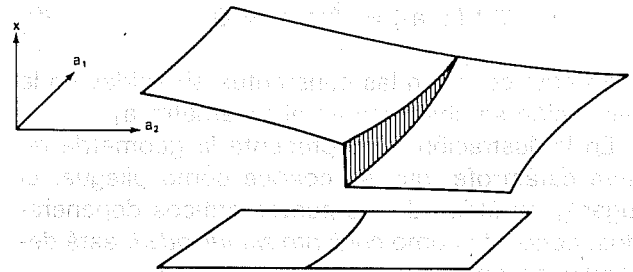
5. Indicadores de catástrofe (cúspide)



**Histéresis.** Por la existencia de una región de bimodalidad, el estado del fenómeno no depende, dentro del conjunto singularidad, sólo de los valores de los parámetros  $a_1$ ,  $a_2$ , sino también de que el fenómeno se encontrara antes en la superficie superior o inferior; es decir, depende también de su historia.

En algunos fenómenos no se observa bimodalidad e histéresis, sino tan sólo discontinuidad y divergencia (situación que se conoce como *convección de Maxwell*). La ilustración 6 describe la superficie de estos casos. La utilidad de la *convección de Maxwell* depende del sistema físico de que se trate.

6. Geometría de la catástrofe cúspide (Maxwell)



Quando la función que gobierna el fenómeno es muy complicada o se desconoce, y sólo se cuenta con resultados experimentales, situación muy frecuente en hidráulica, las características apuntadas permiten identificar la presencia de un fenómeno de catástrofe. A éstas se les puede denominar *indicadores de catástrofe*.

Al identificar la existencia de uno o más indicadores de catástrofe en un sistema físico, se procede, según los datos disponibles o efectuando experimentos si fuera necesario, a buscar un ordenamiento de variables tal, que el fenómeno pueda representarse mediante una geometría de catástrofe.

En este artículo se muestran ejemplos de fenómenos en hidráulica con indicadores de catástrofe, y que pueden representarse mediante geometrías de catástrofe.

**Arrastre en cuerpos inmersos**

Un cuerpo inmerso en un flujo experimenta una

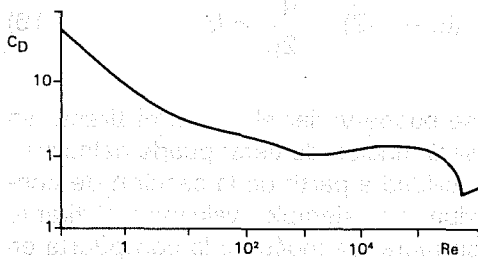
fuerza de arrastre que actúa en la misma dirección y se expresa por lo común como:

$$F = C_D A \frac{V^2}{2g} \quad (14)$$

El coeficiente de arrastre total  $C_D$  depende de la geometría del cuerpo —incluida su rugosidad— y del número de Reynolds ( $R_e$ ) si no hay efectos de superficie libre o compresibilidad del fluido.

Para cada geometría, la relación  $C_D - R_e$  se obtiene, experimentalmente, para diferentes rugosidades. En la ilustración 7 aparece la relación  $C_D - R_e$  de un cilindro liso de sección circular. Puede notarse que cuando  $R_e$  es de alrededor de  $4 \times 10^5$ , se origina una disminución brusca del coeficiente de arrastre, que físicamente corresponde a la transición de la capa límite de laminar turbulenta.

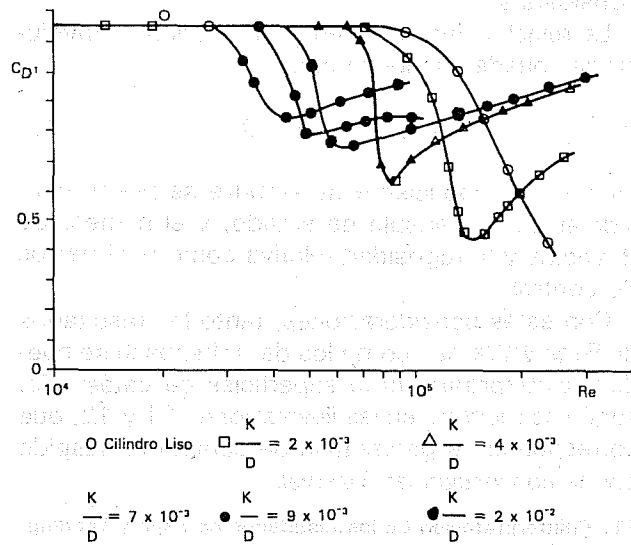
7. Relación  $R_e - C_D$  para un cilindro circular



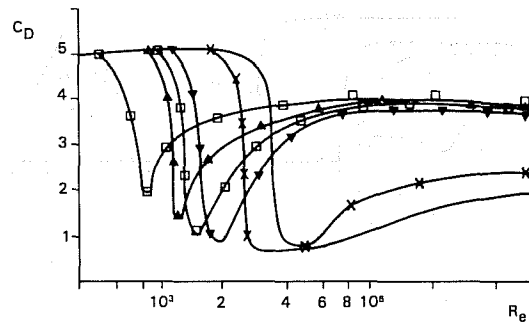
El fenómeno de arrastre de cuerpos inmersos en un flujo es un problema clásico en mecánica de fluidos, por lo que ha sido bien estudiado y se cuenta con abundantes resultados experimentales. En la ilustración 8 se reproducen los resultados obtenidos por Fage y Warsap (1930) con cilindros de diferentes rugosidades, y en la 9 se muestran los de Achenbach (1972) con esferas. Puede observarse que, aunque se modifica el número de  $R_e$  en que se produce la transición, ésta ocurre invariablemente con un cambio rápido del coeficiente de arrastre.

Este cambio rápido puede interpretarse como un indicador de catástrofe, por lo que procede buscar otros probablemente existentes. Con este propósito se realizaron experimentos en el túnel de viento de la División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería (DEPI), de la UNAM. Se utilizó un cilindro al que se dio rugosidad pegando arena de Ottawa sobre una superficie de látex, colocada sobre un cilindro originalmente liso. En la ilustración 10 se muestran los resultados.

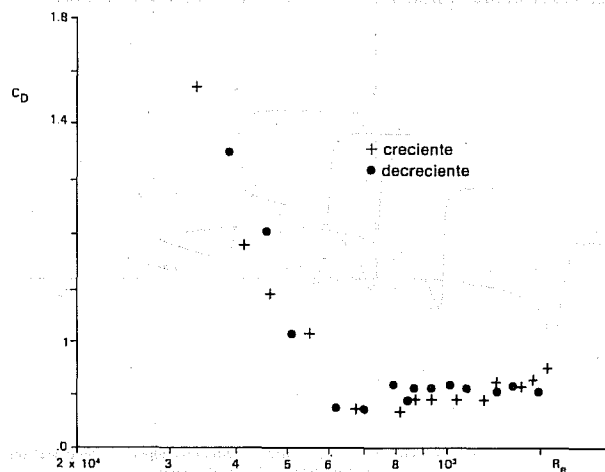
8. Resultados de Fage y Warsap



9. Resultados de Achenbach



10. Resultados de la Facultad de Ingeniería de la UNAM



En este experimento no se identificó la existencia de histéresis o bimodalidad, sin embargo, recientemente Schewe (1983) encontró histéresis con un túnel de viento presurizado y una piezobalanza de alta sensibilidad, pero en un rango tan re-

ducido que, para propósitos prácticos, puede no considerarse.

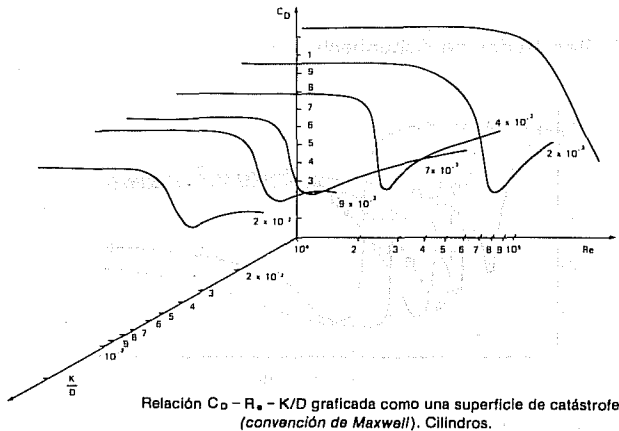
La relación funcional entre las variables involucradas puede escribirse como:

$$f(C_D; Re, k/D) = 0 \quad (15)$$

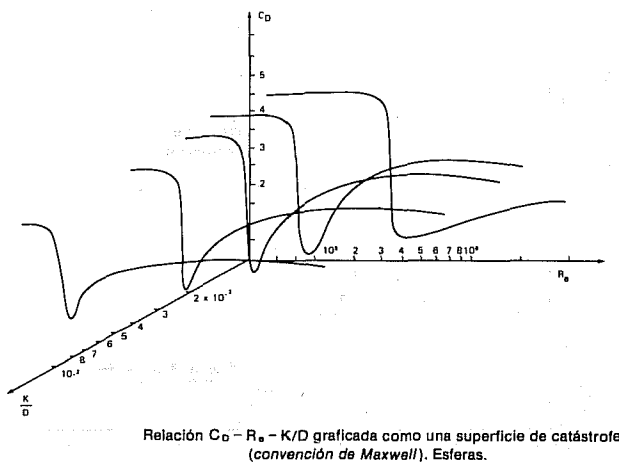
es decir, el coeficiente de arrastre se puede considerar como variable de estado, y el número de Reynolds y la rugosidad relativa como parámetros de control.

Con estas consideraciones, tanto los resultados de Fage y Warsap como los de Achenbach se pueden reinterpretar como superficies de catástrofe, según se muestra en las ilustraciones 11 y 12, que corresponden a geometrías de catástrofe cúspide con la *convención de Maxwell*.

### 11. Reinterpretación de los resultados de Fage y Warsap



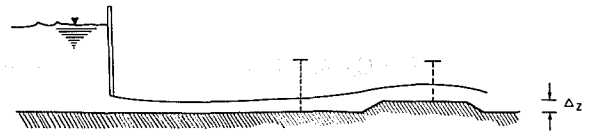
### 12. Reinterpretación de los resultados de Achenbach



### Salto hidráulico forzado

Considérese el caso de un flujo supercrítico al que se coloca un obstáculo, por ejemplo, un escalón, como se indica en la ilustración 13. Dada una altura

### 13. Geometría del flujo utilizado como ejemplo



del escalón, para un gasto suficientemente alto, el tirante en la sección 1, aguas arriba del escalón, será supercrítico y estará determinado por alguna sección de control localizada aguas arriba (una compuerta en la ilustración 13, que se utilizará para ejemplificar el uso de la teoría de la catástrofe en el salto hidráulico forzado). El tirante sobre el escalón será supercrítico también y puede calcularse a partir del anterior con la ecuación de la energía específica. Para un canal de sección rectangular, el tirante sobre el escalón se encontraría al resolver la siguiente ecuación:

$$Y_2^3 - Y_2^2 (E_1 - \Delta Z) + \frac{q^2}{2g} = 0 \quad (16)$$

Dado que se puede variar el gasto, el tirante en la sección 1 será función de éste; puede calcularse con relativa facilidad a partir de la sección de control aguas arriba, por ejemplo, valuando el tirante en la vena contracta, después de la compuerta en el flujo (véase ilustración 13), y calculando después el perfil de la superficie libre hasta la sección 1. Se puede plantear entonces la existencia de una relación conocida entre el gasto y el tirante en esta sección:

$$Y_1 = f_1(q) \quad (17)$$

Establecida la relación se tendría otra similar para la energía específica:

$$E_1 = Y_1 + \frac{q^2}{2gy_1^2} = f_2(q) \quad (18)$$

Entonces, la ecuación (4) se puede reescribir como:

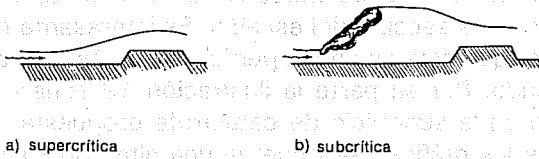
$$Y_2^3 - Y_2^2 (f_2(q) - \Delta Z) + \frac{q^2}{2g} = 0 \quad (19)$$

Si se disminuye el gasto, se producirá una disminución simultánea de la energía en el sistema, y



aumentarán los tirantes en las secciones 1 y 2. Cuando el tirante en la sección 2 alcance el valor del tirante crítico se producirá un cambio brusco en la configuración del flujo: el tirante aguas arriba del escalón no puede permanecer supercrítico, cambiará bruscamente a subcrítico y se producirá un salto hidráulico. En la ilustración 14 se muestra esta configuración del flujo.

14. Configuración del flujo



A este cambio súbito de régimen se le puede denominar *catástrofe a subcrítico*, y a valor del gasto en que ocurre *gasto crítico inferior* ( $q_{ci}$ ) ya que, como se verá más adelante, no es el único gasto crítico. El tirante al que le ocurre la catástrofe a subcrítico será aquel en el que se cumplan al mismo tiempo la ecuación (19) y la siguiente:

$$Y_2 = Y_c = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}} \quad (20)$$

donde  $Y_c$  es el tirante crítico.

Si se continúa disminuyendo el gasto, la zona del escalón seguirá actuando como un control y el tirante sobre esta sección será el crítico. El correspondiente a la sección aguas arriba se calcula resolviendo la siguiente ecuación y tomando la raíz que corresponde al tirante subcrítico:

$$Y_1^3 - Y_1^2 (E_2 + \Delta Z) + \frac{q^2}{2g} = 0 \quad (21)$$

donde  $Y_1$  y  $E_2$  son el tirante y la energía en las secciones 1 y 2, respectivamente. En esta ecuación, la energía específica en la sección 2 es también una función del gasto; de hecho, es la energía mínima:

$$E_2 = f_3(q) = \frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}} \quad (22)$$

por lo que la ecuación (21) puede escribirse como:

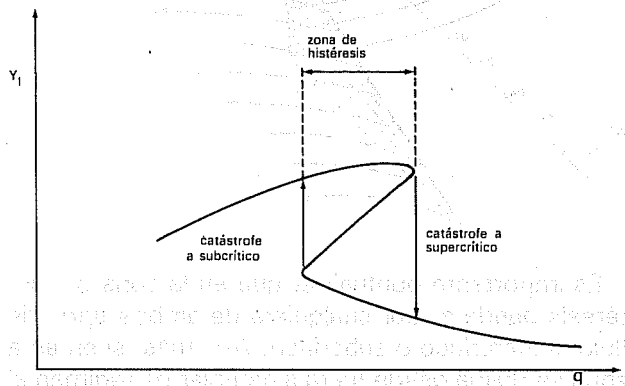
$$Y_1^3 - Y_1^2 (f_3(q) + \Delta Z) + \frac{q^2}{2g} = 0 \quad (23)$$

Por otra parte, una vez producida la catástrofe a subcrítico si se desea retornar a la configuración de flujo supercrítico (véase ilustración 14 a y b), no será suficiente aumentar el gasto a un valor un poco más alto al del gasto crítico inferior. Al ocurrir el salto hidráulico se ha producido una pérdida de energía que no existía en el flujo supercrítico y que debe ser compensada con un gran aumento en el gasto; existe histéresis.

En el cambio al régimen supercrítico también se produce un cambio repentino del valor del tirante. A esta condición se le puede denominar *catástrofe a supercrítico*, y al valor del gasto en que ocurre *gasto crítico superior* ( $q_{cs}$ ).

En la ilustración 15 se muestra la variación del tirante en la sección 1 respecto del gasto. Esta geometría tiene la misma forma que un corte en una superficie de catástrofe tipo cúspide, como la mostrada en la ilustración 3.

15. Variación del tirante con el gasto en la sección aguas arriba del escalón



Cuando se produce la catástrofe a subcrítico el tirante en la sección aguas arriba del escalón —calculado con la ecuación 21—, será mayor que el conjugado del flujo supercrítico original —dado por la ecuación 17—, por lo que el salto se *barra* aguas arriba.

Si se desea retornar a la condición de flujo supercrítico será necesario aumentar el gasto de manera que el salto se barra de nuevo sobre el escalón. Es decir, hasta que el conjugado de flujo supercrítico, controlado aguas arriba, iguale al tirante en la sección 1, controlado desde el escalón.

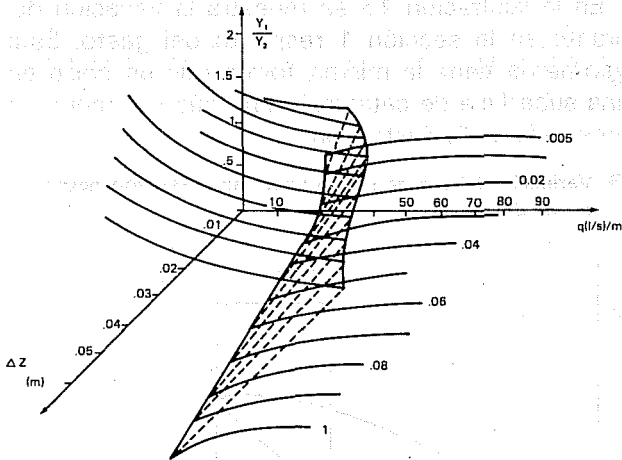
La catástrofe a supercrítico ocurrirá cuando el tirante en la sección (1), calculado con la ecuación (21) sea igual al siguiente:

$$Y_1^1 = \frac{Y_1}{2} \left[ \sqrt{1 - 8 Fr_1^2} - 1 \right] \quad (24)$$

Para una determinada altura de escalón, es posible evaluar la variación de los tirantes en la zona del obstáculo mediante el procedimiento descrito hasta aquí, y dibujar cuantitativamente el corte correspondiente en la superficie de catástrofe.

Conforme varíe la altura del escalón se podrán dibujar diferentes cortes en la superficie de catástrofe, así que, por último, puede trazarse la geometría completa, que será del tipo indicado en la ilustración 16. En ésta se ha utilizado como variable de estado la relación entre tirantes ( $Y_1/Y_2$ ) debido a que es de mayor utilidad práctica.

### 16. Geometría completa de la superficie de catástrofe



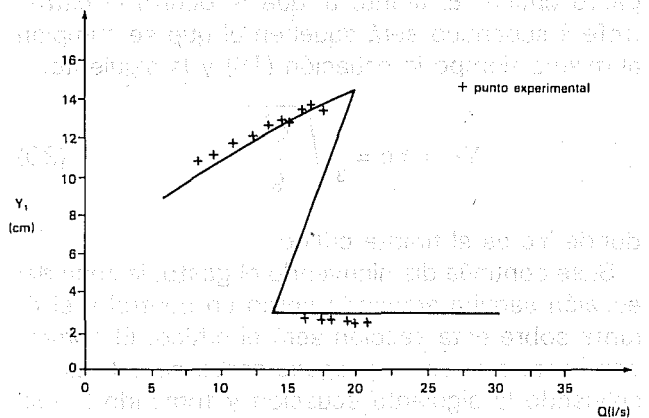
Es importante puntualizar que en la zona de histéresis puede existir cualquiera de ambos tipos de flujo, supercrítico o subcrítico. Aún más, si en esta zona se obliga desde fuera a cambiar de régimen al flujo, al cesar la influencia externa no retornará a su condición anterior; por ejemplo, si se obliga a *barrerse* el salto aguas abajo del escalón sin variar las condiciones del escurrimiento, éste no volverá a formarse. Así, al flujo que se presenta en el rango de histéresis podría denominársele, de acuerdo con su tipo, *supercrítico inestable* y *subcrítico inestable*; y fuera de esta zona *supercrítico estable* y *subcrítico estable*. La nomenclatura arriba propuesta correspondería a la utilizada en otras aplicaciones de la teoría de la catástrofe (7) y resulta útil para establecer con precisión la condición en que se encuentra un fenómeno con histéresis.

A fin de corroborar los resultados del modelo propuesto se realizaron experimentos en un canal de pendiente variable en el laboratorio de hidráulica

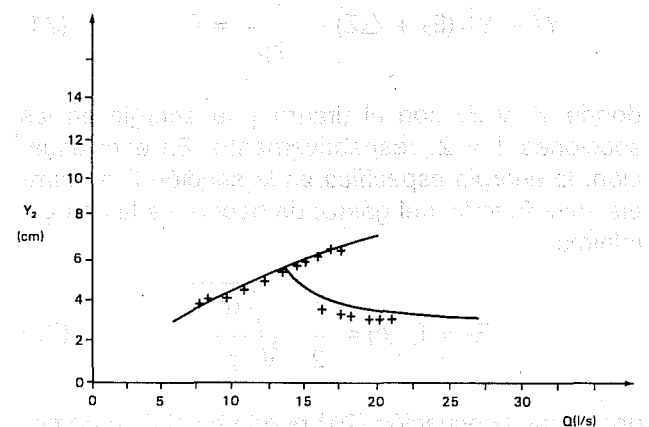
de la División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería de la UNAM. Se diseñó una instalación que reprodujera el caso de estudio, (véase ilustración 13), y se hicieron pruebas para varias alturas de escalón y abertura de compuerta. El procedimiento descrito se programó en una microcomputadora con objeto de calcular los resultados con mayor rapidez. Estos se indican en las gráficas mediante la línea continua.

En la ilustración 17 se presenta la variación del tirante en la sección 1 para un escalón de altura de 4.4 cm y una abertura de compuerta de 4 cm. En la ilustración 18 se muestra la relación tirante-gasto en la sección del escalón. Es interesante observar que ésta es una superficie de catástrofe deformada. Por su parte la ilustración 19 señala un corte en la superficie de catástrofe propuesta. En todas las gráficas se observa una alta correlación entre los resultados analíticos y los experimentales, de forma que puede afirmarse que las predicciones obtenidas por el modelo de catástrofe propuesto se adecuan al proceso real.

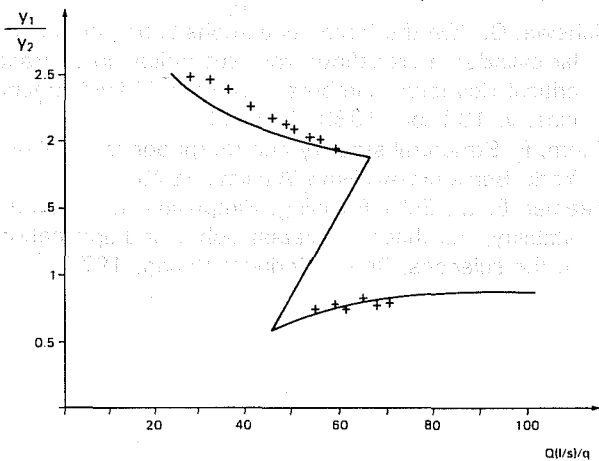
### 17. Variación del tirante en la sección 1



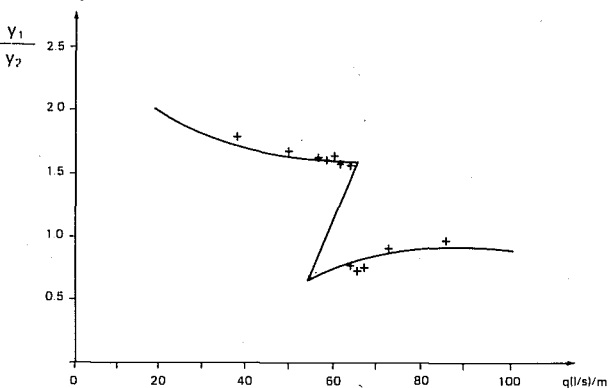
### 18. Relación tirante/gasto en la sección del escalón



19. Corte en la superficie de catástrofe propuesta



20. Resultados para un escalón de 2.4 cm y abertura y compuerta de 6 cm



Conviene anotar que en la práctica experimental es difícil alcanzar los puntos teóricos de catástrofe debido a que el flujo en las regiones inestables es muy sensible a las perturbaciones presentes de manera continua, ya que se originan en el salto hidráulico y en las ondas del flujo supercrítico.

Se realizaron otros experimentos y comprobaciones teórico-experimentales, y en todos los casos se obtuvieron resultados semejantes. Como ejemplo, en la ilustración 20 se presentan los resultados para un escalón de altura de 2.4 cm y abertura y compuerta de 6 centímetros.

Con el método antes descrito es posible definir la superficie de catástrofe completa haciendo variar el segundo parámetro de control: la altura del escalón; con el programa mencionado se abrevia el procedimiento. En la ilustración 16 se muestra la superficie de catástrofe obtenida para una abertura de compuerta de 4 cm; así quedaría resuelto el problema sea cual sea el tamaño del escalón y para las condiciones de control aguas arriba antes dichas.

Conclusiones

La teoría de la catástrofe es un nuevo método ma-

temático de análisis de los fenómenos que presentan entre otras características discontinuidades, histéresis y bimodalidad, y cuyo estudio es difícil con otras técnicas. Esta teoría tiene aplicaciones matemáticamente rigurosas en mecánica de fluidos y en especial en la teoría de flujos potenciales. No obstante, pueden hacerse aplicaciones de tipo conceptual, como las ejemplificadas en el texto, en las que las geometrías de catástrofe desempeñan un papel fundamental.

La aplicación de la teoría de la catástrofe como método descriptivo permite la introducción de una nomenclatura y de conceptos importantes, como el de la estabilidad estructural, que facilitan la comprensión de aquellos fenómenos complejos en los que la función que los gobierna se desconoce o es muy complicada. Además, supone implícitamente la existencia de una relación funcional a la que puede aplicarse la teoría de la catástrofe que gobierna el fenómeno. La justificación de esta hipótesis sólo se obtiene cuando los datos experimentales se ajustan a una geometría de catástrofe.

Por razones de espacio, en este trabajo se han ejemplificado sólo dos casos, entre otros varios estudiados por los autores, de fenómenos de catástrofe en hidráulica y mecánica de fluidos.

NOMENCLATURA

- A = área, de un cuerpo inmerso proyectada en la dirección del flujo.
- $C_D$  = coeficiente de arrastre
- D = diámetro de un cilindro o esfera
- E = energía específica
- F = fuerza de arrastre
- Fr = número de Froude =  $V/\sqrt{gy}$
- F ( $X_i, a_j$ ) = familia de funciones con  $X_i$  variables de estado y  $a_j$  parámetros de control
- g = aceleración de la gravedad
- k = rugosidad equivalente
- $R_e$  = número de Reynolds
- V = velocidad media del flujo
- Y = tirante
- $Y_c$  = tirante crítico
- $\Delta Z$  = altura del escalón

**Referencias**

Achenbach, E. "Experiments on flow past spheres at very high Reynolds numbers", *Journal of fluid mechanics*, v. 54, p.3, 1972

Birkhoff, G. *Hydrodynamics: a study in logic, fact and similitude*, Princenton University Press, 1950.

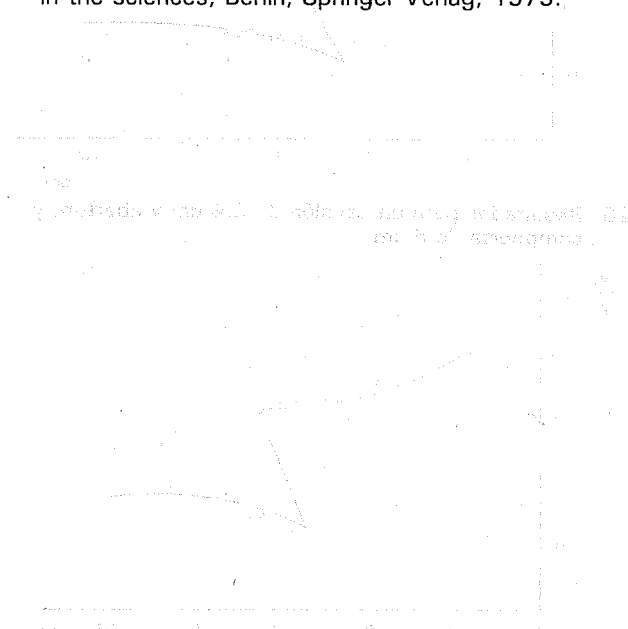
Fage, A. y Warsap, J.E. The effect of turbulence and surface roughness on the drag of a circular cylinder, *Aero Res. Council*, 1930.

Poston, T. y Stewart I. *Catastrophe theory and its applications*, Londres, Pitman, 1978.

Schewe, G. "On the force fluctuations acting on a circular cylinder in crossflow from subcritical up to transcritical Reynolds numbers", *Journal of fluid mechanics*, v. 133, pp. 1983, 265-285.

Thom, R. *Structural stability and morphogenesis*, Nueva York, Benjamín-Addison Wesley, 1975.

Zeeman E. C., *Euler Buckling, Symposium on structural stability, the theory of catastrophes and applications in the sciences*, Berlín, Springer-Verlag, 1975.



El presente trabajo se refiere a un estudio experimental de las fluctuaciones de la fuerza que actúa sobre un cilindro circular en flujo cruzado, desde números de Reynolds subcríticos hasta transcíticos. El estudio se realizó en un túnel de viento de flujo cruzado, donde se midieron las fuerzas de arrastre y sustentancia en un cilindro liso y en un cilindro con rugosidad superficial. Los resultados muestran que las fluctuaciones de la fuerza de arrastre aumentan significativamente al acercarse al número de Reynolds crítico, lo que se atribuye a la formación de vórtices en la estela del cilindro. Este fenómeno es un ejemplo clásico de una catástrofe de bifurcación, donde un pequeño cambio en las condiciones de flujo puede provocar un cambio abrupto en el comportamiento del sistema. El estudio también muestra que la rugosidad superficial del cilindro puede afectar la posición del punto crítico y la magnitud de las fluctuaciones de la fuerza.

Este trabajo se refiere a un estudio experimental de las fluctuaciones de la fuerza que actúa sobre un cilindro circular en flujo cruzado, desde números de Reynolds subcríticos hasta transcíticos. El estudio se realizó en un túnel de viento de flujo cruzado, donde se midieron las fuerzas de arrastre y sustentancia en un cilindro liso y en un cilindro con rugosidad superficial. Los resultados muestran que las fluctuaciones de la fuerza de arrastre aumentan significativamente al acercarse al número de Reynolds crítico, lo que se atribuye a la formación de vórtices en la estela del cilindro. Este fenómeno es un ejemplo clásico de una catástrofe de bifurcación, donde un pequeño cambio en las condiciones de flujo puede provocar un cambio abrupto en el comportamiento del sistema. El estudio también muestra que la rugosidad superficial del cilindro puede afectar la posición del punto crítico y la magnitud de las fluctuaciones de la fuerza.