

## ANÁLISIS METODOLÓGICO DE LA DISTRIBUCIÓN ESPACIAL DE LA PRECIPITACIÓN Y LA ESTIMACIÓN MEDIA DIARIA \*

### METHODOLOGICAL ANALYSIS OF THE SPATIAL DISTRIBUTION OF RAINFALL AND THE AVERAGE DAILY STIMATION

Mauro Íñiguez Covarrubias<sup>1</sup>, Waldo Ojeda Bustamante<sup>1§</sup>, Carlos Díaz Delgado<sup>2</sup>, Khalidou Mamadou Bâ<sup>2</sup> y Roberto Mercado Escalante<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Instituto Mexicano de Tecnología del Agua. Paseo Cuauhnáhuac 8532. Colonia Progreso, Jiutepec, Morelos, México. C. P. 62550. Fax. 01 777 3194220. (mic@tlaloc.imta.mx), (wojeda@tlaloc.imta.mx), (rmercado@tlaloc.imta.mx). <sup>2</sup>Universidad Autónoma del Estado de México. Cerro de Coatepec s/n. Toluca, México. Fax. 52 722 2965550. (cdiaz@uaemex.mx), (khalidou@uaemex.mx). <sup>§</sup>Autor para correspondencia: wojeda@tlaloc.imta.mx.

#### RESUMEN

El objetivo del trabajo consistió en mostrar un análisis metodológico geoestadístico, para generar un patrón espacial de la lluvia, asociado a la precipitación media diaria. Caracterizar y conocer la distribución espacial de la precipitación, también conocida como “campo de tormenta” y asociarla a un modelo de distribución o sustituirla por una precipitación media por métodos convencionales, es un reto importante en estudios de las ciencias del agua. La metodología propuesta requiere de la construcción de un variograma, elaborado por un ajuste de datos experimentales de un campo de tormenta, que sirva como base para generar la distribución espacial de la lluvia con la aplicación del método geoestadístico del “krigeado”. Esto permite determinar la precipitación media diaria de una cuenca hidrográfica. Los resultados muestran que es posible obtener una función que relacione la lluvia media con el campo de tormenta, mediante los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  del variograma ajustado a un modelo esférico. Para validar la aplicación de la metodología se analizaron varios eventos, aquí se presentan dos eventos de precipitación observada en la cuenca del río Juchipila, y río Calvillo, entre los estados de Aguascalientes y Zacatecas. Los resultados muestran una relación única de la lluvia media diaria con la distribución

#### ABSTRACT

The aim of the study was to show a geostatistical methodological analysis to create a spatial pattern of rain, related to average daily rainfall. Defining and knowing the spatial distribution of rainfall, also known as the “storm field” and related to a distribution model, or replacing it to an average rainfall using conventional methods, is an important challenge in the study of water science. The methodology suggested requires the construction of a variogram, created by adjusting experimental data of a storm field, which serves as a base to generate the spatial distribution of rain using the geostatistical method of “Kriging”. This helps determine the daily average rainfall of a watershed. Results show that it is possible to obtain a function that relates average rainfall with the storm field, using parameters  $\alpha$  and  $\beta$  of the variogram, adjusted to a spherical model. To validate the application of the methodology, several events were analyzed. Here we present two rainfall events observed in the basin of rivers Juchipila and Calvillo, between the states of Aguascalientes and Zacatecas. Results show a single relation between average daily rainfall and spatial distribution, represented by the storm field. It

\* Recibido: abril de 2010  
Aceptado: febrero de 2011

espacial, representada por el campo de tormenta. Asimismo, se encontró que el valor óptimo de la función es mínimo al compararlo con los resultados obtenidos por cuatro métodos convencionales: promedio aritmético, polígonos de Thiessen, método de isoyetas y método de krigeado lineal.

**Palabras clave:** krigeado, polígonos de Thiessen, precipitación media, variograma.

## INTRODUCCIÓN

La estimación de los recursos hídricos de una cuenca, que incluye sus áreas de agricultura de riego y temporal, demanda conocer la distribución espacial de la precipitación. Es difícil obtener dicha representación cuantitativa de la precipitación, insumo básico de los modelos relación lluvia-escurrimiento, ya que es un fenómeno intermitente con alta variabilidad espacial y temporal, usualmente dicha variable se estima sólo en algunos puntos de monitoreo de una cuenca a través de una red de pluviómetros (Mirás-Avalos *et al.*, 2007).

La interpolación espacial de la lluvia se ha estudiado con diferentes enfoques dependiendo de la aplicación, información disponible y precisión requerida. El principio básico de la mayoría de los métodos es transformar los valores puntuales de la precipitación, a través de ponderadores espaciales, para representar la distribución de la precipitación sobre una superficie (Damant *et al.*, 1983). Los métodos más usados para estimar el promedio espacial de la precipitación a partir de datos observados en estaciones pluviométricas son: promedio aritmético, polígonos de Thiessen e isoyetas. El método de Thiessen, el más usado en hidrología, asigna una ponderación diferencial a cada estación, generando una distribución espacial no uniforme pero asumiendo una variación lineal entre estaciones. Una de las limitaciones del método de Thiessen está en que la ponderación es fija, independientemente de la variabilidad temporal y espacial de la tormenta. Aunque el método de las isoyetas mejora esta limitación al generar isoyetas para cada tormenta, es tedioso por la planimetría requerida para estimar la precipitación media sobre una cuenca (Damant *et al.*, 1983).

Los métodos anteriores, tradicionalmente han sido útiles para estimaciones espaciales exploratorias (Mirás-Avalos *et al.*, 2007). Morin y Paquet (1995) presentaron una aplicación de la variación espacial de la lluvia diaria usando los

was also found that the optimum value of the function is minimal when comparing it to results obtained using four conventional methods: arithmetical average, Thiessen diagrams, isohyet method and linear Kriging method.

**Key words:** average rainfall, Kriging, Thiessen diagrams, variogram.

## INTRODUCTION

The estimation of water resources of a river basin, that includes its agricultural irrigation and rain areas, requires knowledge of the spatial distribution of rainfall. It is difficult to obtain such a quantitative representation of rainfall, which is the basic input of the rain-runoff relation model, since it is an intermittent phenomenon with high spatial and temporal variability. This variable is usually calculated in some monitoring points of a basin using a network of rain gauges (Mirás-Avalos *et al.*, 2007).

The spatial interpolation of rain has been studied using different approaches, according to the application, information available and accuracy required. The basic principle of most methods is to transform the precise values of the rainfall through spatial ponderators to represent the distribution of the rainfall on a surface (Damant *et al.*, 1983). The most commonly used methods for estimating the spatial average of rainfall from data observed in rainfall stations are: arithmetical averages, Thiessen diagrams and isohyet method. Thiessen diagrams, the most commonly used method in hydrology, assigns a differential adjustment to each station, creating a non-uniform spatial distribution, yet assuming a linear variation between stations. One of the limitations of the Thiessen diagrams is that adjustments are fixed, regardless of the seasonal and spatial variability of the storm. Although the isohyet method improves this limitation by creating isohyets for each storm, it is due to the planimetry required to calculate the average rainfall on a basin (Damant *et al.*, 1983).

The previous methods have traditionally been useful for exploratory spatial estimations (Mirás-Avalos *et al.*, 2007). Morin and Paquet (1995) presented

polígonos de Thiessen para simular la relación lluvia-caudal; así también, Batin *et al.* (1984) presentan una aplicación para localizar el mejor sitio de estaciones pluviométricas.

Actualmente, los métodos geoestadísticos se usan entre otras aplicaciones, como herramienta de interpolación para analizar el comportamiento espacial de una variable sobre un área determinada (Cisneros *et al.*, 1998), usualmente en programas comerciales para la generación de mapas de lluvia (Goovaerts, 2000). El uso de métodos geoestadísticos, en particular el krigeado ordinario, como herramienta de interpolación para la construcción de campos de tormenta como ha sido reportada por Cisneros *et al.* (1998) para representar la variabilidad espacial de la lluvia.

Los métodos geoestadísticos requieren de un preprocesamiento de los datos observados para establecer parámetros sobre el patrón espacial de la precipitación con la construcción de su variograma. La generación de variogramas para estudiar la variabilidad espacial de la lluvia ha sido reportada por Lebel y Bastin (1985). La aplicación de técnicas geoestadísticas que integran la variabilidad espacial de una variable en un variograma es una herramienta muy útil, ya que el error de la estimación no depende directamente de los datos sino del patrón espacial de los datos y de la semivarianza del variograma generado (Burrough and McDonnell, 1998).

Un variograma es un modelo matemático que define la dependencia espacial de la variable de estudio, con fines de interpolación espacial (Goovaerts, 2000) y cuyos parámetros son ajustados con datos experimentales. Existen varios modelos teóricos que pueden generarse para ajustar variogramas de variables. Aunque se han reportado diversos estudios para caracterizar espacialmente las variables hidrológicas usando métodos geoestadísticos (Level y Bastin, 1985), existen pocos estudios para representar la variación espacial de patrones de tormentas, con fines de estimación en la relación lluvia-escurrimiento.

Existe la necesidad de estudiar el tipo de modelos para variogramas que mejor representen el comportamiento espacial de la lluvia y buscar una relación que puede ser utilizada como estructura espacial en la determinación de la precipitación media de una cuenca. El objetivo del trabajo consistió en mostrar un análisis metodológico geoestadístico, para generar un patrón espacial de la lluvia, asociado a la precipitación media diaria.

an application of the spatial variation of daily rainfall using the Thiessen diagrams to simulate the rain-volume relation. Likewise, Batin *et al.* (1984) presented an application to find the best location for rainfall stations.

Currently, geostatistical methods are used, among others, as interpolation tools to analyze the spatial behavior of a variable on a particular area (Cisneros *et al.*, 1998), usually in commercial programs for the creation of rainfall maps (Goovaerts, 2000). The use of geostatistical methods, in particular ordinary Kriging as an interpolation tool for the construction of storm fields as reported by Cisneros *et al.* (1998) to represent the spatial variability of the rainfall.

Geostatistical methods require preprocessing of the observed data to establish parameters on the spatial pattern of rainfall with the construction of a variogram. The creation of variograms to study spatial variability of the rain has been reported by Lebel and Bastin (1985). The geostatistical techniques that integrate the spatial variability of a variable in a variogram is a very useful tool, since the estimation error does not depend directly on the data, but on the spatial pattern of the data and of the semivariance of the variogram created (Burrough and McDonnell, 1998).

A variogram is a mathematical model that defines the spatial dependence of the variable under study with spatial interpolation purposes (Goovaerts, 2000), and its parameters are adjusted with experimental data. There are several theoretical models that can be created to adjust variable variograms. Although there have been diverse studies to define the hydrological variables spatially using statistical methods (Level and Bastin, 1985), there are few studies to represent the spatial variation of storm patterns, with the purpose of estimating the rain-runoff relation.

There is a need to study the type of models for variograms that best represent the spatial behavior of the rain, and find a relation that can be used as a spatial structure in the determination of the average rainfall of a basin. The aim of the study was to present a geostatistical methodological analysis to create a spatial pattern for rain, related to average daily rainfall.

## MATERIALES Y MÉTODOS

La aplicación se realizó para la cuenca del río Juchipila, considerado conjuntamente con el río Calvillo y afluentes del río Santiago, que constituyen uno de los sistemas hidrológicos más importantes de los estados de Zacatecas y Aguascalientes, México. La cuenca está localizada en una zona semiárida, con una área de 5 640 km<sup>2</sup>, las lluvias se concentran en el periodo julio-septiembre; normalmente llueve en toda la cuenca pocos días del año. La información de precipitación diaria, base del estudio, procede de 63 estaciones climatológicas (Figura 1).

Se digitalizó la cuenca del río Juchipila en una proyección ortogonal, la longitud y latitud se presentan en el sistema de coordenadas UTM (universal transversal de mercator), como se observa en la Figura 1. La fuente de datos pluviométricos, fue el paquete computacional ERIC III (IMTA, 2009). La clave oficial de las estaciones usadas se presenta en el Cuadro 1, además para un mejor entendimiento se incluye la latitud y longitud en unidades UTM.

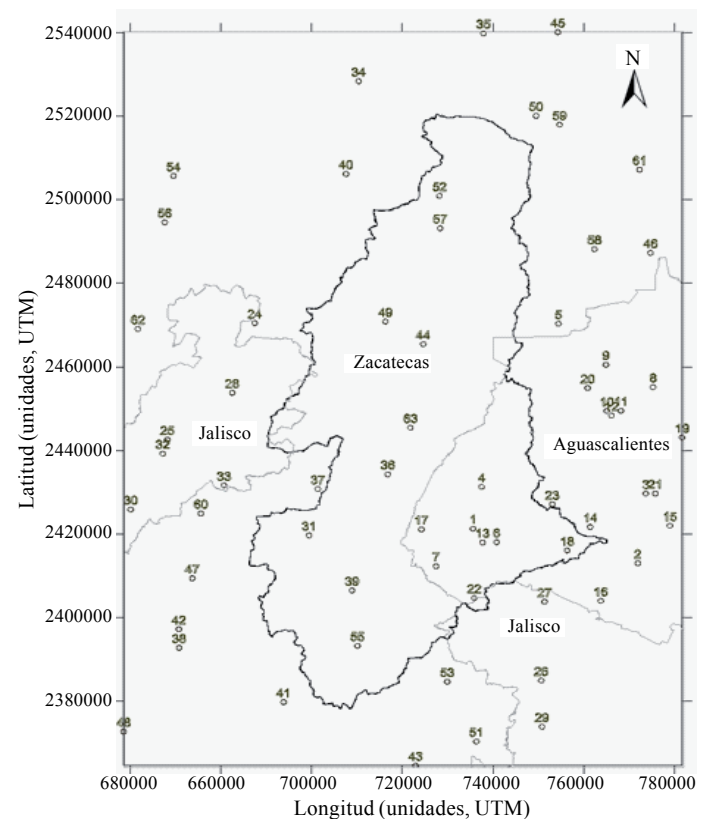
El estudio se realizó en el periodo 1949-1984, seleccionándose el año 1984 por contar con información completa para las estaciones del área de estudio; la información se organizó por estación y por día. Se eliminaron los días que no presentaron lluvias en la cuenca, quedando sólo 105 días con datos de precipitación en al menos una estación. Para validar la aplicación de la metodología se analizaron 105 eventos, pero de estos sólo se presentan dos eventos de precipitación contrastante en la cuenca estudiada que corresponden a los días 111 y 149. Con los datos de la lluvia ERIC III de las 63 estaciones (Cuadro 1), se construyó el variograma experimental para ambos eventos, apoyándose con el software Geopack (USDA/ARS, 1990).

### Obtención del variograma

Como parte metodológica se describen los pasos, presentados a detalle por Samper y Carrera (1990), para la construcción del variograma, ajuste del modelo, validación y su aplicación. Durante la construcción del variograma experimental, inicialmente se utilizaron los valores de la lluvia expresada como la variable *z* de las estaciones pluviométricas, que cubren el área de

## MATERIALS AND METHODS

The analysis was carried out on the Juchipila river basin, along with the Calvillo river and tributaries of the Santiago river, that make up one of the most important hydrological systems of the states of Zacatecas and Aguascalientes, Mexico. The basin is located in a semiarid zone, with an area of 5 640 km<sup>2</sup>. Rainfalls take place mostly from July to September; it normally rains in the entire basin few days a year. The information on daily rainfall, which is the basis for this study, comes from 63 different weather stations (Figure 1).



**Figura 1. Localización de las estaciones climatológicas usadas para la cuenca del río Juchipila.**

**Figure 1. Location of the weather stations used for the Juchipila river basin.**

The Juchipila river basin was digitized in an orthogonal projection; longitude and latitude are presented in the UTM (Universal Transversal Mercator) coordinate system, as shown in Figure 1. The source of these rainfall data was the computer package ERIC III (IMTA, 2009). The official code of the stations used is presented in Table 1; latitude and longitude are also included in UTM units.

**Cuadro 1. Clave de las estaciones meteorológicas usadas del ERIC III (IMTA, 2009).**  
**Table 1. ERIC III codes of the weather stations used (IMTA, 2009).**

Número	Estación	Latitud (UTM)	Longitud (UTM)	Número	Estación	Latitud (UTM)	Longitud (UTM)
Aguascalientes				Zacatecas			
1	1003	735586	2421290	34	32002	710350	2528380
2	1005	771919	2413010	35	32003	737890	2539860
3	1007	773702	2429660	36	32013	716799	2434320
4	1009	737504	2431290	37	32017	701351	2430790
5	1010	754436	2470330	38	32019	670770	2392780
6	1011	740805	2418050	39	32025	708901	2406520
7	1012	727444	2412310	40	32026	707573	2506190
8	1014	775322	2455170	41	32029	693823	2379790
9	1017	764912	2460530	42	32032	670723	2397210
10	1018	765099	2449460	43	32039	722930	2364620
11	1019	768195	2449510	44	32042	724616	2465440
12	1021	766150	2448370	45	32047	754303	2540130
13	1023	737703	2418000	46	32051	774753	2487300
14	1027	761430	2421700	47	32057	673695	2409420
15	1030	779005	2422000	48	32070	658544	2372730
16	1074	763790	2404010	49	32073	716293	2470860
17	1078	724216	2421130	50	32086	749503	2520110
18	1080	756350	2416070	51	32097	736335	2370350
19	1083	781731	2443100	52	32099	728214	2500940
20	1089	760879	2454930	53	32105	729908	2384660
21	1090	775769	2429700	54	32106	669544	2505720
22	1091	735832	2404680	55	32111	710110	2393250
23	1095	753071	2427100	56	32113	667610	2494620
Jalisco				57	32119	728330	2493190
24	14003	687447	2470490	58	32120	762380	2488190
25	14026	668172	2442580	59	32121	754676	2517980
26	14101	750630	2384960	60	32124	675592	2424940
27	14127	751371	2403810	61	32126	772340	2507200
28	14135	682490	2453820	62	32136	661705	2469090
29	14145	750801	2373890	63	32138	721806	2445460
30	14153	660085	2425890				
31	14318	699425	2419690				
32	14331	667175	2439250				
33	14347	680682	2431650				

la cuenca; paso seguido, se seleccionó una dirección angular  $\theta$  que presenta el mayor gradiente pluviométrico, así como la selección de la distancia o lag,  $h$  para lo cual se calcula la semivarianza (\*) para valores de  $h, 2h, 3h, \dots, nh$ , de acuerdo a la ecuación 1; y finalmente, se grafica  $\gamma^*$  para diferentes distancias espaciales entre dos puntos  $x$ , expresados como valores de  $h, 2h, 3h, \dots, nh$ .

The study was performed in the period between 1949 and 1984. The latter was chosen since there was complete information on the stations in the study area. The information was organized by station and by day, and the days with no rainfall in the basin were eliminated, leaving only 105 days with rainfall data in at least one station. To validate the application of the methodology, 105 events were analyzed, out of which only two

$$\gamma^*(h) = \frac{1}{2N(h)} \sum_{|x_i - x_j| = |h|}^{nh} [z(x_i) - z(x_j)]^2 \quad 1)$$

La interpolación entre los puntos del variograma experimental, no garantiza la existencia tampoco unicidad de la solución del sistema de krigado, por lo que hay que proponer un modelo de ajuste al variograma experimental (Sampler y Carrera, 1990). Para este trabajo, se ajustó el variograma a un modelo esférico ampliamente usado por lo práctico, flexible y sencillo para estimar los parámetros  $\beta$  y  $\alpha$ , que fueron utilizados para interpolar los campos de tormenta por el método del krigado. El modelo esférico tiene un comportamiento lineal en el origen; la pendiente es igual a  $1.5 \alpha/\beta$  y representa fenómenos continuos pero no diferenciables (Chua y Bras, 1982) como es el caso de la lluvia. Las expresiones matemáticas del modelo esférico de ajuste se presentan en la ecuación 2.

$$\gamma(h) = \alpha \left( \frac{3}{2} \frac{|h|}{\beta} - \frac{|h|^3}{2\beta^3} \right) \quad |h| \leq \beta \quad 2)$$

$$\gamma(h) = \alpha \quad |h| > \beta$$

Donde, el parámetro  $\alpha$  es el rango y define la distancia  $h$  a la cual el valor del semivariograma es estacionario y en consecuencia refleja la dependencia espacial, también se le conoce como alcance; y  $\beta$  es el umbral que define la distancia a partir de la cual el variograma permanece fijo, y se le conoce como meseta y representa la máxima variabilidad entre pares de observaciones próximas.

Para modelar la distribución espacial de la variable en la cuenca una vez resuelto el ajuste de los datos observados al modelo esférico y estimados los parámetros de ajuste  $\alpha$  y  $\beta$ , se desarrolló una interfaz computacional para facilitar la interpolación mediante krigado. Esta interfaz se basa en la solución del método de krigado (ecuación 3), para cada uno de los puntos de la malla previamente seleccionada y se resuelve con el modelo ajustado, obteniéndose el valor de la lluvia en todos los puntos. En forma matricial, este sistema tiene la siguiente expresión: Si  $-\gamma(h)$  es condicionalmente definida positiva, la matriz del sistema es siempre regular, por lo que siempre existe la solución (Sampler y Carrera, 1990).

(111 and 149). With rain data from ERIC III of the 63 stations (Table 1), the experimental variogram was created for both events, using the software Geopack (USDA/ARS, 1990).

### Obtaining the variogram

As it starts off methodological describe the steps, presented to detail by Samper and Carrera (1990), for the construction of variogram, it fits of the model, validation and its application. During the construction of the experimental variogram, the values of rain were initially used, expressed as variable  $z$  of the rain stations that cover the area of the basin. Next, an angular direction  $\theta$  was chosen which presents the greatest rainfall gradient, as well as the selection of the distance or lag,  $h$ , for which the semivariance ( $\gamma^*$ ) is calculated for values of  $h, 2h, 3h, \dots, nh$ , according to equation 1. Finally  $\gamma^*$  is graphed for different distances in space between two points  $x$ , expressed as values of  $h, 2h, 3h, \dots, nh$ .

$$\gamma^*(h) = \frac{1}{2N(h)} \sum_{|x_i - x_j| = |h|}^{nh} [z(x_i) - z(x_j)]^2 \quad 1)$$

The interpolation between the points of the experimental variogram does not guarantee the existence or the uniqueness of the solution of the Kriging system; therefore a model of adjustment to the experimental variogram must be proposed (Sampler and Carrera, 1990). For this study, the variogram was adjusted to a spherical model, widely used due to its practicality, flexibility and simplicity for calculating parameters  $\beta$  and  $\alpha$ , which were used to interpolate the storm fields by Kriging. The spherical model has a linear behavior in the origin; the slope is equal to  $1.5 \alpha/\beta$  and represents continual, but not differentiable, phenomena (Chua and Bras, 1982), such as rain. The mathematical expressions of the spherical adjustment model are shown in equation 2.

$$\gamma(h) = \alpha \left( \frac{3}{2} \frac{|h|}{\beta} - \frac{|h|^3}{2\beta^3} \right) \quad |h| \leq \beta \quad 2)$$

$$\gamma(h) = \alpha \quad |h| > \beta$$

Where parameter  $\alpha$  is the range and defines the distance  $h$  at which the value of the semivariogram is stable, it consequently reflects the spatial dependence and is known as the range. On the other hand,  $\beta$  is the threshold that defines the distance from which the variogram remains static, and it is known as a plateau and represents the maximum variability between pairs of nearby observations.

$$\begin{pmatrix} 0 & \gamma_{12} & \gamma_{13} & \dots & \gamma_{1n} & 1 \\ \gamma_{21} & 0 & \gamma_{23} & \dots & \gamma_{2n} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \gamma_{n3} & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\text{Donde: } \gamma_{ij} = \gamma(x_i - x_j) \text{ y } \gamma_i = \gamma(x_i - x) \quad (4)$$

Resolviendo el sistema matricial (ecuación 3) se determinan los parámetros  $\lambda_i$ , donde  $\sum_i \lambda_i = 1$ , permiten estimar el valor de la precipitación  $Z^*(x_0)$  al resolverse la ecuación 5.

$$Z^*(x_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i z(x_i) \quad (5)$$

Para el método de krigeado se propone una interpolación esférica, sin sesgo y de error cuadrático medio mínimo expresado por las expresiones 6 y 7.

$$E [z^*(x_0) - z(x_0)] = 0 \quad (6)$$

$$E \{ [z^*(x_0) - z(x_0)]^2 \} \text{ mínima} \quad (7)$$

Una vez caracterizado el campo de tormenta de la distribución espacial de la lluvia sobre la cuenca, se calcula la precipitación media con la ecuación 8. Para ello se generó otra aplicación computacional "lluvia-promedio":

$$PMD_i = \frac{\sum_{j=1}^n p_j \cdot a_j}{A_T} \quad (8)$$

Donde:  $PMD_i$  = precipitación media del día  $i$  (mm);  $P_j$  = precipitación en el punto de la  $j$  de la malla en mm;  $a_j$  = área de la celda o cuadro  $j$  (km<sup>2</sup>);  $A_T$  = Área total de la cuenca (km<sup>2</sup>).

Para estimar la lluvia media sobre la cuenca fue necesario discretizar el área de interés en celdas o elementos cuadráticos; para este ejercicio, se seleccionaron celdas de 6 km por lado. Se consideraron las líneas o divisiones de la cuenca con cuencas externas e internas. Esta subdivisión fue realizada manualmente. De este modo, en cada elemento parcial queda caracterizada la variable y el porcentaje de superficie que ocupa respecto al área total. Para cada evento se determina la distribución espacial de la lluvia con el método de interpolación por krigeado.

To model the spatial distribution of the variable in the basin after the adjustment of the data observed to the spherical model and estimating the adjustment parameters and  $\beta$ , a computer interphase was created to enable interpolation using Kriging. This interphase is based on the solution to the method of Kriging (equation 3), for each of the points of the mesh previously selected, and solved with the adjusted model, thus obtaining the value for rain at all points. As a matrix, this system contains the expression: if  $-\gamma(h)$  is conditionally defined as positive, the matrix of the system will always be regular, therefore the solution will always exist (Sampler and Carrera, 1990).

$$\begin{pmatrix} 0 & \gamma_{12} & \gamma_{13} & \dots & \gamma_{1n} & 1 \\ \gamma_{21} & 0 & \gamma_{23} & \dots & \gamma_{2n} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \gamma_{n3} & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\text{Where: } \gamma_{ij} = \gamma(x_i - x_j) \text{ y } \gamma_i = \gamma(x_i - x) \quad (4)$$

By solving the matrix system (equation 3) the parameters  $\lambda_i$  are determined, where  $\sum_i \lambda_i = 1$ , helps calculate rainfall  $Z^*(x_0)$  when solving equation 5.

$$Z^*(x_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i z(x_i) \quad (5)$$

For the Kriging method, a spheric interpolation is proposed, without any bias and a minimum average quadratic error expressed by expressions 6 and 7.

$$E [z^*(x_0) - z(x_0)] = 0 \quad (6)$$

$$E \{ [z^*(x_0) - z(x_0)]^2 \} \text{ mínima} \quad (7)$$

Once the storm field of the spatial distribution of the rain on the basin is defined, the average rainfall is calculated using equation 8. For this purpose, another computer application "rain-average" was created:

$$PMD_i = \frac{\sum_{j=1}^n p_j \cdot a_j}{A_T} \quad (8)$$

Where:  $PMD_i$  = average rainfall of the day  $i$  (mm);  $P_j$  = rainfall in point  $j$  of the mesh in mm;  $a_j$  = area of cell or square  $j$  (km<sup>2</sup>);  $A_T$  = total area of the basin (km<sup>2</sup>).

Un parámetro que puede ser asociado a la construcción de campos de tormenta es el estimador de la varianza de la muestra y se considera en esta investigación como criterio de calidad del ajuste. La varianza se determina por la ecuación 9.

$$S_e^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - x_{ei})^2}{n-2} \quad 9)$$

Donde:  $S_e^2$  = varianza;  $x_i$  = precipitación de la estación  $i$ -ésima;  $x_{ei}$  = precipitación interpolada para la estación  $i$ .

Para determinar la precipitación interpolada se efectúa una validación cruzada que consiste en omitir los registros de una estación y modelarlos con base en el resto de las estaciones; para comparar los valores observados  $x_i$  con los interpolados  $x_{ei}$ , mediante el cálculo de los errores  $e = x_i - x_{ei}$  de los eventos, para finalmente calcular la variancia de los errores con la ecuación 9.

Por último, se estimó la precipitación media sobre la cuenca con técnicas convencionales, como son: el método aritmético, los polígonos de Thiessen y el método de isoyetas (gráfico), con la finalidad de compararlos con el método del krigado.

## RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Los parámetros resultantes del ajuste al modelo esférico para el día 111 fueron  $\alpha = 19.31$  y  $\beta = 37\,663$ ; para un segundo evento (día 149), los valores resultantes fueron  $\alpha = 42.5$  y  $\beta = 25\,892$ . Se observa que el variograma experimental (Figura 2) tiene una plataforma definida, que no tiene derivada y no existe discontinuidad en el origen; por lo tanto, no tiene efecto pepita.

Sólo con el fin de apreciación visual (Figura 2), al variograma experimental se ajustó también los modelos: exponencial (ecuación 10) y potencial (ecuación 11), donde  $\alpha$  y  $\beta$  son parámetros de ajuste.

$$\gamma(h) = \alpha \left( 1 - \exp\left(-\frac{|h|}{\beta}\right) \right) \quad 10)$$

$$\gamma(h) = \alpha |h|^\beta \quad 11)$$

En el Cuadro 2 se presentan los valores del variograma experimental, para los tres modelos estudiados (día 111).

To calculate the average rainfall on the basin, the area of interest had to be discretized in cells or quadratic elements. For this exercise cells were selected, measuring 6 km per side. The lines or divisions of the basin were considered with external and internal basins. This subdivision was made by hand. In this way, in each partial element, the variable and the percentage of the surface occupied in respect to the total area were defined. For each event, the spatial distribution of rain is determined using the interpolation method by Kriging.

A parameter that can be related to the construction of storm fields is the simple variance estimator, considered in this study as an adjustment quality adjustment. The variance is determined by equation 9.

$$S_e^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - x_{ei})^2}{n-2} \quad 9)$$

Where:  $S_e^2$  = variance;  $x_i$  = rainfall in the  $n$ th station;  $x_{ei}$  = interpolated rainfall for station  $i$ .

To determine the interpolated rainfall a cross-validation is performed, which consists of omitting the records of one station and model them based on the rest of the stations. Observed values  $x_i$  are then compared with the interpolated  $x_{ei}$  using the error calculation  $e = x_i - x_{ei}$  of the events, to finally calculate the variance of the errors with equation 9.

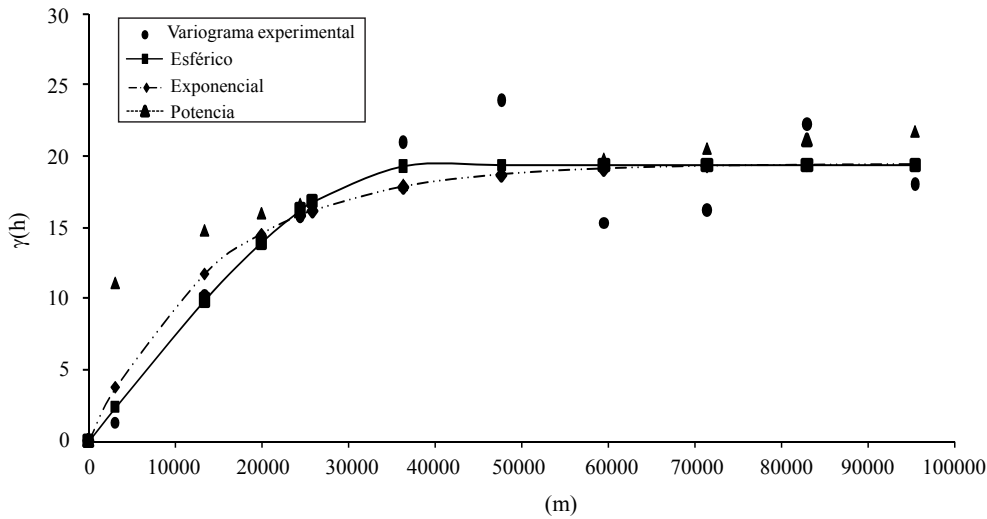
Finally, the average rainfall on the basin was calculated using conventional techniques, such as arithmetic method, the Thiessen diagrams and the isohyet method (graphic), in order to compare them with the method of Kriging.

## RESULTS AND DISCUSSION

The parameters that result from the adjustment to the spherical model for day 111 were  $\alpha = 19.31$  and  $\beta = 37\,663$ ; for a second event (day 149), resulting values were  $\alpha = 42.5$  and  $\beta = 25\,892$ . It is observed that the experimental variogram (Figure 2) has a defined platform, which has no derivative and there is no discontinuity at the origin; therefore, there is no nugget effect.

With the mere objective of visual appreciation (Figure 2), the following models were adjusted to the experimental variogram: exponential (equation 10) and potential (equation 11), where  $\alpha$  and  $\beta$  are adjustment parameters.





**Figura 2. Variograma experimental y modelos de ajuste.**  
**Figure 2. Experimental variogram and adjustment models.**

**Cuadro 2. Valores del variograma experimental y ajustado.**  
**Table 2. Valores del variogram experimental y ajustado.**

Variograma experimental		Modelo de ajuste variograma		
		Esférico	Exponencial	Potencial
h (m)	$\gamma(h)$	$\gamma(h)$	$\gamma(h)$	$\gamma(h)$
0	0	0	0	0
3 105	1.29	2.38	3.75	11.07
13 420	10.28	9.89	11.72	14.77
24 469	15.67	16.18	15.82	16.62
36 382	20.94	19.28	17.82	17.97
47 715	23.89	19.35	18.68	18.95
59 541	15.26	19.35	19.08	19.8
71 466	16.21	19.35	19.25	20.52
83 004	22.23	19.35	19.33	21.14
95 490	18.02	19.35	19.37	21.73

Con los datos de la distribución de lluvia o campo de tormenta (Figura 3), se aplicó la ecuación 8 para obtener la lluvia media sobre la cuenca y para el día 111 fue de 0.609 mm y 1.7 mm para el día 149.

**Análisis en la estimación de campos de tormenta con modelo esférico**

El análisis consistió en explorar el campo de tormenta buscando su relación con la precipitación media diaria. Se inicia con analizar la sensibilidad del modelo respecto al parámetro  $\alpha$ ; éste se hizo variar con valores de  $\pm 5$  y

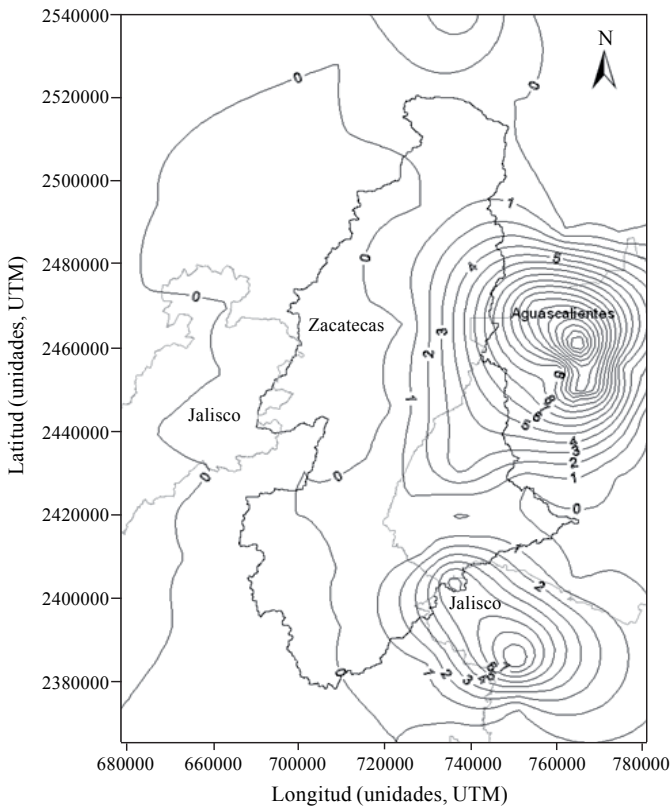
$$\gamma(h) = \alpha \left( 1 - \exp\left(-\frac{|h|}{\beta}\right) \right) \tag{10}$$

$$\gamma(h) = \alpha |h|^\beta \tag{11}$$

Table 2 presents the values of the experimental variogram, for the three models studied (day 111).

With the rain distribution data or storm field (Figure 3), equation 8 was used to calculate the average rainfall on the basin, which was 0.609 mm for day 111 and 1.7 mm for day 149.

considerando  $\beta = 37\ 663$  constante; el valor de la lluvia media con este análisis no varió. Lo anterior significa que el valor de lluvia media, no es función de la variación de  $\alpha$  cuando  $\beta$  es constante. Un segundo análisis fue mantener el parámetro  $\alpha = 19.31$  constante, y variar  $\beta$  con valores de  $\pm 5\ 000$ , los resultados se muestran en el Cuadro 3.



**Figura 3. Caracterización del campo de tormenta en mm para el día 111.**  
**Figure 3. Characterization the storm field in mm for day 111.**

**Analysis of the calculation of storm fields with a spherical model**

The analysis consisted of exploring the storm field in search for its relation with the daily average rainfall. First, we calculate the sensitivity of the model regarding parameter  $\alpha$ , which varied with values of  $\pm 5$  and considering  $\beta = 37\ 663$  constant. The value of the average rainfall with this analysis did not vary, which means that the value of average rainfall is not a function of the variation of  $\alpha$  when  $\beta$  is constant. A second analysis was to keep the parameter  $\alpha = 19.31$  constant, and to vary  $\beta$  with values of  $\pm 5\ 000$ . Results are shown in Table 3.

With the pairs of values  $\beta$  and average rain, for both event analyzed, the function of variation is obtained for both events analyzed. The values of the function were graphed (Figure 4), and a minimum value is observed, that is the value that makes the relation optimal. Figure 4 shows that as  $\beta$  increases from the optimal value, so does the value of the average rainfall until reaches the determined value of average rainfall by the linear Kriging, which indicates the influence of the distance of the model’s threshold. For example, for day 111, average rainfall has a variation of over 41%, and for day 149, it is 24% over the optimum (minimum value).

**Comparison of results between methods of average rainfall**

In order to make a quantitative comparison of the results, the average rainfall on the basin was calculated using four conventional methods: arithmetical average, Thiessen diagrams, isohyet method and linear Kriging method.

**Cuadro 3. Valores de lluvia media diaria (mm) para valores variables de  $\beta$  (m) y un valor  $\alpha = 10.31$ .**  
**Table 3. Values of average daily rainfall (mm) for variable values of  $\beta$  (m) and a value of  $\alpha = 10.31$ .**

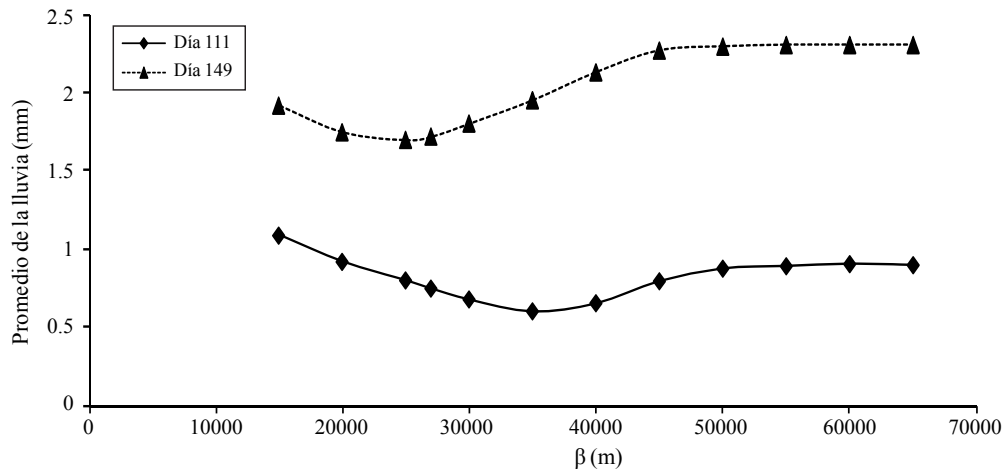
$\beta$ (m)	15 000	20 000	25 000	27 000	30 000	35 000	40 000	45 000	55 000
Día <sub>(111)</sub>	1.09	0.92	0.8	0.747	0.677	0.6	0.652	0.795	0.892
Día <sub>(149)</sub>	1.917	1.748	1.7	1.721	1.804	1.952	2.129	2.268	2.303

Con los pares de valores  $\beta$  y lluvia media, para ambos eventos analizados se obtiene la función de variación. Los valores de la función se graficaron (Figura 4), y se observa que hay un valor mínimo que resulta ser el valor que hace óptima la relación. Se observa en la Figura 4 que al aumentar  $\beta$  partiendo del valor óptimo, aumenta el valor de la precipitación media hasta llegar

Comparing the results obtained by applying all five methods (Table 4), it was found that the average rainfall determined with the proposed methodology was the lowest, and when taking it as the reference, it turned out that the value determined by the linear Kriging lineal is higher than 41%; the value determined by the isohyet method is 19.5% higher; that for

al valor determinado de lluvia media por el krigado lineal, lo cual indica la influencia de la distancia del umbral del modelo; por ejemplo, para el día 111 la precipitación media tiene una variación de 41% mayor, y para el día 149, es de 24% mayor respecto al óptimo (valor mínimo).

the Thiessen diagrams 39%; and the arithmetic method 8%. These values are for the first event analyzed; a similar tendency was presented for the second event. In regard to the result of the isohyet (graph) and linear Kriging methods, it should be equal, since the isohyets are the same; hence the difference in



**Figura 4. Lluvia media diaria en mm en función del parámetro beta  $\beta$  (m).**

**Figure 4. Average daily rainfall in mm according to parameter  $\beta$  (m).**

### Comparación de resultados entre métodos de la precipitación media

Con fines de realizar una comparación cuantitativa de los resultados se realizó el cálculo de la precipitación media sobre la cuenca con cuatro métodos convencionales: promedio aritmético, polígonos de Thiessen, método de las isoyetas y método del krigado lineal.

Realizando la comparación de los resultados obtenidos aplicando los cinco métodos (Cuadro 4), se encontró que la precipitación media determinada con la metodología propuesta fue la menor, y al tomarlo como referencia resultó, que el valor determinado por el krigado lineal es superior 41%; el determinado por el método de las isoyetas es mayor 19.5%; el de los polígonos de Thiessen 39%; y el método aritmético 8%, estos valores son para el primer evento analizado, se presenta una tendencia similar para el segundo evento. Respecto al resultado por los métodos de las isoyetas (gráfico) y krigado lineal, debería ser el mismo, ya que las isoyetas son las mismas, por lo que la diferencia en la estimación de la media, se debe al error asociado con la representación manual de la isoyeta media tal como se realiza en la práctica (Figura 5).

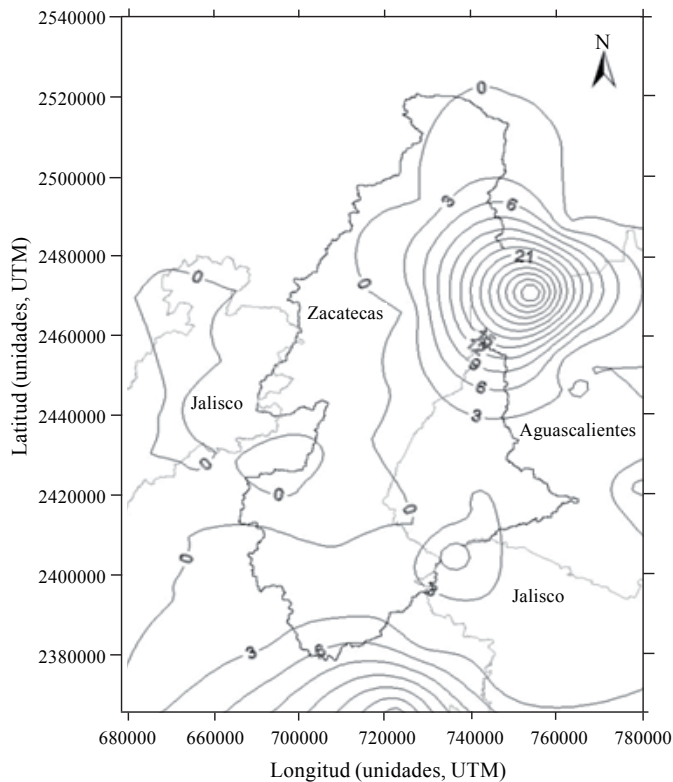
the estimation of the average is due to the error related to the manual representation of the average isohyet, as in the practice (Figure 5).

**Cuadro 4. Precipitación media en mm por cinco métodos.**  
**Table 4. Average rainfall in mm using five methods.**

Método	Precipitación media (mm)	
	Día <sub>(111)</sub>	Día <sub>(149)</sub>
Polígonos de Thiessen	0.834	1.797
Método de las isoyetas gráfico	1.117	2.45
Método krigado lineal	0.852	2.1
Método krigado esférico	0.601	1.7
$\bar{X}$	0.65	1.68

### Variance analysis

This analysis is only presented for qualitative purposes, since the suppression of any value of the analyzed event leads it to become another event, which will require other parameters of the spherical model. The variance of the error of the storm field, determined with the Kriging method, using the spherical model, is lower than the one



**Figura 5. Caracterización del campo de tormenta en mm para el día 149.**

**Figure 5. Definition of the storm field in mm for day 149.**

### Análisis de la varianza

Este análisis se presenta sólo con fines cualitativos, ya que al suprimir cualquier valor del evento analizado este se convierte en otro evento, para lo cual será necesario otros parámetros del modelo esférico. Se observa que la varianza del error del campo de tormenta, determinado por el método del krigeado usando el modelo esférico es menor, que el determinado por el campo de tormenta usando un krigeado lineal (Cuadro 5) y para los otros métodos no es aplicable por las razones mencionadas.

De manera visual se presentan los mapas del campo de tormenta de los dos eventos analizados (Figuras 3 y 5), aunque son dos eventos independientes representados por el mismo modelo de variograma tipo esférico, el método del krigeado esférico genera los valores mínimos de la precipitación media sobre la cuenca (Cuadro 4). En consecuencia, el impacto del uso de la metodología propuesta es que el método del krigeado esférico no sobrestima la precipitación media sobre una cuenca. Lo anterior es de suma importancia en estudios sobre

determined by the storm field using a linear Kriging (Table 5), and for the other methods it is not applicable, due to the reasons mentioned above.

### Cuadro 5. Varianza del error (mm<sup>2</sup>) por evento y modelo.

**Table 5. Error variance (mm<sup>2</sup>) per event and model.**

Evento	Modelo krigeado esférico	Modelo krigeado lineal
Día <sub>(111)</sub>	7.9	8.2
Día <sub>(149)</sub>	37.84	39.47

The maps of the storm fields of both events analyzed are presented visually (Figures 3 and 5). Although they are two independent events represented by the same spherical variogram models, the spherical Kriging model creates the minimum values of the average rainfall over the basin (Table 4). Consequently, the impact of the use of the proposed methodology is that the spherical Kriging method does not overestimate annual rainfall over a basin. This is crucial in studies on the water management of a basin to quantify volumes of rain with greater certainty. Results indicate that the traditional methods overestimate the average rainfall, which has repercussions on the making of decisions for the sustainable management of the water resources of a basin.

### CONCLUSIONS

The storm field ascribable to the Juchipila river basin, represented by the spherical model has the variogram among those known as geometric anisotropy, since with the variation of  $\alpha$  average rainfall does not change; and for different values of parameter  $\alpha$ , range  $\beta$  does not change. Therefore, a storm field can be represented with a spherical variogram, so there is a single relation of such a field with the average rainfall of a basin, and it also has the characteristics that the value is minimum in comparison to those obtained with traditional methods.

It is therefore recommended, when calculating the water resources of an area, its areas of irrigation and rainfall agriculture be included, and when requesting the spatial distribution of rainfall, the method suggested be used, since a basin can be defined using a storm field, more commonly known as a rain distribution pattern.

*End of the English version*



manejo hídrico de una cuenca para cuantificar volúmenes precipitados con mayor certidumbre. Los resultados indican que los métodos tradicionales sobreestiman el valor de la lluvia media, lo cual tiene repercusiones en la toma de decisiones para el manejo sustentable de los recursos hídricos de una cuenca.

## CONCLUSIONES

El campo de tormenta atribuible a la cuenca del río Juchipila, y representado por el modelo esférico, tiene el variograma entre los llamados de anisotropía geométrica, ya que con la variación de  $\alpha$  la precipitación media no cambia; y para valores diferentes del parámetro  $\alpha$ , se optimiza el rango  $\beta$ . Por lo tanto, se puede representar un campo de tormenta por medio de un variograma tipo esférico, entonces existe una relación única de dicho campo con la lluvia media de una cuenca, además tiene las características que el valor es mínimo a compararlos con los obtenidos con métodos tradicionales.

Por ello, se recomienda que al realizar la estimación de los recursos hídricos de una zona, que incluya sus áreas de agricultura de riego y temporal y demande conocer la distribución espacial de la precipitación utilice el método propuesto, ya que se puede caracterizar una cuenca por medio de un campo de tormenta o más conocido como un patrón de distribución de la lluvia.

## LITERATURA CITADA

- Bastin, G.; Lorent, B.; Duqué, C. and Gevers, M. 1984. Optimal estimation of the average areal rainfall and optimal selection of rain gauge locations, *Water Resour. Res.* 20:463-470.
- Burrough, P. A. and McDonnell, R. A. 1998. Principles of geographical information systems. Oxford University Press. New York. 346 p.
- Chua, S. H. and Bras, L. R. 1982. Optimal estimator of mean areal precipitation in regions of orographic influence. *J. Hydrol.* 57:23-48.
- Cisneros, I. H. L.; Bouvier, Ch. y Domínguez, M. R. 1998. Aplicación del método Kriging en la construcción de campos de tormenta en la ciudad de México. *Ingeniería hidráulica en México XVI*:5-14 pp.
- Damant, C.; Austin, G. L.; Bellon, A. and Broughton, R. S. 1983. Errors in the Thiessen technique for estimating areal rain amounts using weather radar data. *J. Hydrol.* 62:81-94.
- Goovaerts, P. 2000. Geostatistical approaches for incorporating elevation into the spatial interpolation of rainfall. *J. Hydrol.* 228:113-129.
- Instituto Mexicano de Tecnología del Agua (IMTA). 2009. ERIC III. Extractor rápido de información climatológica. Base de datos climatológica. Instituto Mexicano de Tecnología del Agua. México.
- Lebel, T. and Bastin, G. 1985. Variogram identification by the mean-squared interpolation error method with application to hydrology fields. *J. Hydrol.* 77:31-56.
- Mirás-Avalos, J. M.; Paz-González, A.; Vidal-Vázquez, E. and Sande-Fouz, P. 2007. Mapping monthly rainfall data in Galicia (NW Spain) using inverse distances and geostatistical methods. *Advances in Geosciences.* 10:51-57.
- Morin, G. et Paquet, P. 1995. Le modèle de simulation de quantité et de qualité cequeau, guide de l'utilisateur, Version 2.0 pour Windows. INRS-Eau, Rapport de Recherche n° 435. Québec. 309 p.
- Sampler, F. J y Carrera, J. 1990. Geostatística, aplicaciones a la hidrogeología subterránea. Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería. Barcelona. 484 p.
- United States Department of Agriculture-Agricultural Research Service (AUSDA-ARS). 1990. User's manual for the GEOPACK (Version 1.0), U. S. Environmental Protection Agency Ada. Oklahoma. 80 p.