

Optimización de los diámetros de las tuberías de una red de distribución de agua mediante algoritmos de recocido simulado

Héctor Sanvicente Sánchez

Instituto Mexicano de Tecnología del Agua

Juan Frausto Solís

Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, Campus Cuernavaca, México

La determinación de los diámetros de las tuberías en el diseño de menor costo de una red de distribución de agua es un problema con restricciones, fuertemente no lineal, con múltiples óptimos locales, cuyo espacio de soluciones posee muchas regiones no factibles. El algoritmo heurístico de optimización llamado recocido simulado (RS) es un método global que ha sido usado para hacer búsquedas estocásticas en el espacio de soluciones del problema, mejorando el desempeño de otros métodos. Este trabajo propone una formulación penalizada del problema que permite al algoritmo RS, entre otras ventajas, la posibilidad de que la caminata estocástica que efectúa sea menos sinuosa al cruzar regiones no factibles. Este enfoque mejora la eficiencia del algoritmo RS para un mismo nivel de error en relación con su desempeño para una formulación clásica del problema con restricciones.

Palabras clave: redes de agua, sistemas de distribución de agua, recursos hídricos, optimización, optimización combinatoria, métodos estocásticos, recocido simulado, métodos de penalización.

Introducción

El diseño óptimo de sistemas de distribución de agua ha permanecido como un problema que no se ha resuelto de una manera eficiente debido a su complejidad. Yates *et al.* (1984) lo clasificaron como un problema *NP-hard* dentro de las ciencias computacionales, esto es, como un problema para el que no existe en la actualidad un algoritmo que lo resuelva en un tiempo acotado de forma polinómica con respecto al tamaño de la entrada de la instancia del problema y que, además, es al menos tan difícil de resolver como el más difícil de los problemas en la clase NP (problemas que pueden resolverse en un tiempo polinómico por una máquina de Turing no determinante). Sin embargo, su utilidad y beneficios lo mantienen como uno de los problemas más importantes dentro de la hidráulica.

El problema general consiste en diseñar y colocar tuberías para conducir agua (red de distribución) desde los puntos fuentes hasta los puntos demandantes, satisfaciendo sus requerimientos en cuanto a gasto y presión, y que el costo de construcción de la red sea mínimo. Esto implica tanto el establecimiento de la topología de la red como la determinación de los diámetros de las tuberías que la componen. El presente trabajo aborda únicamente la determinación óptima de los diámetros de las tuberías, suponiendo que la topología de la red es conocida, y lo resuelve mediante la aplicación del algoritmo heurístico de recocido simulado (RS) (Kirkpatrick *et al.*, 1983). El algoritmo RS trabaja de una manera iterativa, procurando mejorar en cada nueva iteración el valor de la función objetivo, aunque acepta deterioros en el costo mediante la aplicación del criterio de Metropolis (Metropolis *et al.*, 1953), lo que le permite escapar de mínimos locales.

Breve estado del arte

Los métodos para solucionar el problema de determinación de los diámetros de las tuberías de una red con topología dada pueden dividirse en dos: a) aquellos que requieren la simulación de la red y b) los que incorporan las ecuaciones de continuidad y conservación de la energía dentro de un modelo de optimización integrado (Walski, 1985). En lo que respecta a los métodos que emplean simulación, la metodología general de trabajo es la siguiente: a partir de una solución propuesta inicial, identificar secciones o tramos críticos de la red en los cuales se altera la solución, de manera que al final de un proceso iterativo se tenga una solución factible de costo mínimo. La determinación de los tramos críticos y el cómo éstos deben ser alterados se basa, por lo general, en reglas empíricas y heurísticas (Sanvicente, 1998; Walski, 1985). Tres de las metodologías más empleadas en simulación son: a) los que a partir de una solución propuesta inicial, muy económica, pero no factible, la van modificando a través de alteraciones que impliquen el menor incremento en costo posible y que a la vez la transformen en una solución factible, b) los que a partir de una solución inicial factible, aunque por lo general cara, buscan las alteraciones que reduzcan lo máximo posible su costo sin volverla una solución no factible y c) los que combinan la simulación con alguna estrategia de optimización, esto es, a partir de una solución dada se realiza una búsqueda dentro de la vecindad de dicha solución hasta encontrar una solución factible de costo mínimo. En cuanto a los métodos que efectúan un modelo de optimización integrado, por lo general quedan atrapados en un óptimo local. Algunas de las técnicas de solución empleadas en optimización son programación lineal (LP), programación no lineal (NLP), métodos de Lagrange, gradiente, ramificar y acotar, etcétera (Sanvicente, 1998; Fujiwara y Khang, 1990; Walski, 1985).

A continuación se describen y analizan algunos de los métodos que se han empleado para resolver este problema:

- LPG (Alperovits y Shamir, 1977) es uno de los métodos de solución más conocido. LPG modela el problema mediante una formulación continua y lo divide en dos subproblemas, uno lineal y otro no lineal, los cuales se solucionan mediante LP y gradiente, respectivamente. Los subproblemas son alternativa e iterativamente resueltos hasta que se encuentra una solución óptima. Otro método que sigue este mismo esquema es el desarrollado por Fujiwara y Khang (1990), el cual

resuelve un problema convexo y otro cóncavo, y los dos métodos, el LPG y el de Fujiwara y Khang (1990), tienen la desventaja de quedar atrapados en óptimos locales. Para evitar este entrapamiento, Loganathan *et al.* (1995) utilizan la descomposición del método LPG, pero resuelven el problema no lineal mediante adaptaciones a modelos continuos de los algoritmos heurísticos de optimización combinatoria multi-inicio y RS, respectivamente. El primero de ellos trata de evitar óptimos locales iniciando búsquedas locales desde diferentes puntos y el segundo se explicará posteriormente.

- Cuando el modelo es formulado como un problema combinatorio, algunos de los métodos de solución propuestos son los que siguen: Gessler (1985) desarrolla un método enumerativo, el cual construye una lista de combinaciones de diámetros no funcionales que trata de desechar regiones de soluciones no factibles de una manera rápida. Sin embargo, dependiendo del tamaño del problema, éste puede ser muy lento computacionalmente, pues tiene que verificar una gran cantidad de posibles soluciones y de todos modos no garantiza encontrar el óptimo global. Tzatchkov y Alfonso (1991) proponen dos métodos que usan heurísticas para incrementar o disminuir los diámetros sólo en los tubos con las velocidades más altas o más bajas. Estos dos métodos en general garantizan encontrar una solución factible de una manera relativamente rápida, aunque no se sabe qué tan alejada está del óptimo general. Carrillo *et al.* (1998) presentan un método que utiliza una estrategia de búsqueda binaria usando la regla de oro de Fibonacci para mover dos fronteras de costo máximo y mínimo iniciales. Este método garantiza únicamente encontrar una buena solución factible. Savic y Walters (1996) usan algoritmos genéticos tanto en la determinación óptima de los diámetros de las tuberías como en el establecimiento de la topología de la red.

Estos métodos normalmente quedan atrapados en un óptimo local, aunque generalmente mejoran la calidad de la solución de técnicas tradicionales y su eficiencia computacional es aceptable. Sousa y Cunha (1998), y Sanvicente y Frausto (2000a y b) resuelven el problema usando RS. Entre las características del RS está la de poder escapar de óptimos locales y con convergencia asintótica el algoritmo obtiene el óptimo global. Sin embargo, sintonizado para que trabaje en tiempos computacionales aceptables, generalmente obtiene una solución próxima al óptimo global que mejora la calidad de la solución arrojada por técnicas tradicionales.

Modelado del problema

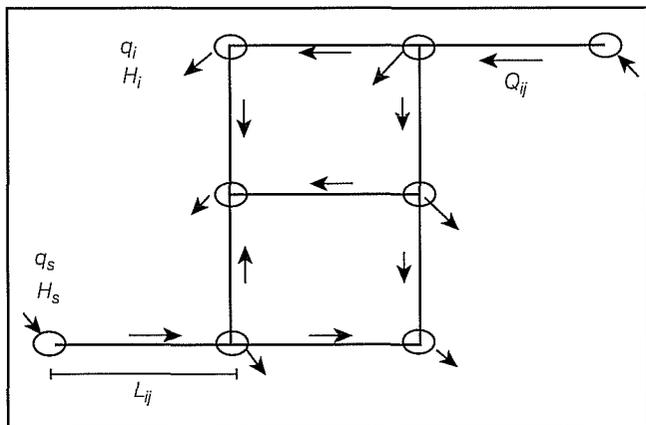
Las redes se modelan de la siguiente manera: los nudos representan a los puntos fuente y puntos de demanda, los tramos son las tuberías que conectan a dichos puntos. Cada nudo tiene asociada una variable de carga o nivel piezométrico (H_i) y otra de descarga (q_i) (gasto que se extrae o suministra a la red), mientras que los tramos tienen asociada una variable de gasto (Q_{ij}) y una de longitud (L_{ij}) (ver ilustración 1). Además, las redes pueden tener válvulas, bombas y cualquier otro dispositivo de control hidráulico, cuya operación puede ser ajustada a través de nudos y tramos virtuales.

El problema se modela de manera continua cuando se considera que una línea de conducción de agua —o tubería entre dos nudos— está formada por segmentos de tubos de diferente diámetro. Los diámetros se seleccionan a partir del conjunto de diámetros posibles $\{d_k\}$ que existe para cada tubería. Entonces, las variables de decisión son las longitudes de esos segmentos. El problema discreto considera que cada tubería está formada por tubos de un mismo diámetro $d_k \in \{d_k\}$ (por sencillez se dice que el tramo está formado por un solo tubo de diámetro d_k). En el caso discreto, la longitud del tramo determina la longitud del tubo de diámetro d_k , entonces el problema es tratado como un problema de optimización combinatoria a través de un resolvidor de redes. En este trabajo se considera un modelo discreto o combinatorio.

Solución de una red de flujo permanente

Una red de agua con flujo permanente donde se conoce al menos una carga, las descargas y las entradas en los

Ilustración 1. Esquematación de una red de distribución de agua.



puntos fuentes puede modelarse como sigue: la pérdida de carga que se establece en un tramo de una red durante el escurrimiento del agua es igual a la diferencia en el nivel piezométrico (o carga) que tiene lugar en la tubería entre sus dos nudos extremos (i, j).

$$\Delta H_{ij} = H_i - H_j \tag{1}$$

Por otro lado, se sabe que la pérdida de carga depende de la velocidad del flujo, del diámetro, longitud y rugosidad de la tubería, así como de la densidad ρ y viscosidad μ del fluido (el agua tiene una densidad uno y es un fluido no viscoso). La ecuación que establece una relación entre el gasto Q_{ij} y la pérdida de carga ΔH_{ij} en un tramo puede escribirse mediante la siguiente forma general:

$$\Delta H_{ij} = K_{ij} Q_{ij}^m \tag{2}$$

Donde i y j son los nudos extremos del tramo T_{ij} y el coeficiente K_{ij} y el valor del exponente m dependen de la ecuación de pérdida de carga usada. El cuadro 1 muestra los valores de K_{ij} y m para las tres principales ecuaciones usadas de pérdida de carga en un tramo.

El sentido del flujo depende de si éste va del nudo i al nudo j o viceversa. Si sustituimos el gasto dentro de la ecuación de continuidad en cada nudo se obtiene el siguiente sistema de N ecuaciones no lineales que modela a la red, donde los H_i ($i = 1, \dots, N$) son desconocidos.

$$\sum_{k=1}^n \text{sgn}(k) \phi_{ij}(k) \left(|H_i - H_{j(k)}| \right)^{1/m} + q_i = 0 \tag{3}$$

$i = 1, 2, \dots, N$

Cuadro 1. Valores de K_{ij} y m para las principales ecuaciones de pérdida de carga.

Fórmula	Coefficiente de rugosidad	K_{ij}	m
Darcy-Weisbach	f	$\delta \frac{f L_{ij}}{d_k^5}$	2
Manning	n	$\delta \frac{n L_{ij}}{d_k^{5.999}}$	2
Hazen-William	C_{HW}	$\delta \frac{L_{ij}}{C_{HW}^{1.852} d_k^{4.87}}$	1.852

Nota: el valor del coeficiente δ depende de las unidades usadas, por ejemplo para Darcy-Weisbach $\delta=0.0826$, para Manning $\delta=10.2936$ y para Hazen-William $\delta=10.68$, cuando ΔH_{ij} está dada en m, L_{ij} en m, Q_{ij} en m^3/s y d_k en m.

En la ecuación 3, $\phi_{i,j(k)} = (1/K_{ij})^{1/m}$, N es el número de nudos en la red; n es el número de tramos que se unen al nudo i ; $\text{sgn}(k)$ es una función que determina el sentido del flujo en el tramo k (éste se considera positivo si entra al nudo i y negativo si sale de él); $J(k)$ es una función que establece el nudo opuesto al nudo i en el tramo k , y q_i es la descarga en el nudo i , la cual es constante y conocida para nudos fuente y nudos de demanda (para un nudo fuente, q_i es el gasto que se introduce a la red y su signo es positivo, mientras que para nudos de demanda es el gasto que se extrae de la red y su signo es negativo).

Dispositivos de control hidráulico

Para redes complejas, los dispositivos de control hidráulico deben modelarse a través de nudos y tramos virtuales, de manera que el sistema de ecuaciones 3 continúe definiendo el funcionamiento de la red. Como ejemplo se consideran válvulas de no retorno y bombas, que son los dispositivos incluidos hasta el momento en el software desarrollado.

Las válvulas de no retorno permiten el flujo en un solo sentido, lo que establece dos estados de la válvula: abierta y cerrada. El análisis de la válvula en un tramo se establece de la siguiente manera: sea el sentido permitido del nudo i al nudo j , cuando la carga H_i en el nudo i es mayor que la carga H_j en el nudo j , la válvula está abierta y actúa como una pérdida de carga local; en caso contrario, $H_i < H_j$, la válvula se cierra y separa el tramo en dos partes (no pasa gasto en el tramo y los nudos i y j operan como extremos cerrados).

La ecuación que determina el valor de la pérdida de carga local y por ende la pérdida de carga debida a la válvula es:

$$\Delta H_{ij} = K \frac{v^2}{2g} \quad (4)$$

donde ΔH_{ij} es la pérdida de carga que ocurre en la válvula entre su punto de entrada y su punto de salida, K es el coeficiente adimensional de las pérdidas locales para una válvula completamente abierta, v es la velocidad media y g es la aceleración de la gravedad.

Al volver a escribir la ecuación 4 en función del gasto queda:

$$\Delta H_{ij} = \delta \frac{K}{d_k^4} Q_{ij}^2 \quad (5)$$

donde Q_{ij} es el gasto en la válvula, d_k es el diámetro de ésta y δ es un coeficiente que depende de las unidades

empleadas (para una gravedad de 9.81 m/s^2 , Q_{ij} en m^3/s , d_k en m y ΔH_{ij} en m , $\delta = 0.08263$).

De esta forma se puede modelar la válvula mediante un tramo virtual del nudo de entrada i al nudo de salida j , de manera que el flujo en él sea:

$$Q_{ij} = \phi_{ij} (H_i - H_j)^{1/m} \quad (6)$$

donde:

$$\phi_{ij} = \frac{d_k^2}{(\delta K)^{1/m}} \quad \text{y} \quad m=2$$

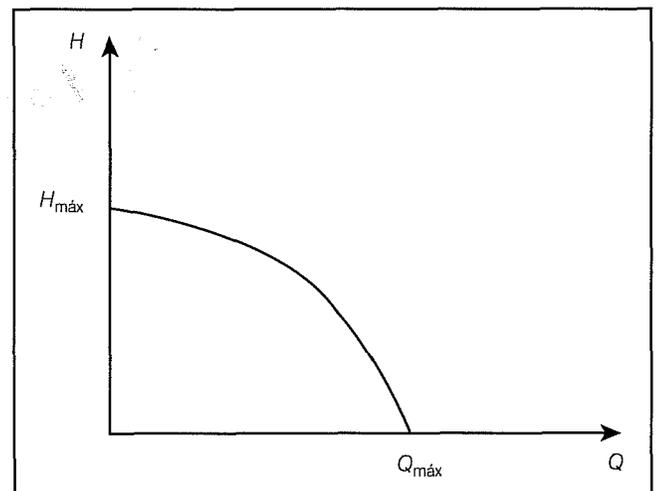
La ecuación 6 se puede incorporar de manera natural al sistema de ecuaciones 3 sin alterar su definición.

Una bomba es un dispositivo que eleva la carga hidráulica del flujo en el lugar de su instalación; esto es, la función de una bomba es la de introducir gasto en uno de los nudos. La relación entre la carga y el gasto que pasa a través de la bomba se expresa por su curva característica o curva gasto-carga (ver ilustración 2), por lo que para una bomba, el gasto q_i que se suministra al nudo se establece a través de esta curva, misma que puede ajustarse a través de un polinomio de segundo grado, esto es:

$$q_i = a_0 + a_1 H_i + a_2 H_i^2 \quad (7)$$

Así, una bomba puede ser incorporada al sistema de ecuaciones 3, mediante la sustitución de la ecuación 7 en la ecuación que corresponda al nudo i donde se instala la bomba.

Ilustración 2. Curva característica de una bomba.



Modelo clásico de optimización con restricciones

El diseño hidráulico de la red restringe la determinación de los diámetros a aquellos que llevan el agua desde los puntos fuente hasta los puntos demandantes, manteniendo el nivel piezométrico (H_i) en cada nudo por arriba de un valor mínimo (H_{\min}) y la velocidad del flujo en cada tramo por debajo de un valor máximo (v_{\max}). La primera restricción surge de requerimientos mínimos de servicio o funcionamiento de la red y la segunda restricción se da principalmente a partir de limitaciones tecnológicas de las tuberías.

La optimización del diseño establece que el costo de construcción sea mínimo. Una función objetivo simple es la suma de los costos de construir cada tramo en la red. De esta manera, el modelo de optimización es:

$$\begin{aligned} \text{Mín } Z &= \sum_{ij \in \mathbf{T}} C_k L_{ij} & ij \in \mathbf{T} \\ \text{s.a.} & & \\ H_i &\geq H_{\min,i} & \forall i \in \mathbf{N} \\ v_{ij} &\leq v_{\max,ij} & \forall ij \in \mathbf{T} \end{aligned} \quad (8)$$

Donde \mathbf{T} es el conjunto de tramos en la red; \mathbf{N} , el conjunto de nudos; L_{ij} , la longitud del tramo ij ; C_k , el costo de construcción por metro lineal de una tubería que posee el diámetro comercial d_k ; H_i , el nivel piezométrico en el nudo i calculado para la red a partir de solucionar el sistema de ecuaciones 3; $H_{\min,i}$, el nivel piezométrico mínimo admisible en el nudo i ; v_{ij} , la velocidad en el tramo ij , calculada una vez solucionado el sistema de ecuaciones 3, y $v_{\max,ij}$ es la velocidad máxima admisible en el tramo ij .

Formulación penalizada propuesta

A partir del problema de optimización con restricciones se puede formular un nuevo modelo penalizado, incorporando las restricciones a la función de costo. Esto se efectúa mediante funciones de penalización que castigan cualquier solución no factible a través de un incremento en su costo. Considerando las características del algoritmo RS que se empleará para solucionar el problema, se proponen funciones que cuantifican el número de restricciones violadas y la magnitud de la violación a las restricciones y dependiendo de estas mediciones penalizan más o menos una solución.

De la formulación del modelo establecido en la sección

"Modelo clásico de optimización con restricciones" y que se muestra en la ecuación 8, se observa que existen dos tipos de restricciones, dadas por las siguientes desigualdades:

$$a) H_i \geq H_{\min,i} \Rightarrow a') 0 \geq H_{\min,i} - H_i \quad (9)$$

$$b) v_{ij} \leq v_{\max,ij} \Rightarrow b') 0 \leq v_{\max,ij} - v_{ij} \quad (10)$$

Las ecuaciones 9 y 10 establecen restricciones simples de uso de un recurso, por lo que la forma de medir la magnitud de la violación para estas restricciones es a través del exceso o carencia del recurso. Siguiendo este principio, se tiene que para el primer tipo de restricciones, si a') se viola, $Z' = Z + \alpha(H_{\min,i} - H_i)$, pero si no se viola, $Z' = Z$; de esta forma, el incremento en costo depende de la magnitud de la violación de la restricción. De manera similar, para el segundo tipo, si b') se viola $Z' = Z - \beta(v_{\max,ij} - v_{ij})$, pero si no se viola, $Z' = Z$. Los coeficientes α y β representan la cantidad unitaria de penalización para cada tipo de restricción. Esto es, la cantidad, en unidades de costo en que una violación en una unidad de recurso de una restricción será penalizada. Ellos también pueden establecer un peso de importancia entre los tipos de restricciones.

Incorporando todas las restricciones a la función objetivo, el problema penalizado queda:

$$\begin{aligned} \text{Mín } Z' &= Z + \alpha \left[\sum_{i=1}^{|\mathbf{N}|} \max(0, H_{\min,i} - H_i) \right] \\ &- \beta \left[\sum_{ij=1}^{|\mathbf{T}|} \min(0, v_{\max,ij} - v_{ij}) \right] \end{aligned} \quad (11)$$

donde Z' es la función de costo del problema penalizado, Z es la función de costo del problema con restricciones, α y β son dos coeficientes de penalización, H_i y v_{ij} son el nivel piezométrico en el nudo i y la velocidad en el tramo ij , respectivamente, calculados para la red a partir de solucionar el sistema de ecuaciones 3. $H_{\min,i}$ y $v_{\max,ij}$ son el nivel piezométrico mínimo admisible en el nudo i y la velocidad máxima admisible en el tramo ij , respectivamente.

Analizando la ecuación 11 se observa que el incremento en costo de una solución no factible depende de dos factores: del número de restricciones violadas y de la magnitud de la violación efectuada en cada

restricción. Ambos factores pueden asociarse como una medida de no factibilidad, de manera que mientras más no factible sea una solución será más penalizada. Sin embargo, los coeficientes α y β deben ser sintonizados dependiendo del problema a resolver para garantizar la convergencia a la región factible.

Algoritmo de recocido simulado (RS)

El algoritmo de recocido simulado (RS) (Kirkpatrick *et al.*, 1983) está basado en una analogía con el proceso de fundir un material sólido y posteriormente enfriarlo lentamente hasta su congelación (proceso de recocido de sólidos). Si el material o sistema termodinámico alcanza el equilibrio térmico a cada una de las diferentes temperaturas del proceso, sus átomos se congelarán en una configuración o arreglo altamente estructurado cuya energía es mínima, denominado estado aterrizado. En caso contrario, sus átomos se congelarán en algún otro estado cuya energía interna no sea mínima.

El movimiento de los átomos de un material hasta alcanzar el equilibrio térmico, cuando éste es sometido a un baño de calor a una temperatura (t) diferente de la que se encontraba, se simula a través del siguiente algoritmo iterativo (Metropolis *et al.*, 1953): a partir de la configuración de átomos (S_i) que establece el estado actual del sólido, con energía E_i , se genera un subsecuente estado S_j , con energía E_j , mediante la aplicación de un mecanismo de perturbación estocástico sobre el estado S_i . Si $E_j - E_i \leq 0$, el estado S_j se acepta como el estado actual del sólido, pero si $E_j - E_i > 0$, al estado S_j se le asigna la probabilidad de cambio $p(\Delta E) = \exp \{-(E_j - E_i) / k_B t\}$ (donde t denota la temperatura del baño de calor y $k_B = 1.38 \times 10^{-16}$ ergs/°K es la constante de Boltzmann) y se obtiene un número aleatorio (r) uniformemente distribuido en el intervalo $[0, 1]$; si $r < p(\Delta E)$, el estado S_j se acepta como estado actual del sólido y si no, se retiene S_i . Repetir estos pasos simula el movimiento de los átomos y permite alcanzar el equilibrio térmico del sistema de manera asintótica. A la regla de aceptación de un estado propuesto en estado actual se le conoce como criterio de Metropolis.

Definiendo los átomos del material como las variables de un problema de optimización y el estado actual S_i (configuración de átomos) como una solución del problema y usando la función de costo para medir la energía, $E_i = Z(S_i)$, se establece una analogía del problema de optimización con el sistema termodinámico y se puede usar el algoritmo de Metropolis para generar una serie de configuraciones o soluciones en alguna temperatura efectiva hasta alcanzar el equilibrio térmico. Esta temperatura es un parámetro de control ($c = k_B t$) en las

mismas unidades que la función de costo. Si se ejecuta una sucesión de algoritmos de Metropolis en la cual la solución inicial de un nuevo algoritmo es igual a la solución de salida del algoritmo anterior y el parámetro de control o temperatura desciende después de la ejecución de cada algoritmo de Metropolis, se simula un proceso de enfriamiento y las configuraciones generadas a lo largo del procedimiento tienden al estado de costo mínimo. A este algoritmo de optimización se le da el nombre de recocido simulado (ver ilustración 3). Sanvicente (1997) presenta una descripción detallada de la analogía y del fundamento del método a través de la termodinámica estadística.

Del análisis del algoritmo se observa que RS efectúa una caminata estocástica sobre el espacio de soluciones del problema y en matemáticas se ha demostrado que teóricamente RS converge de forma asintótica a la solución óptima (Aarst y Korst, 1989), aunque de manera práctica logra una solución próxima al óptimo global.

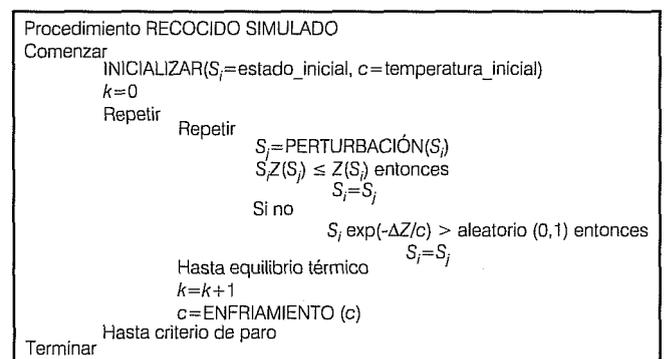
Implantación del algoritmo RS en la determinación de diámetros de una red

Consideraciones para la implantación

La implantación del algoritmo RS en la determinación óptima de los diámetros de una red se lleva a cabo mediante las siguientes consideraciones:

- Sea \mathbf{T} el conjunto de tramos en la red, \mathbf{N} el conjunto de nudos y $\mathbf{D}_i = \{d_{ik}\}$ el arreglo de diámetros permitidos para el tramo i , donde $i = 1, 2, \dots, |\mathbf{T}|$ y $k = 1, 2, \dots, K_i$, siendo K_i el número de diámetros permitidos en el tramo i .

Ilustración 3. Pseudocódigo del algoritmo de recocido simulado.



- El espacio de soluciones $\mathbf{S} = \{S_j\}$ es representado por el conjunto de todas las combinaciones $S_j = (\pi_1(d_{1k}), \pi_2(d_{2k}), \dots, \pi_{|T|}(d_{|T|k}))$, donde $\pi_i(d_{ik})$ denota el diámetro $k \in \mathbf{D}_i$. Por lo tanto, $|\mathbf{S}| = \prod_{i \in T} K_i$, ahora bien, si $K_1 = K_2 = \dots = K_{|T|} = K$, entonces $|\mathbf{S}| = K^{|T|}$.
- La función de costo es $Z(S_j) = \sum_{i \in T} C\pi_i(d_{ik}) L_i$ para el modelo con restricciones y $Z(S_j) = \sum_{i \in T} C\pi_i(d_{ik}) L_i + \alpha[\sum_{i \in N} \max(0, H_{\min, i} - H_i)] - \beta[\sum_{i \in T} \min(0, v_{\max, i} - v_i)]$ para el modelo penalizado, donde $C\pi_i(d_{ik})$ denota el costo del diámetro $k \in \mathbf{D}_i$ en la solución S_j evaluada; L_i es la longitud del tramo i ; H_i y $H_{\min, i}$ son la carga para la solución S_j y carga mínima permitida en el nodo i ; v_i y $v_{\max, i}$ son la velocidad para la solución S_j y velocidad máxima permitida en el tramo i , y α y β son los coeficientes de penalización.
- Dada una solución S_j , las cargas H_i y las velocidades v_j , para $i = 1, 2, \dots, |\mathbf{N}|$ y $j = 1, 2, \dots, |\mathbf{T}|$ se calculan resolviendo el sistema de ecuaciones 3 que modela la red. Los $\phi_{i,j(k)}$ se estiman a partir de los diámetros establecidos en S_j . Para sistemas complejos, las ecuaciones que definen los dispositivos de control deben estar incorporadas en la ecuación 3.
- La función de perturbación genera un nuevo estado S_j , a partir de un estado S_i , mediante la selección aleatoria de un tramo t y la sustitución de su diámetro $\pi_t(d_{in})$ por otro $\pi_t(d_{im})$ obtenido de forma aleatoria por su arreglo de diámetros permitidos \mathbf{D}_t .
- El equilibrio térmico se alcanza asintóticamente con respecto al número de iteraciones del algoritmo de Metropolis. Sin embargo, en la literatura se reporta que el cuasi-equilibrio (ϵ) se logra después de iterar de $2|\mathbf{V}|$ a $3|\mathbf{V}|$ (Aarts y Korst, 1989), donde $|\mathbf{V}| = \sum_{i \in T} K_i$ es el tamaño de la vecindad de estados accesibles a partir del estado actual. Si $K_1 = K_2 = \dots = K_{|T|} = K$ entonces $|\mathbf{V}| = |\mathbf{T}| K$.
- El valor inicial de la temperatura (c_0) debe asegurar que casi cualquier solución sea aceptada al inicio del procedimiento. La solución de costo máximo es $c = \sum_{i \in T} C\pi_i(d_{ik}) L_i$, donde $K \in \mathbf{D}_i$ es el diámetro de mayor costo. El valor puede ser ajustado para reducir el tiempo de procesamiento. Sousa y Cunha (1998) usan $c_0 = -0.1 C_0 / \ln(a)$ (C_0 : costo de la configuración inicial; a : elasticidad de aceptación) con muy buenos resultados (la función fue propuesta por Johnson *et al.* en 1989). Sin embargo, esta función depende de la configuración inicial y de poder superar un posible óptimo local.

- La función de enfriamiento del sistema es $c_{k+1} = \lambda c_k$, donde λ es el coeficiente de decremento de temperatura y c_k es el valor del parámetro de control en la iteración k del ciclo de temperaturas del proceso. Mientras más próximo a 1 sea λ , más lento es el enfriamiento, pero requiere más tiempo de cálculo. Para la mayoría de problemas reportados en la literatura, $\lambda \geq 0.8$ (Sanvicente, 1997).
- El criterio de paro se establece como el momento en que la temperatura (c_k) es menor que un valor umbral muy pequeño (c_f), denominado temperatura final.

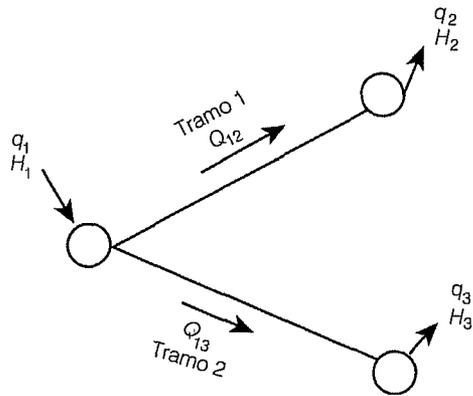
Análisis de la implantación a los modelos con restricciones y penalizado

La determinación óptima de los diámetros en una red de agua es un problema fuertemente no lineal, con una gran cantidad de óptimos locales y cuyo espacio de soluciones, debido a las restricciones, posee muchas regiones no factibles.

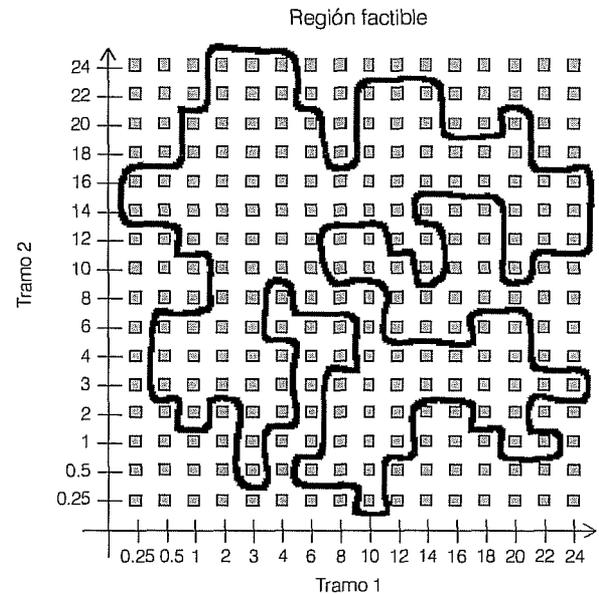
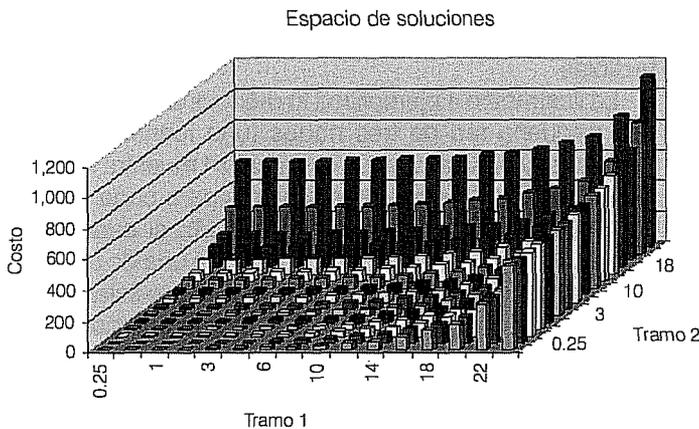
La ilustración 4 ejemplifica lo mencionado a través de una pequeña red de tres nudos (uno fuente y dos de demanda) y dos tramos. La ilustración 4 muestra también el catálogo de 16 posibles diámetros para cada tramo y su costo en unidades monetarias (UM), el espacio de soluciones para la red y el costo de cada una de ellas, así como la región de soluciones factibles que se establecería a través de las restricciones al problema (para este ejemplo, la longitud de cada tramo es unitaria, $L_{ij} = 1$, y las restricciones no son explícitamente modeladas a través de ecuaciones).

La diferencia entre el espacio de soluciones y la región factible para el modelo con restricciones (ver ilustración 4) trae dos consecuencias en la implantación del algoritmo RS, la primera es que se requieren evaluar a priori las restricciones para cada solución propuesta (S_j) y desechar aquellas soluciones no factibles antes de ejecutar el criterio de Metropolis. De esta forma, el algoritmo genera una gran cantidad de soluciones que serán rechazadas por no caer en la región factible y que no contribuyen en la caminata aleatoria, siendo el trabajo para producirlas únicamente consumidor de tiempo. La segunda consecuencia se debe a la forma caprichosa que puede tomar la región factible o a la gran cantidad de zonas no factibles; la caminata es forzada a rodear las regiones no factibles para dirigirse a soluciones mínimas, lo que provoca que ésta pueda llegar a ser muy tortuosa y larga (ver ilustración 5). A pesar de lo anterior, la implantación del algoritmo RS al modelo con restricciones ha mostrado ser un método eficaz para solucionarlo (Sousa y Cunha, 1998; Sanvicente y Frausto, 2000a y b).

Ilustración 4. Espacio de soluciones y región factible para una red de dos tramos



Diámetros (pulg)	Costos (UM)	Diámetros (pulg)	Costos (UM)
0.25	1	10	32
0.5	1.5	1.2	50
1	2	14	60
2	5	16	90
3	8	18	130
4	11	20	170
6	16	22	300
8	23	24	500



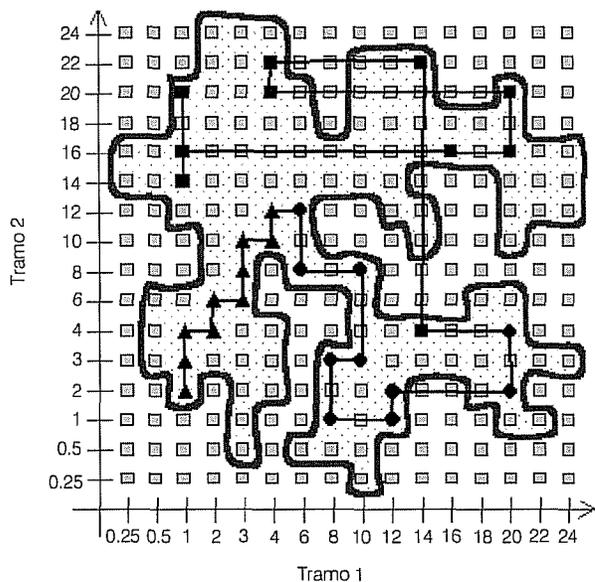
En el modelo penalizado ya no se tienen restricciones explícitas, por lo que cualquier solución S_j dentro del espacio de soluciones debe considerarse para resolver el problema y ser evaluada mediante el criterio de Metropolis; las funciones de penalización tienen la tarea de castigar las soluciones no factibles a fin de que las soluciones óptimas se conserven. De esta forma se aprovecha mejor el trabajo realizado. Además, esto provoca que la caminata aleatoria efectuada por el algoritmo RS cruce regiones de soluciones no factibles que la hagan menos sinuosa, por lo que para un mismo nivel de error, la implantación del algoritmo RS para el modelo penalizado es más eficiente que para el modelo con restricciones (ver ilustración 5).

La ilustración 5 hace una comparación entre las caminatas estocásticas efectuadas para cada uno de los

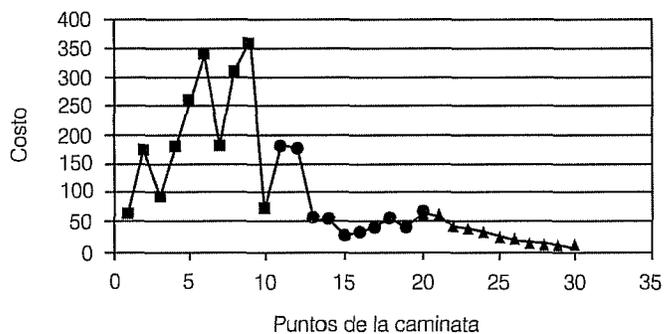
modelos por un algoritmo RS. Ambas caminatas se muestran tanto en planta (para ver la trayectoria que siguen) como en perfil (para notar las variaciones de la función de costo y apreciar cómo el algoritmo escala mínimos locales). Además, en ambas caminatas se discriminan las tres regiones características de toda caminata realizada por un algoritmo RS y que son la porción de la caminata efectuada a altas temperaturas, la porción efectuada a temperaturas medias y, finalmente, la que se lleva a cabo a bajas temperaturas.

Para temperaturas altas ($c \gg 0$), la probabilidad de aceptar cualquier deterioro en la función de costo es muy grande ($p(\Delta Z) \rightarrow 1$), por lo que prácticamente se admite cualquier solución propuesta (S_j); en esta etapa, el algoritmo RS efectúa una exploración del espacio de soluciones. Para temperaturas medias ($c > 0$), el algoritmo

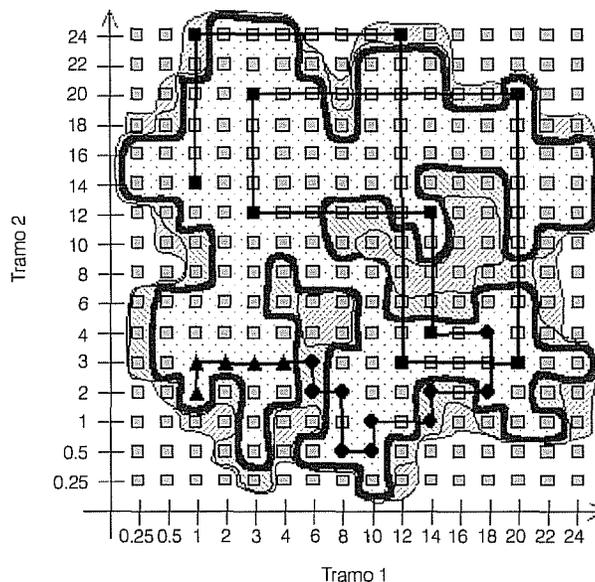
Ilustración 5. Caminata estocástica efectuada por el algoritmo RS para ambos modelos.



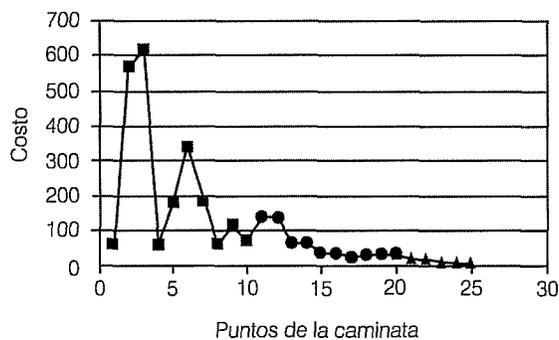
Caminata del recocido simulado para el modelo con restricciones



■ Temperaturas altas ● Temperaturas medias ▲ Temperaturas bajas



Caminata del recocido simulado para el modelo penalizado



Penalización: ○ 0 (región factible) ▨ 0-10 ▩ 10-20 □ >20 UM

ya no aprueba cualquier solución propuesta (S_j), sino únicamente aquellas que no deterioren mucho la solución actual ($0 < \rho(\Delta Z) < 1$). En esta etapa, el algoritmo escala óptimos locales para evitar quedar atrapado en ellos y ubicarse en una posición que lo encamine a una buena solución. Finalmente, a bajas temperaturas ($c \rightarrow 0$) el algoritmo efectúa una caminata descendente, aceptando casi en exclusiva puntos mejores ($\rho(\Delta Z) \rightarrow 0$), dirigiéndose a un punto óptimo.

La ilustración 5 muestra, además, el comportamiento de las funciones de penalización propuestas, las cuales (como se discutió en la sección "Formulación penalizada propuesta") miden el nivel de no factibilidad de cada

solución no factible y con base en éste penalizan. Ello se representa en el espacio de soluciones del modelo penalizado mediante las áreas de igual penalización que se establecen alrededor de la región factible, aunque el tamaño de dichas áreas dependerá de los valores de los coeficientes de penalización α y β .

Analizando las caminatas de la ilustración 5 puede apreciarse que a altas temperaturas ambas son equivalentes, pues lo que el algoritmo efectúa es una exploración del espacio de soluciones, mientras que a temperaturas medias y bajas, la caminata en el modelo penalizado se vuelve menos tortuosa y encuentra atajos a través de regiones no factibles que lo encaminan de

forma más directa a una solución óptima. Debe hacerse notar que conforme la temperatura decrece, se aceptan soluciones no factibles cada vez menos alejadas de la región factible, esto es, a bajas temperaturas únicamente se aceptan soluciones factibles o dentro de las primeras zonas de penalización. Por lo anterior se puede decir que los atajos más ahorradores de tiempo se encontrarán a temperaturas medias, aunque las temperaturas bajas no impiden hacer el camino menos tortuoso al evitar algunas de las curvaturas de la región factible.

Cuando los parámetros del recocido no están bien sintonizados, el rodeo efectuado por la caminata aleatoria para mantenerse dentro de la región factible en el modelo con restricciones puede repercutir en la calidad de la solución final, generando una mayor dispersión en la solución entregada por el algoritmo para diferentes corridas.

Para el problema penalizado, si los valores de los parámetros α y β son muy grandes, únicamente a altas temperaturas se visitarán algunas soluciones no factibles, por lo que la caminata aleatoria será equivalente a la efectuada en el modelo con restricciones, pero si son muy pequeños se incrementa la probabilidad de que la solución final que entregue el algoritmo RS sea no factible. Por esta razón debe llevarse a cabo una sintonización de estos parámetros, a fin de garantizar la convergencia del método a una solución factible. Aunque siempre se puede contar con una memoria que almacene la mejor solución factible encontrada, no se garantiza la calidad de la solución.

Ejemplos de aplicación

A través del modelado de la sección "Modelado del problema" (usando la fórmula de pérdida de carga de Hazen-William, con una $\delta = 15,220$, cuando ΔH_{ij} está dada en m, L_{ij} en m, Q_{ij} en m^3/h y d_k en cm), y siguiendo las consideraciones de la sección "Implementación del algoritmo RS en la determinación de diámetros de la red" se programaron dos algoritmos RS. Uno de estos algoritmos resuelve el modelo con restricciones y el otro, el modelo penalizado. Ambos algoritmos tienen como entrada la topología y la información propia del diseño de la red, así como, por parte del método RS, la solución inicial de arranque (S_0), el valor inicial de la temperatura (c_0), el valor de temperatura final (c_f), el número de iteraciones para alcanzar el cuasi-equilibrio (ϵ), el coeficiente de decremento de temperatura (λ) y, en el caso del modelo penalizado, los valores de los coeficientes α y β .

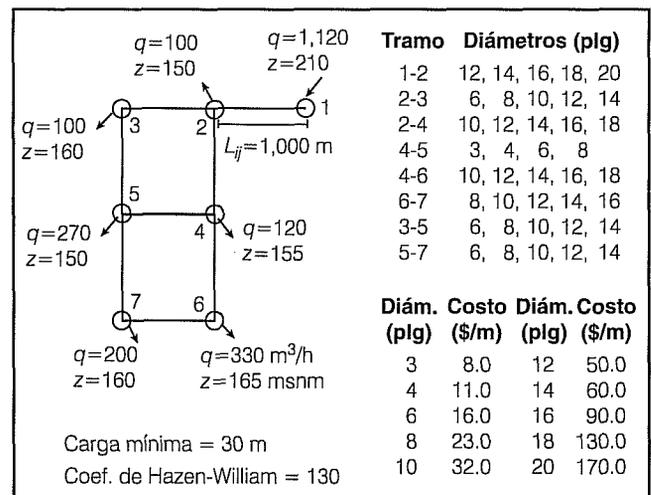
La ilustración 6 muestra la topología e información de la red solucionada por Alperovits y Shamir (1977). En ella

todos los tramos tienen la misma longitud, el coeficiente de Hazen-William es igual para todas las tuberías y la carga mínima es la misma para todos los nudos.

El cuadro 2 muestra los resultados estadísticos para diferentes juegos de parámetros de la ejecución de veinte corridas por algoritmo RS y por juego, a fin de resolver el problema de Alperovits y Shamir (1977), en una PC con procesador Pentium a 200 Mhz. La ejecución de un grupo de corridas por cada juego de parámetros se debe a que el algoritmo RS es no determinante, motivo por el cual la solución arrojada por éste puede variar de corrida a corrida. El cuadro 2 está dividido en dos grandes secciones, que a su vez agrupan los juegos de parámetros en dos subconjuntos. Cada subconjunto mantiene S_0 , c_0 , c_f , ϵ y α (para el modelo penalizado) constantes, variando únicamente el coeficiente de enfriamiento (λ) por cada juego, para sintonizar la precisión del algoritmo. Esto es, se permite que el enfriamiento en cada subconjunto sea más lento, para tratar que el proceso alcance el estado de energía mínima, con el consiguiente costo de incremento en el tiempo de procesamiento. Para este problema, la solución de menor costo alcanzada fue $S_{min} = \{18, 14, 16, 3, 14, 8, 12, 8\}$, con un costo de 444,000, que mejora la solución de Alperovits y Shamir (1977), que estimaban 479,525.

Analizando el primer subconjunto de juegos de parámetros del cuadro 2, se observa que la precisión del algoritmo RS (medida como el porcentaje de corridas en que se obtuvo la solución de costo mínimo) es mucho mejor para el modelo penalizado para cada valor de λ . Esto se debe a que la temperatura de inicio (c_0) (calculada mediante la fórmula de Sousa y Cunha (1998)) es tan baja,

Ilustración 6. Red de Alperovits y Shamir (1977).



Cuadro 2. Estadísticas de la solución del problema de Alperovits y Shamir (1977).

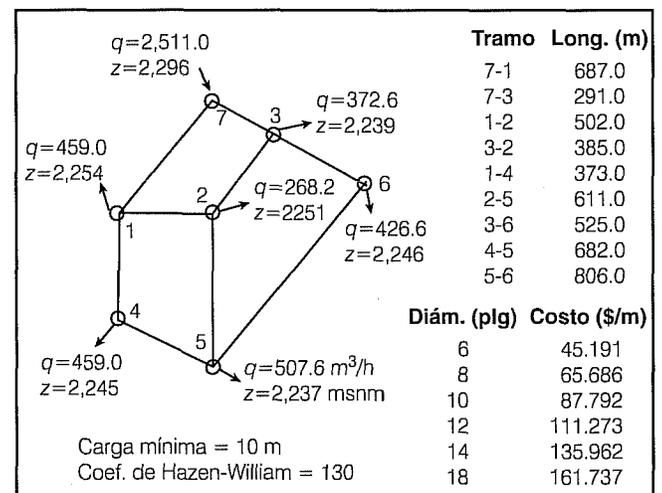
λ	Con restricciones				Penalizado			
	Costo mín. (%)	Costo prom.	Costo máx.	T. prom. (seg)	Costo mín. (%)	Costo prom.	Costo máx.	T. prom. (seg)
0.85	0	458,900	479,000	4.75	5	452,100	469,000	4.50
0.90	5	456,550	471,000	7.53	15	451,400	471,000	6.56
0.95	5	451,800	477,000	15.40	25	448,550	469,000	13.00
0.975	15	447,650	453,000	31.07	65	445,600	453,000	27.10
$S_0 = \{20, 10, 16, 4, 16, 12, 8, 8\}, c_0 = 10,423.07, c_l = 0.001, \epsilon = 80, \alpha = 50,000$								
0.85	30	448,750	461,000	9.43	35	448,000	455,000	9.45
0.90	45	447,900	455,000	14.44	45	447,200	454,000	13.94
0.95	65	445,600	453,000	29.89	65	445,350	448,000	29.82
0.975	90	444,400	448,000	60.62	90	444,400	448,000	58.47
$S_0 = \{20, 10, 16, 4, 16, 12, 8, 8\}, c_0 = 6,800,000, c_l = 0.001, \epsilon = 80, \alpha = 444,000$								

que para el modelo con restricciones el camino tortuoso alrededor de las regiones no factibles efectuado por el algoritmo generalmente queda atrapado en un óptimo local. Sin embargo, para el modelo penalizado, el algoritmo toma caminos más directos, que le permiten alcanzar en un porcentaje mucho mayor la solución mínima encontrada. También se observa una menor dispersión de las soluciones entregadas por el algoritmo para el modelo penalizado y una ligera reducción del tiempo de ejecución. La dispersión se mide en función del costo promedio y las soluciones obtenidas de menor y mayor costo. En general, se observó que una mala sintonización de los parámetros del algoritmo RS tiene un efecto mucho menor en el modelo penalizado que en el modelo con restricciones. El segundo subconjunto de juegos de parámetros se diseñó para obtener una buena precisión, pero al modelo penalizado se le impuso un factor de penalización (α) muy grande para emular el comportamiento del algoritmo RS aplicado al modelo con restricciones. Sin embargo, aun así el algoritmo RS para el modelo penalizado reduce ligeramente la dispersión y el tiempo de procesamiento. De lo anterior, se puede inferir que el algoritmo RS aplicado al modelo penalizado permite establecer un mejor balance entre eficiencia y precisión con respecto al modelo con restricciones.

Otra característica del modelo penalizado es que no requiere de una solución factible para iniciar el proceso y ésta puede ser cualesquiera dentro del espacio de soluciones del problema. Para ejemplificar lo anterior se solucionó el problema dado por Carrillo *et al.* (1998) (ver ilustración 7) a través del modelo penalizado. En este problema, el catálogo de diámetros es el mismo para todos los tramos.

El cuadro 3 muestra los resultados estadísticos para veinte corridas por cada juego de parámetros. El conjunto de juegos de parámetros fue determinado, nuevamente, fijando todos ellos y permitiendo variar únicamente el coeficiente de enfriamiento (λ) para sintonización. Sin embargo, debe notarse que la solución de inicio (S_0) está compuesta por el diámetro más pequeño, la cual es una solución no factible. Para este problema, la configuración de diámetros de menor costo que se logró fue $S_{\min} = \{12, 18, 6, 10, 10, 8, 8, 6, 6\}$. El costo de esta configuración es 354,605.74, que mejora sustancialmente el costo de 508,685 de la solución reportada por Carrillo *et al.* (1998). En el cuadro 3 también se tienen los valores de las cargas en los nudos para esta solución.

Ilustración 7. Red de Carrillo *et al.* (1998).



Cuadro 3. Estadísticas y cargas de la mejor solución obtenida para el problema de Carrillo et al. (1998).

λ	Costo mín. (%)	Estadísticas			Cargas solución de costo mínimo			
		Costo prom.	Costo máx.	T. prom. (seg)	Nudo	Carga	Nudo	Carga
0.85	10	361,915.31	369,890.17	9.75	1	2,274.14	5	2,251.86
0.90	20	361,202.66	376,627.86	14.71	2	2,277.28	6	2,256.53
0.95	45	357,661.92	367,161.40	31.28	3	2,295.46	7	2,299.00
0.975	70	355,534.19	357,700.58	60.66	4	2,262.12		

$S_0 = \{6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6\}$, $c_0 = 786,365.29$, $c_l = 0.001$, $\epsilon = 90$, $\alpha = 50,000$

Conclusiones

El empleo del algoritmo RS ha mostrado ser un método eficaz para solucionar el problema de determinación de los diámetros de una red de agua en el diseño de costo mínimo. La implantación del algoritmo puede hacerse considerando el planteamiento del problema a través de un modelo con restricciones o modificando éste para obtener un modelo penalizado. La aplicación del algoritmo RS al modelo penalizado mejora la calidad de la solución final, ya sea incrementando la precisión, sobre todo cuando los parámetros del recocido no están bien sintonizados, o generando una menor dispersión en la solución entregada por el algoritmo para diferentes corridas. Además, permite reducir ligeramente el tiempo de procesamiento y, en conjunto, establecer un mejor balance entre precisión y eficiencia del proceso.

Recibido: 28/08/2001
Aprobado: 27/07/2002

Referencias

AARTS, E. y KORST, J. *Simulated annealing and boltzmann machines: a stochastic approach to combinatorial optimization and neural computing*. Londres: John Wiley & Sons, 1989. 272 pp.

ALPEROVITS, E. y SHAMIR, U. Design of optimal water distribution systems. *Water resources research*. 1977, vol. 13, núm. 6, pp. 885-900.

CARRILLO, S.J.J., ISLAS, U., GÓMEZ, H.A. y VEGA, B.E. *Selección de las tuberías de una red de distribución de agua potable para que sea eficiente y económica*. Oaxaca: XVIII Congreso Latinoamericano de Hidráulica, del 13 al 16 de octubre de 1998.

FUJIWARA, O. y KHANG, D.B. A two-phase decomposition method for optimal design of looped water distribution

networks. *Water resources research*. 1990, vol. 26, núm. 4, pp. 539-549.

GESSLER, J., *Pipe network optimization by enumeration*. Buffalo: Specialty Conference on Computer Applications in Water Resources, sponsored by the Water Resources Planning and Management Division and the Buffalo Section of the American Society of Civil Engineers (ASCE), del 10 al 12 de junio de 1985.

JOHNSON, D., ARAGON, C., MC GEOCH, L. y SCHEVON, C. Optimization by simulated annealing: an experimental evaluation; part I, Graph partitioning. *Operational research*. s.a., vol. 37, pp. 865-892.

KIRKPATRICK, S., GELATT Jr., C.D. y VECCHI, M.P. Optimization by simulated annealing. *Science*. 1983, vol. 220, núm. 4598, pp. 671-680.

LOGANATHAN, G.V., GREENE, J.J. y AHN, T.J. Design heuristic globally minimum cost water-distribution systems. *Journal of water resources planning and management*. 1995, vol. 121, núm. 2, pp. 182-192.

METROPOLIS, N., ROSENBLUTH, A., ROSENBLUTH, M., TELLER, A. y TELLER, E. Equation of state calculations by fast computing machines. *Journal of chemical physics*. 1953, vol. 21, pp. 1087-1092.

SANVICENTE, S.H. *Recocido simulado: optimización combinatoria, estado del arte (informe técnico)*. Cuernavaca: ITESM, Campus Morelos, 1997. 72 pp.

SANVICENTE, S.H. *Un algoritmo tipo recocido simulado paralelo para el diseño de redes hidráulicas*. Propuesta de tesis doctoral (informe técnico). Cuernavaca: ITESM, Campus Morelos, 1998. 72 pp.

SANVICENTE, S.H. y FRAUSTO, J. *Determinación óptima de diámetros en redes de distribución de agua con algoritmos de búsqueda estocástica*. Córdoba, Argentina: XIX Congreso Latinoamericano de Hidráulica, del 22 al 27 de octubre de 2000a.

SANVICENTE, S.H. y FRAUSTO, J. *Implementación del algoritmo de recocido simulado en la determinación óptima de los diámetros de las tuberías de una red de agua*. Morelia, México: XVI Congreso Nacional de Hidráulica,

- del 7 al 10 de noviembre de 2000b.
- SAVIC, D.A. y WALTERS, G.A. *Stochastic optimization techniques in hydraulic engineering and management*, Mackay, Queensland, Australia: Seventh IAHR International Symposium, del 29 al 31 de julio de 1996.
- SOUSA, J. y CUNHA, M.C. On solving water distribution networks design problems with stochastic search optimization techniques. *Hydraulic engineering software*. 1998, pp. 141-150.
- TZATCHKOV, V.G. y ALFONSO, M.E. *Diseño óptimo de redes hidráulicas mediante análisis consecutivos direccionados*. México: Seminario Internacional sobre el Uso Eficiente del Agua, octubre de 1991.
- WALSKI, T.M., *State of the art pipe network optimization*. Buffalo: Specialty Conference on Computer Applications in Water Resources, sponsored by the Water Resources Planning and Management Division and the Buffalo Section of the American Society of Civil Engineers (ASCE), del 10 al 12 de junio de 1985.
- YATES, D.F., TEMPLEMAN, A.B. y BOFFEY, T.B. The computational complexity of the problem of least capital cost designs for water supply networks. *Engineering optimization*. 1984, vol. 7, núm. 2, pp. 142-155.

Abstract

SANVICENTE SÁNCHEZ, H. and FRAUSTO SOLÍS, J. Optimization of pipe diameters in a water distribution network through simulated annealing algorithms. Hydraulic Engineering in Mexico (in Spanish). January-March, 2003, vol. 18, no. 1, pp. 105-118.

To set pipe diameters in the least-cost design of a water distribution network is a strong non linear restricted problem with multiple local optima and its solutions space has many unfeasible regions. The heuristic algorithm of optimization, called Simulated Annealing (SA), is a global method that has been used to make stochastic searches in the problem's solutions space bettering the performance of other methods. This paper proposes a problem formulation with penalty functions, which lets SA algorithm, among another advantages, that the stochastic walk done by it could be less sinuous, crossing unfeasible regions. This approach improves the algorithm efficiency, for the same error level, with respect to a classical restricted formulation

Keywords: water networks, water-distributed systems, water resources, optimization, combinatorial optimization, stochastic methods, simulated annealing, penalty methods.

Dirección institucional de los autores:

Héctor Sanvicente Sánchez

Maestro en Ingeniería
Especialista en hidráulica IV-A (Asociado C)
Coordinación de Tecnología Hidrológica
Subcoordinación de Aprovechamientos Hidráulicos
Instituto Mexicano de Tecnología del Agua
Paseo Cuauhnáhuac 8532, Progreso, Jiutepec, Morelos, México.
C.P. 62550
Teléfono: + (52) (777) 329 3600, extensión 863
Fax: + (52) (777) 329 3600, extensión 888
Correo electrónico: hsanvice@tlaloc.imta.mx

Juan Frausto Solís

Doctor
Profesor investigador
Departamento de Computación
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey,
Campus Cuernavaca,
Reforma 182-A
Colonia Lomas de Cuernavaca
Temixco, Morelos, México.
Teléfono: + (52) (777) 329 7167
Fax: + (52) (777) 329 7166
Correo electrónico: juan.frausto@itesm.mx