



**MEDIO AMBIENTE**

SECRETARÍA DE MEDIO AMBIENTE Y RECURSOS NATURALES



**IMTA**

INSTITUTO MEXICANO  
DE TECNOLOGÍA DEL AGUA

**COORDINACIÓN DE DESARROLLO  
PROFESIONAL E INSTITUCIONAL**

**SUBCOORDINACIÓN DE POSGRADO**

**T E S I S**

**“ANÁLISIS DEL COMPORTAMIENTO HIDRÁULICO DEL VERTEDOR  
TIPO LABERINTO MEDIANTE DINÁMICA DE FLUIDOS  
COMPUTACIONAL (CFD)”**

que para obtener el grado de

**Doctor en**

**Ciencias y Tecnología del Agua**

presenta

**Erick Dante Mattos Villarroel**

Tutor: Dr. Waldo Ojeda Bustamante

Jiutepec, Morelos

2019



Con fundamento en los artículos 21 y 27 de la Ley Federal del Derecho de Autor y como titular de los derechos moral y patrimoniales de la obra titulada "Análisis del comportamiento hidráulico del vertedor tipo laberinto mediante Dinámica de Fluidos Computacional (CFD)", otorgo de manera gratuita y permanente al Instituto Mexicano de Tecnología del Agua, autorización para que fijen la obra en cualquier medio, incluido el electrónico, y la divulguen entre su personal, estudiantes o terceras personas, sin que pueda percibir por tal divulgación una contraprestación.

**Erick Dante Mattos Villarroel**

---

Jiutepec, Morelos, 29 de Agosto de 2019



**PROGRAMA DE POSGRADO:**  
**DOCTORADO EN CIENCIAS Y TECNOLOGÍA DEL AGUA**

**“Análisis del comportamiento hidráulico del vertedor tipo laberinto mediante Dinámica de Fluidos Computacional (CFD)”**

**AGRADECIMIENTOS**

Al Instituto Mexicano de Tecnología del Agua (IMTA) por su apoyo, la infraestructura y la beca otorgada para llevar a cabo un buen término de esta investigación.

A mi comité tutorial: Dr. Waldo Ojeda Bustamante (Director de tesis), Dr. Jorge Flores Velázquez, Dr. Mauro Íñiguez Covarrubias, Dr. Carlos Díaz Delgado y al Dr. Humberto Salinas Tapia por sus conocimientos compartidos, comentarios y recomendaciones para la realización y mejora de esta tesis.

Finalmente, al personal administrativo del Posgrado IMTA-UNAM por su apoyo en la documentación y el seguimiento de la tesis.

**PROGRAMA DE POSGRADO:  
DOCTORADO EN CIENCIAS Y TECNOLOGÍA DEL AGUA**

**“Análisis del comportamiento hidráulico del vertedor tipo laberinto mediante Dinámica de Fluidos Computacional (CFD)”**

<b>ÍNDICE</b>	<b>Pág.</b>
<b>1. INTRODUCCIÓN</b>	<b>1</b>
1.1. Antecedentes	1
1.2. Justificación	3
1.3. Hipótesis	3
1.4. Objetivos	3
1.4.1. Objetivo general	3
1.4.2. Objetivos específicos	4
<b>2. ANTECEDENTES</b>	<b>5</b>
2.1. Descripción del vertedor tipo laberinto	5
2.2. Parámetros del vertedor tipo laberinto	7
2.3. Perfil de cresta	12
2.4. Interferencia de láminas vertientes	12
2.5. Aireación de la lámina vertiente	14
2.6. Configuración del ciclo, orientación y ubicación del vertedor tipo laberinto	14
2.7. Ahogamiento del vertedor	15
2.8. Métodos de diseño del vertedor tipo laberinto	16
<b>3. DINÁMICA DE FLUIDOS COMPUTACIONAL (CFD)</b>	<b>22</b>
3.1. Modelación de estructuras hidráulicas	22
3.1.1. Ventajas	23
3.1.2. Desventajas	23
3.2. Modelación numérica mediante la Dinámica de Fluidos Computacional (CFD)	24
3.3. Ecuaciones de comportamiento del flujo	26

**PROGRAMA DE POSGRADO:  
DOCTORADO EN CIENCIAS Y TECNOLOGÍA DEL AGUA****“Análisis del comportamiento hidráulico del vertedor tipo laberinto mediante Dinámica de Fluidos Computacional (CFD)”**

3.3.1.	Ecuación de continuidad o conservación de masa	27
3.3.2.	Conservación de cantidad de movimiento o momentum	27
3.3.3.	Conservación de energía	28
3.4.	Discretización de ecuaciones	28
3.4.1.	Volumen finito para problemas de convección y difusión	30
3.4.2.	Esquemas de discretización espacial	32
3.4.2.1.	Esquema de diferencias centradas	32
3.4.2.2.	Esquema Upwind	33
3.4.2.3.	Esquema exponencial	33
3.4.2.4.	Esquema híbrido	33
3.4.2.5.	Esquema potencial	35
3.4.3.	Esquemas de discretización temporal	35
3.4.3.1.	Esquema explícito	35
3.4.3.2.	Esquema implícito	35
3.5.	Modelo de volumen de fluido (VOF)	36
3.6.	Modelo de turbulencia K-ε	37
3.7.	Independencia de la malla y parámetros de calidad	38
3.8.	Modelación de vertedores utilizando (CFD)	39
4.	<b>EVALUACIÓN DE UN MODELO COMPUTACIONAL PARA EL ANÁLISIS HIDRÁULICO DEL VERTEDOR TIPO LABERINTO</b>	43
4.1.	Método experimental y descripción del modelo físico	43
4.2.	Método de solución numérica	44
4.3.	Independencia de la malla	47
4.4.	Validación del modelo conceptual	49

**PROGRAMA DE POSGRADO:  
DOCTORADO EN CIENCIAS Y TECNOLOGÍA DEL AGUA**

**“Análisis del comportamiento hidráulico del vertedor tipo laberinto mediante Dinámica de Fluidos Computacional (CFD)”**

<b>5.</b>	<b>MEJORA DEL COMPORTAMIENTO HIDRÁULICO DEL VERTEDOR TIPO LABERINTO BAJO CAMBIOS GEOMÉTRICOS DEL ÁPICE Y CRESTA VERTEDORA</b>	<b>53</b>
<b>5.1.</b>	Introducción	<b>53</b>
<b>5.2.</b>	Variación del perfil de la cresta vertedora	<b>53</b>
<b>5.3.</b>	Variación geométrica del ápice del vertedor	<b>55</b>
<b>6.</b>	<b>CONSIDERACIONES DE DISEÑO DEL VERTEDOR TIPO LABERINTO</b>	<b>58</b>
<b>6.1.</b>	Introducción	<b>58</b>
<b>6.2.</b>	Coefficiente de descarga y eficiencia del vertedor tipo laberinto	<b>59</b>
<b>6.3.</b>	Condiciones de aireación	<b>64</b>
<b>6.4.</b>	Inestabilidad de la lámina vertiente	<b>67</b>
<b>6.5.</b>	Interferencia de la lámina vertiente	<b>68</b>
<b>6.6.</b>	Procedimiento de diseño	<b>74</b>
	<b>CONCLUSIONES</b>	<b>80</b>
	<b>RECOMENDACIONES PARA FUTUROS TRABAJOS</b>	<b>82</b>
	<b>REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>83</b>
	<b>ANEXO</b>	<b>89</b>

**PROGRAMA DE POSGRADO:  
DOCTORADO EN CIENCIAS Y TECNOLOGÍA DEL AGUA**

**“Análisis del comportamiento hidráulico del vertedor tipo laberinto mediante Dinámica de Fluidos Computacional (CFD)”**

<b>CONTENIDO CUADROS</b>	<b>Pág.</b>
<b>Cuadro 2.1</b> Relación de parámetros geométricos para el funcionamiento del vertedor tipo laberinto.	<b>10</b>
<b>Cuadro 4.1</b> Características geométricas del vertedor tipo laberinto evaluado en CFD.	<b>43</b>
<b>Cuadro 4.2</b> Parámetros geométricos de los modelos físicos analizados por Crookston (2010).	<b>45</b>
<b>Cuadro 4.3</b> Condiciones de contorno.	<b>46</b>
<b>Cuadro 4.4</b> Escenarios de simulación.	<b>47</b>
<b>Cuadro 4.5</b> Evaluación de la calidad de malla.	<b>48</b>
<b>Cuadro 6.1</b> Valor máximo del coeficiente de descarga para cada ángulo.	<b>61</b>
<b>Cuadro 6.2</b> Rangos de condiciones de aireación para vertedor tipo laberinto de ápice circular.	<b>66</b>
<b>Cuadro 6.3</b> Hoja de cálculo para el diseño de un vertedor tipo laberinto.	<b>76</b>



**PROGRAMA DE POSGRADO:  
DOCTORADO EN CIENCIAS Y TECNOLOGÍA DEL AGUA**

“Análisis del comportamiento hidráulico del vertedor tipo laberinto mediante Dinámica de Fluidos Computacional (CFD)”

<b>CONTENIDO FIGURAS</b>	<b>Pág.</b>
<b>Figura 2.1</b> Estructura de un vertedor tipo laberinto.	<b>6</b>
<b>Figura 2.2</b> Parámetros geométricos de un vertedor tipo laberinto. (Crookston 2010).	<b>7</b>
<b>Figura 2.3</b> Ápices circulares de la presa Brazos, Texas, USA.	<b>11</b>
<b>Figura 2.4</b> Eficiencia del ciclo ( $\mathcal{E}'$ ) de un vertedor trapezoidal tipo laberinto de medio redondeo de cresta. (Willmore, 2004).	<b>12</b>
<b>Figura 2.5</b> Interferencia de láminas vertientes (Crookston y Tullis, 2012).	<b>13</b>
<b>Figura 2.6</b> Configuración, orientación y ubicación del vertedor tipo laberinto.	<b>15</b>
<b>Figura 2.7</b> Ilustración de un vertedor sumergido. (Villemonte, 1947).	<b>16</b>
<b>Figura 2.8</b> Variación del parámetro de muros convergentes ( $k_\theta$ ) presentada por Melo et al. (2002).	<b>19</b>
<b>Figura 2.9</b> Límites de sumergencia de acuerdo a las ecs. 13-15 (Tullis <i>et al.</i> , 2007).	<b>20</b>
<b>Figura 3.1</b> Discretización unidimensional por volúmenes finitos.	<b>29</b>
<b>Figura 3.2</b> Volumen de control para problema de difusión y convección.	<b>31</b>
<b>Figura 3.3</b> Variación exponencial de $a_E/G_E$ en función de Pe y aproximación híbrida (Pantakar, 1980)	<b>34</b>
<b>Figura 4.1</b> Vista en planta y perfil del vertedor tipo laberinto evaluado en CFD.	<b>43</b>
<b>Figura 4.2</b> Sección transversal del canal rectangular empleado por Crookston (2010).	<b>44</b>
<b>Figura 4.3</b> Coeficientes de descarga del vertedor trapezoidal tipo laberinto $\alpha= 15^\circ$ .	<b>50</b>
<b>Figura 4.4</b> Error relativo porcentual del coeficiente de descarga numérico contra el experimental	<b>50</b>
<b>Figura 4.5</b> Relación de velocidades de descarga entre el ápice aguas abajo con respecto al ápice aguas arriba en función de $H_T/P$ .	<b>51</b>
<b>Figura 4.6</b> Distribución de presiones, aguas abajo del vertedor tipo laberinto. (A) $H_T/P=0.6$ , (B) $H_T/P=1.0$ .	<b>52</b>
<b>Figura 5.1</b> Perfiles de cresta: (A) Cresta viva, (B) Medio redondeo, (C) Cuarto redondeo, (D) Tipo WES	<b>53</b>

**PROGRAMA DE POSGRADO:  
DOCTORADO EN CIENCIAS Y TECNOLOGÍA DEL AGUA**

**“Análisis del comportamiento hidráulico del vertedor tipo laberinto mediante Dinámica de Fluidos Computacional (CFD)”**

<b>Figura 5.2</b>	Distribución de presiones, aguas abajo del vertedor tipo laberinto. $\alpha=15^\circ$ , $P=30.48$ cm. (A) WES (B) Cuarto redondeo (C) Cresta viva (D) Medio redondeo.	<b>55</b>
<b>Figura 5.3</b>	Ápices en vertedores tipo laberinto. (A) Trapezoidal, (B) Circular.	<b>55</b>
<b>Figura 5.4</b>	Comparación del coeficiente de descarga en vertedores tipo laberinto de ápice trapezoidal, $\alpha=15^\circ$ .	<b>56</b>
<b>Figura 5.5</b>	Comparación del coeficiente de descarga en vertedores tipo laberinto de ápice circular, $\alpha=15^\circ$ .	<b>57</b>
<b>Figura 6.1</b>	$C_d$ vs $H_T/P$ para vertedores tipo laberinto.	<b>60</b>
<b>Figura 6.2</b>	Relación del coeficiente de descarga del vertedor de ápice circular con el vertedor de ápice trapezoidal en función de $H_T/P$ .	<b>62</b>
<b>Figura 6.3</b>	Eficiencia vs $H_T/P$ del vertedor tipo laberinto.	<b>63</b>
<b>Figura 6.4</b>	Eficiencia del ciclo del vertedor tipo laberinto.	<b>64</b>
<b>Figura 6.5</b>	Condiciones de aireación: (A) adherido a la pared, (B) aireado, (C) parcialmente aireado, (D) ahogado.	<b>65</b>
<b>Figura 6.6</b>	Condiciones de aireación para vertedores tipo laberinto de ápice circular con cresta de medio redondeo.	<b>66</b>
<b>Figura 6.7</b>	Líneas de corrientes helicoidales paralelas a la pared del vertedor.	<b>67</b>
<b>Figura 6.8</b>	Inestabilidad del flujo en vertedores tipo laberinto de ápice circular con cresta de medio redondeo.	<b>68</b>
<b>Figura 6.9</b>	Efectos de la interferencia de la lámina vertiente. (A) Estela de aire, (B) ondas estacionarias, (C) Ahogamiento local.	<b>69</b>
<b>Figura 6.10</b>	Parámetros e interferencia de láminas vertientes para vertedores de esquina de cresta viva (Indlekofer y Rouvé, 1975).	<b>70</b>
<b>Figura 6.11</b>	Vertedor oblicuo dentro de un canal (Osuna, 2000).	<b>71</b>
<b>Figura 6.12</b>	(A) Definición de las longitudes $B_{int}$ y $L_{int}$ , (B) Interferencia de láminas, ahogamiento local y turbulencia.	<b>72</b>
<b>Figura 6.13</b>	$B_{int}$ vs $H_T$ para $6^\circ \leq \alpha \leq 20^\circ$ .	<b>73</b>
<b>Figura 6.14</b>	Variación de la longitud de interferencia de láminas vertientes ( $6^\circ \leq \alpha \leq 20^\circ$ ).	<b>73</b>

**PROGRAMA DE POSGRADO:**  
**DOCTORADO EN CIENCIAS Y TECNOLOGÍA DEL AGUA**

**“Análisis del comportamiento hidráulico del vertedor tipo laberinto mediante Dinámica de Fluidos Computacional (CFD)”**

<b>Figura 6.15</b>	Porcentaje de la interferencia de la lámina vertiente en relación con la distancia B. ( $6^\circ \leq \alpha \leq 20^\circ$ ).	<b>74</b>
<b>Figura 6.16</b>	Diagrama de flujo para el procedimiento de diseño	<b>77</b>
<b>Figura 6.17</b>	Parámetros geométricos del vertedor tipo laberinto de ápice circular.	<b>78</b>
<b>Figura 6.18</b>	Procedimiento para el análisis de vertedores tipo laberinto (Crookston, 2010).	<b>79</b>

**PROGRAMA DE POSGRADO:**  
**DOCTORADO EN CIENCIAS Y TECNOLOGÍA DEL AGUA**

“Análisis del comportamiento hidráulico del vertedor tipo laberinto mediante Dinámica de Fluidos Computacional (CFD)”

**NOMENCLATURA**

<b>Símbolo</b>	<b>Descripción</b>	<b>Unidad</b>
$A$	Longitud interior del ápice.	m
$A_c$	Longitud del ápice referenciado con la línea central del espesor de la pared.	m
$A_i$	Vector normal a la cara de una celda.	m
$A_{VC}$	Área en una de las caras del volumen de control.	m <sup>2</sup>
$A/w$	Relación del ápice con el ancho del ciclo.	-
$Arc_{int}$	Arco interno del ápice.	m
$Arc_{ext}$	Arco externo del ápice.	m
$a$	Coefficiente de ajuste para obtener el coeficiente de descarga.	-
$a_P$	Coefficiente de la ecuación algebraica de transporte.	Variable
$a_E$	Coefficiente de la ecuación algebraica de transporte.	Variable
$a_W$	Coefficiente de la ecuación algebraica de transporte.	Variable
$B$	Longitud de plantilla entre ápices aguas arriba y aguas abajo.	m
$B_{int}$	Distancia perpendicular desde el ápice aguas arriba hacia aguas abajo donde ocurre la interferencia de láminas vertientes.	m
$b$	Coefficiente de ajuste para obtener el coeficiente de descarga.	-
$C_d$	Coefficiente de descarga.	-
$C_{d-circular}$	Coefficiente de descarga en vertedores tipo laberinto de ápice circular.	-
$C_{d-Darvas}$	Coefficiente de descarga de Darvas (1971).	ft <sup>0.5</sup> s <sup>-1</sup>
$C_{d-Emiroglu}$	Coefficiente de descarga de Emiroglu <i>et al.</i> (2010).	-
$C_{d-esquina}$	Coefficiente de descarga de vertedor de esquina.	-
$C_{d-Lux}$	Coefficiente de descarga de Lux (1984, 1989).	-
$C_{d-Melo}$	Coefficiente de descarga de Melo <i>et al.</i> (2002).	-

**PROGRAMA DE POSGRADO:  
DOCTORADO EN CIENCIAS Y TECNOLOGÍA DEL AGUA**

**“Análisis del comportamiento hidráulico del vertedor tipo laberinto mediante Dinámica de Fluidos Computacional (CFD)”**

$C_{d-m}$	Coeficiente de descarga promedio ( $C_{d-esquina}/ C_{d(90^\circ)}$ )	-
$C_{d-M\&L}$	Coeficiente de descarga de Magalhães y Lorena (1989).	-
$C_{d-sum}$	Coeficiente de descarga de sumergencia, Tullis <i>et al.</i> (2007).	-
$C_{d-Tullis}$	Coeficiente de descarga de Tullis <i>et al.</i> (1995).	-
$C_{d-trapezoidal}$	Coeficiente de descarga en vertedores tipo laberinto de ápice trapezoidal.	-
$C_{d(\alpha)}$	Coeficiente de descarga de un vertedor tipo laberinto para un ángulo $\alpha$ .	-
$C_{d(90^\circ)}$	Coeficiente de descarga de un vertedor lineal.	-
$C_i$	Vector del centroide de una celda al centroide de la celda adyacente.	m
$C_{int}$	Cuerda del ápice interno.	m
$C_\mu$	Constante del modelo de turbulencia k- $\epsilon$ .	-
$C_{1\epsilon}$	Constante del modelo de turbulencia k- $\epsilon$ .	-
$C_{2\epsilon}$	Constante del modelo de turbulencia k- $\epsilon$ .	-
$C_{int}/W$	Relación de cuerda en vertedores de ápice circular.	-
$c_p$	Calor específico a presión constante.	$m^2 s^{-2} \text{ } ^\circ K^{-1}$
$c$	Coeficiente de ajuste para obtener el coeficiente de descarga.	-
$d$	Coeficiente de ajuste para obtener el coeficiente de descarga.	-
$E$	Eficacia de Hay y Taylor (1970) del vertedor tipo laberinto.	%
$e$	Coeficiente de ajuste para obtener el coeficiente de descarga.	-
$F$	Flujo de masa de convección por unidad de área.	$kg m^{-4} s^{-1}$
$Fr$	Número de Froude.	-
$f$	Coeficiente de ajuste para obtener el coeficiente de descarga.	-
$f$	Fuerza de cuerpo por unidad de masa.	$m s^{-2}$

**PROGRAMA DE POSGRADO:**  
**DOCTORADO EN CIENCIAS Y TECNOLOGÍA DEL AGUA**

“Análisis del comportamiento hidráulico del vertedor tipo laberinto mediante Dinámica de Fluidos Computacional (CFD)”

$f_i$	Vector del centronde de una celda al centroide de una de las caras de la celda.	m
$G$	Conductancia de la difusión por unidad de área.	Variable.
$g$	Aceleración de la gravedad.	$m\ s^{-2}$
$H_T$	Carga total aguas arriba del vertedor.	m
$H_{canal}$	Elevación del canal.	m
$H_d$	Carga total aguas abajo del vertedor.	m
$H^*$	Carga total aguas arriba del vertedor ahogado.	m
$H_T/P$	Relación carga total –altura del vertedor	-
$H_T/R_{cresta}$	Radio de curvatura.	-
$h$	Entalpía por unidad de masa.	$kg\ m^2\ s^{-2}\ kg^{-1}$
$h_d$	Carga piezométrica aguas abajo del vertedor ahogado.	m
$h^*$	Carga piezométrica aguas arriba del vertedor ahogado.	m
$K$	Transporte para la energía turbulenta.	$m^2\ s^{-2}$
$K_\vartheta$	Constante de ajuste de la pared lateral convergente.	-
$k_{ciclo}$	Coefficiente según la forma del ciclo del vertedor tipo laberinto.	-
$k$	Coefficiente de conductividad térmica	$kg\ m\ s^{-3}\ ^\circ K^{-1}$
$L$	Longitud característica del vertedor.	m
$L_c$	Longitud del vertedor referenciada en el centro de la cresta.	m
$L_{ciclo}$	Longitud del ciclo del vertedor tipo laberinto.	m
$L_D$	Longitud de la cresta de vertedores de esquina afectada por la interferencia de la lámina vertiente cuando $Q$ y $C_{d(90^\circ)}=0$ .	m
$L_d$	Longitud de la cresta de vertedores de esquina afectada por la interferencia de la lámina vertiente.	m
$L_e$	Longitud efectiva del vertedor tipo laberinto.	m

**PROGRAMA DE POSGRADO:**  
**DOCTORADO EN CIENCIAS Y TECNOLOGÍA DEL AGUA**

**“Análisis del comportamiento hidráulico del vertedor tipo laberinto mediante Dinámica de Fluidos Computacional (CFD)”**

$L_{int}$	Longitud de la cresta afectada por la interferencia de láminas vertientes.	m
$l_c$	Longitud del muro lateral referenciada en el centro de la cresta del vertedor.	m
$M$	Magnificación de la longitud.	-
$m$	Coefficiente de ajuste para obtener la longitud de $B_{int}$ .	-
$\dot{m}_{pq}$	Transferencia de masa de la fase p a la fase q.	kg s <sup>-1</sup>
$\dot{m}_{qp}$	Transferencia de masa de la fase q a la fase p.	kg s <sup>-1</sup>
$N$	Número de ciclos.	-
$n$	Coefficiente de ajuste para obtener la longitud de $B_{int}$ .	-
$o$	Coefficiente de ajuste para obtener la longitud de $B_{int}$ .	-
$P$	Altura de la cresta del vertedor.	m
$Pe$	Número de Peclet.	-
$P_k$	Generación turbulenta debido a las fuerzas viscosas.	kg m <sup>-1</sup> s <sup>-3</sup>
$P_{kb}$	Influencia de las fuerzas de flotabilidad.	kg m <sup>-1</sup> s <sup>-3</sup>
$P_{eb}$	Influencia de las fuerzas de flotabilidad.	kg m <sup>-1</sup> s <sup>-3</sup>
$P/t_w$	Relación del espesor relativo	-
$p$	Presión dinámica.	kg m <sup>-1</sup> s <sup>-2</sup>
$Q$	Descarga sobre el vertedor.	m <sup>3</sup> s <sup>-1</sup>
$Q_{ciclo}$	Descarga sobre un ciclo del vertedor tipo laberinto.	m <sup>3</sup> s <sup>-1</sup>
$Q_d$	Descarga sobre un vertedor ahogado tipo laberinto.	m <sup>3</sup> s <sup>-1</sup>
$Q_{diseño}$	Gasto de diseño.	m <sup>3</sup> s <sup>-1</sup>
$Q_S$	Descarga sobre un vertedor lineal ahogado.	m <sup>3</sup> s <sup>-1</sup>
$Q_{Lab}$	Descarga sobre un vertedor tipo laberinto.	m <sup>3</sup> s <sup>-1</sup>
$Q_{Lin}$	Descarga sobre un vertedor lineal.	m <sup>3</sup> s <sup>-1</sup>

**PROGRAMA DE POSGRADO:**  
**DOCTORADO EN CIENCIAS Y TECNOLOGÍA DEL AGUA**

**“Análisis del comportamiento hidráulico del vertedor tipo laberinto mediante Dinámica de Fluidos Computacional (CFD)”**

$Q_1$	Descarga sobre el vertedor asociado con $h^*$ .	$m^3 s^{-1}$
$Q_2$	Descarga hipotética sobre el vertedor asociado con $h_d$ .	$m^3 s^{-1}$
$Q_d/Q_s$	Magnificación del flujo	-
$q^{th}$	Fase de fluido.	-
$R_{cresta}$	Radio de curvatura de la cresta vertedora.	m
$S$	Nivel de sumergencia.	-
$S_C$	Coefficiente independiente de linealización del término fuente.	-
$S_h$	Término fuente de la ecuación de conservación de la energía.	$kg m^{-1} s^{-3}$
$S_{\alpha_q}$	Término fuente de la ecuación de momento para la fase q.	$kg m^{-2} s^{-2}$
$S_\varphi$	Término fuente de la ecuación general de conservación.	Variable
$T$	Temperatura.	$^{\circ}K$
$t$	Tiempo	s
$t_w$	Espesor de pared del vertedor.	m
$U$	Campo vectorial de velocidad.	$m s^{-1}$
$u$	Componente de la velocidad fluctuante.	$m s^{-1}$
$v_q$	Velocidad de la fase q.	$m s^{-1}$
$W$	Ancho del canal o del vertedor.	m
$w$	Ancho del ciclo.	m
$w/P$	Relación del aspecto vertical.	-
$x$	Coordenada cartesiana.	m
$y$	Coordenada cartesiana. Profundidad.	m
$\alpha$	Ángulo de la pared lateral del vertedor tipo laberinto.	$^{\circ}$
$\alpha_{m\acute{a}x}$	Ángulo máximo de la pared lateral del vertedor tipo laberinto.	$^{\circ}$
$\alpha_q$	Fracción de volumen de la fase q	-



**PROGRAMA DE POSGRADO:**  
**DOCTORADO EN CIENCIAS Y TECNOLOGÍA DEL AGUA**

**“Análisis del comportamiento hidráulico del vertedor tipo laberinto mediante Dinámica de Fluidos Computacional (CFD)”**

$\beta$	Ángulo de la línea de corriente a la salida de un vertedor oblicuo.	°
$\gamma$	Ángulo de la línea de corriente a la entrada de un vertedor oblicuo.	°
$\mathcal{E}$	Disipación de la energía cinética turbulenta	$\text{m}^2 \text{s}^{-3}$
$\Gamma$	Coefficiente de difusión de la ecuación general de conservación.	Variable
$\delta$	Distancia entre centroides.	m
$\mathcal{E}'$	Eficiencia del vertedor tipo laberinto.	-
$\mathcal{E}''$	Eficiencia del ciclo del vertedor tipo laberinto.	-
$\vartheta$	Ángulo entre el muro convergente y el vertedor.	°
$\theta_{eq}$	Ángulo equilátero de una celda.	°
$\theta_{max}$	Ángulo máximo de una celda.	°
$\theta_{min}$	Ángulo mínimo de una celda.	°
$\mu$	Viscosidad dinámica.	$\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-1}$
$\mu_t$	Viscosidad turbulenta.	$\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-1}$
$\rho$	Densidad	$\text{kg m}^{-3}$
$\rho_q$	Densidad de la fase q.	$\text{kg cm}^{-3}$
$\sigma_k$	Constante del modelo de turbulencia k- $\epsilon$ .	-
$\sigma_\epsilon$	Constante del modelo de turbulencia k- $\epsilon$ .	-
$\sigma_{X,Y}$	Covarianza entre las variables X y Y.	Variable
$\sigma_X^2$	Varianza de la variable X.	Variable
$\sigma_Y^2$	Varianza de la variable Y.	Variable
$\tau$	Tensión cortante	$\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-2}$
$\varphi$	Variable de flujo	Variable
$\bar{\phi}$	Valor medio de $\phi$ .	Variable

**PROGRAMA DE POSGRADO:**  
**DOCTORADO EN CIENCIAS Y TECNOLOGÍA DEL AGUA**

**“Análisis del comportamiento hidráulico del vertedor tipo laberinto mediante Dinámica de Fluidos Computacional (CFD)”**

**Subíndices**

E	Centroide ubicado al este del volumen de control.	-
e	Cara del volumen de control ubicado el este.	-
P	Centroide del volumen de control.	-
W	Centroide ubicado al oeste del volumen de control.	-
w	Cara del volumen de control ubicado al oeste.	-

**Operadores matemáticos**

$\nabla(\cdot)$	Operador de gradiente.
$\nabla \cdot (\cdot)$	Operador de divergencia.
$\partial$	Operador derivada parcial.
$\int$	Operador integral.
$\Delta$	Variación de una variable.
$d$	Operador derivada.
$\  \ $	Operador para elegir el valor máximo.

## **CAPÍTULO 1**

### **INTRODUCCIÓN**

#### **1.1 Antecedentes**

Cuando la descarga de un líquido se presenta por encima de un muro o una placa y a superficie libre, la estructura en la que ocurre se llama vertedor. Por el tipo de pared los vertedores se clasifican en dos tipos: de pared delgada utilizados como dispositivos de aforo en laboratorio o en canales de pequeñas dimensiones y de pared gruesa que son empleados en obras de control o de excedencias en una presa (Sotelo, 1997). Un vertedor mal proyectado puede ocasionar falla en la presa por el derrame de agua sobre su corona. Los vertedores tipo laberinto son una opción viable con respecto a vertedores tradicionales cuya particularidad reside en la forma de la cresta del vertedor, que es asimilable a un vertedor lineal pero plegado, esta forma de cresta vertedora incrementa su longitud en un determinado espacio disponible con el fin de aumentar la capacidad de evacuación respecto a la de un vertedor recto convencional ubicado en el mismo espacio y para igual carga hidráulica (Tullis *et al.*, 1995).

La necesidad de incrementar el flujo de descarga para los mismos valores de carga hidráulica y ancho, ha sido la razón para estudiar y modificar los componentes del vertedor tipo laberinto. Cordero *et al.* (2007) indicaron que mejoras en la geometría de este tipo de vertedor tiene efectos en el coeficiente de descarga. Éstas características dimensionales se estudiaron mediante un modelo hidráulico para observar cómo influyen en el coeficiente de descarga.

Los vertedores tipo laberinto constituyen una tecnología que en los últimos años ha sido objeto de numerosos estudios mediante modelación física y numérica, buscando mejorar los criterios de diseño de estas estructuras, ante el interés que se percibe que tendrá a mediano plazo (Balairón *et al.*, 2014).

Se han publicado varios estudios sobre el diseño de vertedores tipo laberinto. Los primeros estudios con suficiente información sobre el diseño de este tipo de vertedores fueron publicados por Taylor (1968) y Hay y Taylor (1970), para vertedores tipo laberinto triangular y traapezoidal de cresta viva. Sin embargo el United States Bureau of Reclamation reportó discrepancias entre los resultados experimentales y las recomendaciones de diseño de Hay y Taylor (1970) a partir de resultados obtenidos en modelos físicos de las presas Ute y Hyrum por Houston (1982). Tales discrepancias se atribuyeron a la limitada información geométrica de los vertedores estudiados. De los estudios de modelos físicos de las presas de Ute y Hyrum, Hinchliff y Houston (1984) desarrollaron nuevas guías

**PROGRAMA DE POSGRADO:**  
**DOCTORADO EN CIENCIAS Y TECNOLOGÍA DEL AGUA****“Análisis del comportamiento hidráulico del vertedor tipo laberinto mediante Dinámica de Fluidos Computacional (CFD)”**

de diseño proporcionando información valiosa sobre la orientación del vertedor. Lux y Hinchliff (1985) y Lux (1989) desarrollaron una nueva ecuación empírica que toma en cuenta el ancho del ciclo ( $w$ ) y la relación entre el ancho del ciclo con la altura del vertedor ( $w/P$ ) que fue limitado para valores mayores o igual a dos. Tullis *et al.* (1995) desarrollaron un método de diseño basado en la ecuación general de vertedores rectangulares tomando en consideración la influencia del ápice en la eficiencia de descarga del vertedor. Sin embargo, Willmore (2004) reportó la existencia de errores para los ángulos  $8^\circ$  y  $6^\circ$ ; para un ángulo de  $8^\circ$  los valores del coeficiente de descarga se encuentran por encima que los de un ángulo de  $9^\circ$ , presentados por Waldron (1994), y para un ángulo de  $6^\circ$  los coeficientes de descarga son relativamente más bajos. Falvey (2003) recopiló las investigaciones de diversos autores añadiendo nuevas interpretaciones en el diseño del vertedor en laberinto. Tullis *et al.* (2007) analizaron los efectos del ahogamiento aguas abajo del vertedor. Posteriormente Crookston (2010) propuso una metodología de diseño basada en el estudio de Tullis *et al.* (1995) para cargas hidráulicas elevadas en vertedores de laberinto de configuración lineal y de arco dentro de un canal y un reservorio.

En las últimas décadas ha habido un desarrollo amplio en las técnicas de simulación para resolver algunos tipos específicos de problemas de la Mecánica de Fluidos, se desarrollaron herramientas de solución general llamados Dinámica de Fluidos Computacional (CFD, por sus siglas en inglés). En general, la herramienta CFD resuelve numéricamente las ecuaciones de Navier-Stokes y ofrece la posibilidad de evaluar hidráulicamente un vertedor bajo diferentes geometrías y condiciones hidráulicas una vez que ha sido validado, reduciendo el costo y tiempo que se tendría usando solamente modelos físicos. Además, el CFD permite una fácil extracción de información adicional, a través del dominio computacional, tales como fuerzas, campos de velocidades y presiones. Varios estudios muestran que su capacidad es versátil y prometedora; Ho *et al.* (2001, 2003) compararon sus resultados numéricos del flujo en vertedores con cresta Creager y reportaron resultados similares a los reportados con estudios basados en modelos físicos, Savage y Johnson (2001) y Savage *et al.* (2001) validaron los resultados de diferentes estudios de CFD con modelos físicos y encontraron resultados comparables para el cálculo de las presiones de descarga, Yang & Hemstrom (1998) corroboraron la concordancia entre los resultados experimentales y numéricos utilizando el CFD aplicado a un vertedor WES.

Una de las dificultades de la modelación numérica del flujo sobre vertedores es el seguimiento de la superficie libre. Para analizar este problema, se seleccionaron dos códigos de CFD disponible

**PROGRAMA DE POSGRADO:  
DOCTORADO EN CIENCIAS Y TECNOLOGÍA DEL AGUA**

**“Análisis del comportamiento hidráulico del vertedor tipo laberinto mediante Dinámica de Fluidos Computacional (CFD)”**

en el mercado, FLOW-3D y ANSYS-FLUENT conocidos por su capacidad para realizar un seguimiento preciso de la superficie libre usando el método Volumen de Fluido (VOF por sus siglas en inglés). El método VOF, desarrollado por Hirt y Nichols (1981), permite realizar un seguimiento de la superficie libre mediante la definición de celdas de cálculo que pueden estar: vacías, parcialmente llenas, o llenas del fluido. El método VOF resuelve las ecuaciones de Navier-Stokes y el promediado de Reynolds (RANS) mediante el método de volúmenes finitos.

Haciendo uso adecuado del CFD es posible analizar el comportamiento del flujo sobre distintas estructuras hidráulicas. En esta investigación se aplica y valida la metodología del CFD para el análisis hidráulico del flujo turbulento vertido en un vertedor tipo laberinto y se optimiza su funcionamiento realizando cambios en la geometría del vertedor.

## **1.2 Justificación**

Según Delgado (2009) en la actualidad muchas presas comienzan a perder su vida útil, debido al aumento del volumen de sedimentos con su consiguiente reducción de almacenamiento que genera un incremento de gasto en el vertedor para la avenida de diseño original. Una de las alternativas más económicas de rehabilitación es la construcción de vertedores tipo laberinto. La implementación y optimización de un vertedor tipo laberinto podría tener variantes, las cuales, de acuerdo con su ubicación y forma, pueden influir en el coeficiente de descarga. Algunas de estas configuraciones han sido investigadas en prototipos a escala, y algunas sólo se han investigado parcialmente en su desempeño, existiendo características que aún no han sido analizadas debido a la variedad de parámetros geométricos que influyen en su funcionamiento y complican su diseño y construcción.

## **1.3 Hipótesis**

La herramienta de CFD permite desarrollar y validar modelos conceptuales para analizar y mejorar el funcionamiento hidráulico de un vertedor tipo laberinto analizando diferentes modificaciones geométricas de sus elementos.

## **1.4 Objetivos**

### **1.4.1 Objetivo general.**

Estudiar el comportamiento hidráulico del vertedor tipo laberinto bajo diferentes configuraciones geométricas utilizando modelos conceptuales en CFD y establecer una metodología de diseño que considere el comportamiento de descarga de la lámina vertiente.

**PROGRAMA DE POSGRADO:**  
**DOCTORADO EN CIENCIAS Y TECNOLOGÍA DEL AGUA**

**“Análisis del comportamiento hidráulico del vertedor tipo laberinto mediante Dinámica de Fluidos Computacional (CFD)”**

### **1.4.2 Objetivos específicos**

- Validar un modelo conceptual en CFD utilizando los datos experimentales de Crookston (2010).
- Analizar y evaluar el comportamiento hidráulico del vertedor tipo laberinto bajo diferentes configuraciones geométricas utilizando CFD.
- Determinar los coeficientes de descarga del vertedor tipo laberinto.
- Caracterizar y cuantificar las condiciones de aireación, la inestabilidad e interferencia de las láminas vertientes para ser considerados en el diseño de un vertedor tipo laberinto.
- Generar las recomendaciones de diseño de vertedores tipo laberinto.

## **CAPÍTULO 2**

### **ANTECEDENTES**

#### **2.1 Descripción del vertedor tipo laberinto**

Los vertedores son barreras localizadas perpendicularmente a la dirección del movimiento del agua con el objeto de que el flujo se eleve por encima de la obstrucción a través de una abertura de forma regular (Bautista et al., 2013). Los parámetros geométricos que definen el comportamiento hidráulico de vertedores son la longitud de la cresta y la forma de la sección de control de flujo (Emiroglu et al., 2010; USBR, 2001). Los vertedores son estudiados utilizando los principios de la física clásica usando resultados experimentales para comprender las características del flujo y para determinar el coeficiente de descarga (Cd) bajo diferentes configuraciones; este coeficiente integra los efectos no considerados en la derivación de las ecuaciones utilizadas para estimar la descarga, tales efectos incluyen viscosidad, capilaridad, tensión superficial, distribución de la velocidad y curvatura hidrodinámica atribuible a la contracción del vertedor (Aydin *et al.*, 2011; El-Hady, 2011).

Las especificaciones e instalación adecuada de vertedores se han reportado por la Institución de Estándares Británicos (BSI, 1965), la Organización Internacional de Estandarización (ISO, 1980), la Sociedad Americana de Pruebas Materiales (ASTM, 1993) y el United States Bureau of Reclamation (USBR, 2001).

Existe diversidad de vertedores, principalmente del tipo lineal, sin embargo, los vertedores tipo laberinto son una opción viable con respecto a los vertedores tradicionales en términos de carga hidráulica para un gasto de diseño en un mismo ancho de canal. La particularidad del vertedor tipo laberinto reside en su forma plegada, vista en planta, esto se realiza para incrementar la longitud del vertedor en relación con el ancho del canal con el fin de aumentar la capacidad de descarga con respecto a la de un vertedor recto convencional ubicado en el mismo espacio e igual carga hidráulica.

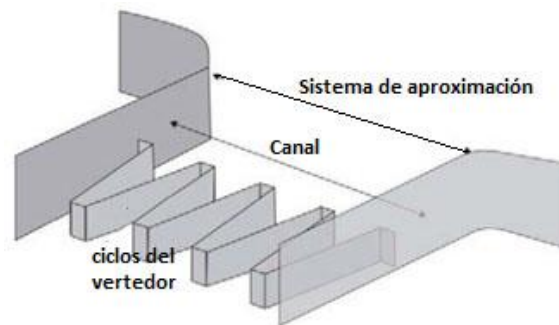
Existe infinidad de posibles configuraciones geométricas de vertedores tipo laberinto. Sin embargo, se pueden clasificar en tres configuraciones considerando la forma de sus ciclos: triangular, trapezoidal y rectangular. Los vertedores tipos laberinto cuyos ciclos son triangular y trapezoidal son más eficientes que los vertedores compuestos por ciclos rectangulares, basado en la descarga por unidad de longitud, (Crookston, 2010).

**PROGRAMA DE POSGRADO:  
DOCTORADO EN CIENCIAS Y TECNOLOGÍA DEL AGUA**

**“Análisis del comportamiento hidráulico del vertedor tipo laberinto mediante Dinámica de Fluidos Computacional (CFD)”**

Durante años, los vertedores tipo laberinto han sido de interés para ingenieros e investigadores por su comportamiento hidráulico; el aumento de la longitud de su cresta para un ancho de canal dado aumenta la capacidad de flujo a través del vertedor para una carga dada manteniendo una profundidad constante aguas arriba, así mismo, requiere menos bordo libre comparado con los vertedores lineales (Tullis *et al.*, 1995). Sin embargo, su aplicabilidad es limitada cuando la carga hidráulica ( $H_T$ ) crece por encima de determinados valores, algunas investigaciones establecen como límite de funcionamiento cuando  $H_T$  es entre 0.5 y 0.7 veces la altura del vertedor ( $P$ ) (Granell *et al.*, 2013).

Los vertedores tipo laberinto están compuestos por tres grupos de elementos, desde aguas arriba hasta aguas abajo (figura 2.1): están los dispositivos de aproximación, el canal del vertedor y finalmente los ciclos del vertedor. Un ciclo del vertedor está formado por paredes laterales y ápices aguas arriba y aguas abajo. Las diferentes partes que conforman los ciclos y la cantidad de éstos influyen en el comportamiento de descarga del vertedor.



**Figura 2.1.** Estructura de un vertedor tipo laberinto.

Matemáticamente, resulta difícil describir con precisión el flujo que pasa sobre un vertedor tipo laberinto, debido a que el flujo que pasa sobre él es tridimensional. La ecuación matemática debería considerar: energía, momentum, continuidad, líneas de corriente no paralelas, presión detrás de la lámina vertiente, dinámica de cavidad de aire debajo de la lámina vertiente, colisión de láminas vertientes, sumergencia local, efectos de la tensión superficial y viscosidad, geometría del vertedor y de la cresta. En consecuencia, los investigadores obtuvieron coeficientes de descarga determinados empíricamente en laboratorio a partir de resultados experimentales.

La ecuación general para vertedores lineales (ec. 2.1) fue adoptado por Tullis *et al.* (1995) para vertedores tipo laberinto.



**PROGRAMA DE POSGRADO:  
DOCTORADO EN CIENCIAS Y TECNOLOGÍA DEL AGUA**

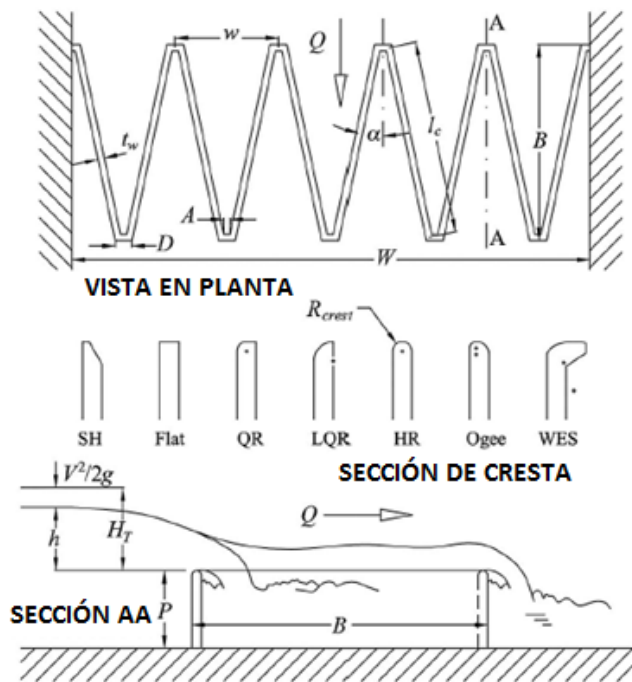
“Análisis del comportamiento hidráulico del vertedor tipo laberinto mediante Dinámica de Fluidos Computacional (CFD)”

$$Q = \frac{2}{3} \sqrt{2g} C_d L H_T^{3/2} \quad (2.1)$$

Donde  $Q$  es la descarga sobre el vertedor tipo laberinto,  $C_d$  es el coeficiente de descarga (adimensional),  $g$  es la aceleración debido a la gravedad,  $L$  es la longitud característica del vertedor,  $H_T$  es la carga total sobre el vertedor. La ecuación (2.1) asume un flujo unidimensional e ideal (incompresible, no viscoso, sin tensión superficial, etc.), presión atmosférica debajo de la lámina vertiente, presiones hidrostáticas, líneas de corriente horizontales y paralelas.

**2.2 Parámetros del vertedor tipo laberinto**

El diseño de un vertedor está definido en términos de la altura de la cresta operando bajo una carga hidráulica dada, de manera que las dimensiones del vertedor sean tales que se obtenga un adecuado funcionamiento hidráulico, en la figura (2.2) se muestran los parámetros geométricos de un vertedor tipo laberinto.



**Figura 2.2.** Parámetros geométricos de un vertedor tipo laberinto (Crookston 2010).

Las investigaciones publicadas respecto a la optimización y diseño del vertedor tipo laberinto han desarrollado numerosos parámetros de diseño y relaciones adimensionales que son considerados para describir y cuantificar el funcionamiento del vertedor.

**PROGRAMA DE POSGRADO:  
DOCTORADO EN CIENCIAS Y TECNOLOGÍA DEL AGUA****“Análisis del comportamiento hidráulico del vertedor tipo laberinto mediante Dinámica de Fluidos Computacional (CFD)”**

**Relación carga total-altura del vertedor ( $H_T/P$ ).** Es adimensional y comúnmente utilizado para representar el comportamiento hidráulico del vertedor tipo laberinto. El aumento de la carga sobre el vertedor incrementa la longitud de la interferencia de las láminas vertientes aguas abajo y su funcionamiento hidráulico se ve afectado. Varios investigadores recomendaron un límite superior para la relación  $H_T/P$  basado en la disminución de la eficiencia hidráulica observado en sus resultados experimentales. Lux (1989) recomendó que la relación  $H_T/P$  se encuentre dentro del rango de 0.45 a 0.50; Tullis *et al.* (1995), recomiendan como límite superior 0.9 basado en sus resultados experimentales.

**Relación de aspecto vertical ( $w/P$ ).** La relación del ancho del ciclo ( $w$ ) con la altura del vertedor ( $P$ ), fue considerada por Taylor (1968) en su influencia en la interferencia de las láminas vertientes, recomendó que la relación  $w/P$  debería ser mayor a 2. Otras recomendaciones de diseño también fueron hechas por Tullis *et al.* (1995) ( $3 \leq w/P \leq 4$ ), Magalhães y Lorena (1989) ( $w/P \geq 2.5$ ), Lux (1989) ( $w/P \geq 2$ ). Lux (1989) encontró en sus experimentos que la reducción de la relación  $w/P$  disminuye el coeficiente de descarga.

**Relación del espesor relativo ( $P/t_w$ ).** En la práctica el espesor mínimo de la pared del vertedor ( $t_w$ ) es determinado a partir de un análisis estructural. Tullis *et al.* (1995) en las pruebas de sus modelos físicos en laboratorio presenta la relación  $P/t_w=6$ , mientras que en los modelos físicos con los que trabajó Willmore (2004)  $P/t_w=8$ . Sin embargo, el vertedor tipo laberinto construido en la presa del lago Townsend  $P/t_w=13.3$  (Tullis and Crookston, 2008).

En modelos a escala en laboratorio se ha observado que para vertedores tipo laberinto de cresta viva valores variables de  $P/t_w$  tiene valores similares del coeficiente de descarga ( $C_d$ ) para un determinado  $H_T/P$ . Sin embargo, para vertedores de cresta de medio y cuarto redondeo se tiene valores diferentes del  $C_d$  (Crookston, 2010).

**Radio de curvatura ( $H_T/R_{cresta}$ ).** El coeficiente de descarga está influenciado por la relación  $H_T/R_{cresta}$ . Matthews (1963) estudió los efectos de la curvatura en vertedores con cresta redondeada, y concluyó que los vertedores con menor radio de curvatura tendrían un mayor  $C_d$  que uno con un radio de curvatura más grande. Una curva  $R_{cresta}$  vs  $C_d$  para representar la influencia del radio de curvatura sobre el coeficiente de descarga en vertedores de medio redondeo de cresta fue presentado por Rouvé e Indlekofer (1974). La forma de la lámina vertiente y la cavidad de aire detrás de ésta depende del radio de curvatura (Crookston, 2010).

**PROGRAMA DE POSGRADO:**  
**DOCTORADO EN CIENCIAS Y TECNOLOGÍA DEL AGUA****“Análisis del comportamiento hidráulico del vertedor tipo laberinto mediante Dinámica de Fluidos Computacional (CFD)”**

**Magnificación de la longitud ( $M$ ).**  $M$  se presenta como la relación  $L_{ciclo}/w$ . De acuerdo con investigaciones realizadas por Hay y Taylor (1970), la magnificación de la longitud debe tener un valor mayor a 2. El incremento en la relación  $L_{ciclo}/w$  aumenta la magnificación del flujo ( $Q_{lab}/Q_{lin}$ ) sólo marginalmente, pues se ha observado que no existe un aumento significativo en la magnificación del flujo para valores de  $L_{ciclo}/w$  superiores a 8.

**Ángulo de la pared lateral ( $\alpha$ ).** El ángulo  $\alpha$  de la pared lateral puede variar entre 0 (forma rectangular) y un valor máximo correspondiente a una forma triangular. Al aumentar el ángulo  $\alpha$ , la longitud del vertedor disminuye y el grado de contracción del flujo en la entrada al canal aguas arriba también se reduce. El funcionamiento mejora hasta  $\alpha=\alpha_{max}$ , correspondiendo a una forma en planta triangular o cuando  $\alpha=0.75\alpha_{max}$  en forma trapezoidal (Hay y Taylor, 1970). La longitud y el ancho del ciclo se relacionan con  $\alpha$  con la ecuación (2.2) para vertedores trapezoidales tipo laberinto y con la ecuación (2.3) para vertedores triangulares tipo laberinto.

$$\sin \alpha = \frac{w-2A_c}{L_{ciclo}-2A_c} \quad \text{Trapezoidal} \quad (2.2)$$

$$\sin \alpha = \frac{w}{L_{ciclo}} \quad \text{Triangular} \quad (2.3)$$

Donde  $\alpha$  es el ángulo de la pared lateral (en grados),  $A_c$  es la longitud del ápice ubicado al centro del espesor la pared del vertedor y  $L_{ciclo}$  es la longitud del ciclo.

**Relación del ápice con el ancho del ciclo ( $A/w$ ).**  $A$  es la longitud interior del ápice de un vertedor tipo laberinto. Comúnmente los ápices facilitan la construcción de un vertedor tipo laberinto de concreto (cimbrado y colocación de varillas de acero). Desde una perspectiva más hidráulica el vertedor tipo laberinto con una transición suave en los ápices aguas arriba son relativamente más eficientes que la transición abrupta que presenta un vertedor tipo laberinto trapezoidal.

Se observó el incremento de la eficiencia en la presa Brazos (Tullis and Young, 2005) al crear una transición suave con vértices redondeados (figura 2.3). La relación  $A/w$  es utilizado para caracterizar y comparar las geometrías de vertedores tipo laberinto, sin embargo, no presenta un rol crítico en la optimización del diseño. Tullis *et al.* (1995) recomendaron que el rango de la longitud del ápice ( $A$ ) debe variar entre 1 y 2 veces del espesor de la pared.

Los valores recomendados por diversos investigadores respecto a los parámetros que influyen de manera importante en el funcionamiento del vertedor tipo laberinto se observan en el cuadro (2.1).

**PROGRAMA DE POSGRADO:  
 DOCTORADO EN CIENCIAS Y TECNOLOGÍA DEL AGUA**

**“Análisis del comportamiento hidráulico del vertedor tipo laberinto mediante Dinámica de Fluidos Computacional (CFD)”**

**Cuadro 2.1.** Relación de parámetros geométricos para el funcionamiento del vertedor tipo laberinto.

Relación	Autor	Observaciones
$1.23 \leq L_{ciclo}/w \leq 4.35$ $1.15 \leq w/P \leq 4.61$ $5.7^\circ \leq \alpha \leq 20.6^\circ$	Kozák y Svab (1961)	Forma trapezoidal, sólo aplicable a los límites de las pruebas experimentales definidas por Taylor (1968).
$H_T/P \leq 0.5$ $2 \leq w/P \leq 5$ $2 \leq L_{ciclo}/w \leq 8$ $1 \leq N \leq 3$	Hay y Taylor (1970)	Ninguno de los parámetros afecta la interferencia.
$2 \leq w/P \leq 2.5$ $W/P < 2$ $H_T/P \leq 7$ $A/w \leq 0.0765$	Lux (1989)	El vertedor es eficiente hidráulicamente.
$w/P \geq 2.5$	Magalhaes y Lorena (1989)	El vertedor es eficiente hidráulicamente
$H_T/P \leq 0.9$ $3 \leq w/P \leq 4$ $t_w \leq A \leq 2t_w$ $W/P < 3$ $6^\circ \leq \alpha \leq 36^\circ$ $L_{ciclo}/w < 9.5$	Tullis (1995)	El vertedor es eficiente hidráulicamente
$L_{ciclo}/w < 9.5$ $2A/w < 0.08$	Falvey (2003)	Si $L_{ciclo}/w$ es mayor a 10, disminuye la eficiencia. Si $2A/w < 0.08$ , no se tiene efecto significativo en la interferencia de la lámina vertiente.
$W/P < 3$	Paxson y Savage (2006)	Aumento en el rendimiento hidráulico

**PROGRAMA DE POSGRADO:**  
**DOCTORADO EN CIENCIAS Y TECNOLOGÍA DEL AGUA**

“Análisis del comportamiento hidráulico del vertedor tipo laberinto mediante Dinámica de Fluidos Computacional (CFD)”



**Figura 2.3.** Ápices circulares del vertedor tipo laberinto de la presa Brazos, Texas, USA.

**Eficiencia del vertedor ( $\mathcal{E}'$ ).** La eficiencia del vertedor (ec. 2.4) permite comparar el comportamiento hidráulico de un vertedor tipo laberinto en relación con un vertedor lineal, se presenta como:

$$\mathcal{E}' = \frac{C_{d(\alpha)}}{C_{d(90)}} M \quad (2.4)$$

De acuerdo con Falvey (2003),  $\mathcal{E}'$  es mayor para vertedores tipo laberinto cuyo ángulo de pared lateral es igual a  $8^\circ$  para todos los valores de la relación  $H_T/P$  basado sus análisis en los datos de Tullis *et al.* (1995).

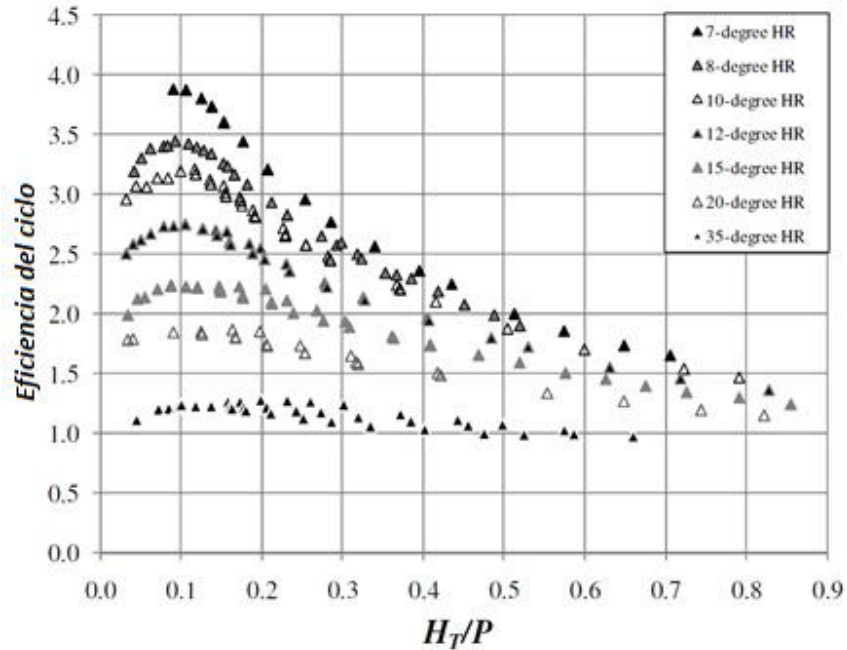
**Eficiencia del ciclo ( $\mathcal{E}''$ ).** La eficiencia del ciclo (ec. 2.5) fue desarrollado por Willmore (2004), permite optimizar el diseño del vertedor tipo laberinto, es particularmente útil para bajas cargas hidráulicas.

$$\mathcal{E}'' = C_{d(\alpha)} M \quad (2.5)$$

Como se observa en la figura (2.4), la eficiencia del ciclo tiende a converger a 1 a medida que incrementa la carga sobre el vertedor para todos los ángulos  $\alpha$ .

**PROGRAMA DE POSGRADO:  
DOCTORADO EN CIENCIAS Y TECNOLOGÍA DEL AGUA**

“Análisis del comportamiento hidráulico del vertedor tipo laberinto mediante Dinámica de Fluidos Computacional (CFD)”



**Figura 2.4.** Eficiencia del ciclo ( $E'$ ) de un vertedor trapezoidal tipo laberinto de medio redondeo de cresta.

(Willmore, 2004).

**2.3 Perfil de cresta.**

La forma de la cresta tiene influencia en la eficiencia hidráulica de un vertedor tipo laberinto. Willmore (2004), indica que un vertedor construido con cresta tipo ogee posee mayor eficiencia hidráulica cuyo radio principal es  $1/3 t_w$  asociado con un segundo radio de  $2/3 t_w$ . Formas de crestas semicirculares y tipo ogee han demostrado ser más eficientes porque permite que la lámina vertiente se mantenga adherida a la pared del vertedor para pequeñas cargas, sin embargo, para cargas más elevadas se presentan presiones subatmosféricas entre la pared del vertedor y la lámina vertiente.

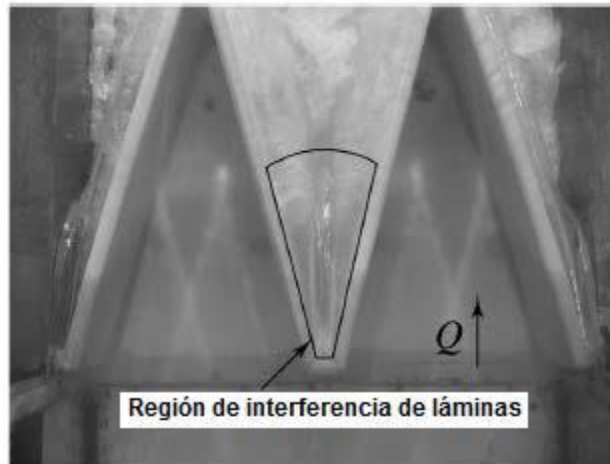
**2.4 Interferencia de láminas vertientes.**

La interferencia de láminas vertientes (figura 2.5) ocurre cuando las láminas de descarga, en los ápices aguas arriba, colisionan entre sí y puede producir una estela de aire aguas abajo del ápice, ondas estacionarias y bolsas de aire. La interferencia de la lámina vertiente reduce la capacidad de descarga en el vertedor tipo laberinto; el tamaño de la región influenciada por la interferencia depende de la longitud del ápice, la forma de la cresta, la altura del vertedor, la carga hidráulica, y las

**PROGRAMA DE POSGRADO:**  
**DOCTORADO EN CIENCIAS Y TECNOLOGÍA DEL AGUA**

“Análisis del comportamiento hidráulico del vertedor tipo laberinto mediante Dinámica de Fluidos Computacional (CFD)”

condiciones de aireación. Esta interferencia aumenta con la reducción del ángulo  $\alpha$  y el incremento del número de ciclos, principalmente al aumentar la carga sobre la cresta del vertedor.



**Figura 2.5.** Interferencia de láminas vertientes (Crookston y Tullis, 2012).

Lux (1989) recomendó que la relación  $A/w$  debía ser la menor posible con la intención de incrementar el rendimiento del vertedor tipo laberinto, para vertedores trapezoidales sugirió la relación  $A/w < 0.0765$ , que puede utilizarse sin que ello implique grandes reducciones en el rendimiento, por efectos de interferencia de la lámina vertiente.

Indlerkofer y Rouvé (1975) estudiaron la interferencia de láminas vertientes en vertedores de esquina con cresta viva. Un vertedor de esquina se describe como un vertedor triangular de un sólo ciclo cuyas paredes laterales son perpendiculares a las paredes del canal. Indlerkofer y Rouvé (1975), identifican una región perturbada donde los flujos de descarga de cada pared lateral del vertedor de esquina colisionan y una segunda región donde las líneas de corriente son perpendiculares a la pared del vertedor como un vertedor lineal.

Falvey (2003) desarrolló una relación empírica tomando en cuenta la relación de datos de Indlerkofer y Rouvé (1975). También desarrolló una segunda ecuación basado en el análisis de datos experimentales de un vertedor tipo laberinto, sin embargo, no indicó cuál de las dos ecuaciones propuestas, es la más apropiada o precisa.

Osuna (2000) realizó el análisis del comportamiento hidráulico de un vertedor dentro de un canal y oblicuo a la dirección del flujo aguas arriba a partir del teorema de la cantidad de movimiento. Tal desarrollo matemático ha sido adaptado por Granell (2010) a vertedores tipo laberinto.

**PROGRAMA DE POSGRADO:**  
**DOCTORADO EN CIENCIAS Y TECNOLOGÍA DEL AGUA****“Análisis del comportamiento hidráulico del vertedor tipo laberinto mediante Dinámica de Fluidos Computacional (CFD)”****2.5 Aireación de la lámina vertiente.**

La aireación se refiere a la presencia o ausencia de cavidades de aire debajo de la lámina vertiente. Varios investigadores utilizan diferentes términos para referirse a las distintas condiciones de aireación. Para Falvey (2003) existe cuatro tipos de condiciones de aireación: cavidad, atmosférico, subatmosférico y presión, Lux (1989) presenta tres tipos de condiciones de aireación: aireado, transitorio (cuando se presenta la inestabilidad de la cavidad de aire) y condición de aireación suprimida, mientras que Crookston (2010) menciona cuatro tipos de aireación: flujo adherido a la pared, aireado, parcialmente aireado y ahogado.

La condición de aireación está influenciada por la forma de cresta, la altura del vertedor, la carga hidráulica la turbulencia del flujo detrás de la lámina vertiente, la trayectoria del flujo que pasa sobre la cresta y la presión detrás de la lámina vertiente (sub-atmosférica para vertedor no ventilado o atmosférica para vertedor ventilado). Las condiciones de aireación caracterizan el comportamiento de la lámina vertiente, Crookston y Tullis (2012) mediante sus experimentos en modelos físicos afirman que, las condiciones de aireación pueden producir fluctuaciones de presiones en las paredes laterales del vertedor, sonido de baja frecuencia y vibraciones.

Sartor (2011) explica que la manera más cómoda y conocida de minimizar el efecto de succión del flujo durante la descarga es suministrando aire por medio de conductos, proceso conocido como aireación artificial. Cuando no se presenta aireación en la descarga se produce el efecto de la cavitación. Hinchliff y Houston (1984) recomiendan el uso de divisores que se colocan en la parte superior de la cresta a una distancia de aproximadamente 10% de la longitud de la pared lateral desde el ápice aguas abajo.

**2.6 Configuración del ciclo, orientación y ubicación del vertedor tipo laberinto.**

Desde una perspectiva tradicional, los vertedores tipo laberinto estarían diseñados para una configuración lineal. Sin embargo, se ha observado que una configuración del ciclo en forma de arco, aumenta la capacidad de la descarga, al mejorar la orientación del vertedor de laberinto en la aproximación de flujo.

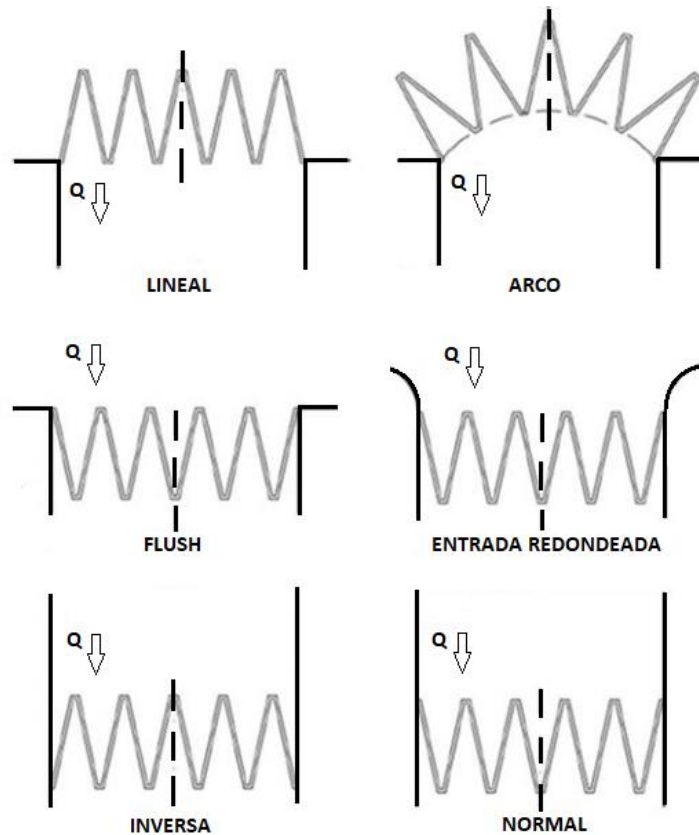
Houston (1983) realizó un estudio a la presa Hyrum localizada sobre el río Little Bear al Sur de la ciudad de Hyrum, Utah, donde probó varias orientaciones y ubicaciones del vertedor tipo laberinto, en relación con el canal de descarga del vaso de almacenamiento. Houston encontró que,



**PROGRAMA DE POSGRADO:  
DOCTORADO EN CIENCIAS Y TECNOLOGÍA DEL AGUA**

“Análisis del comportamiento hidráulico del vertedor tipo laberinto mediante Dinámica de Fluidos Computacional (CFD)”

para las condiciones de aproximación del flujo canalizadas, la orientación normal tiene una descarga 3.5% mayor que la orientación inversa. En la figura (2.6) se muestra las posibles configuraciones, orientaciones y ubicaciones del vertedor tipo laberinto.



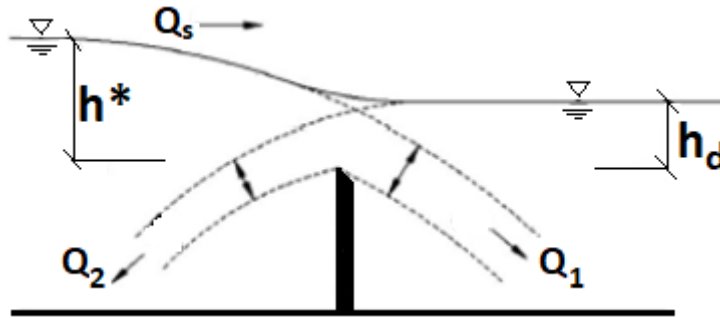
**Figura 2.6.** Configuración, orientación y ubicación del vertedor tipo laberinto.

### 2.7 Ahogamiento del vertedor.

Se ha observado que el fenómeno del ahogamiento en vertedores tipo laberinto tiene un comportamiento parecido al que se presenta en el funcionamiento de los vertedores lineales (Tullis *et al.*, 2007), es decir, esta condición puede evitarse adoptando las mismas medidas que en el diseño de vertedores lineales, con el aumento de la pendiente del canal o bien incrementando la altura del vertedor en su cara aguas abajo.

El método de ahogamiento del vertedor lineal, desarrollado por Villemonte (1947) ha sido aplicado comúnmente para vertedores tipo laberinto (figura 2.7). Villemonte (1947) realizó una serie

de pruebas experimentales, observó que la descarga sobre la cresta ahogada de un vertedor en condiciones de ahogamiento puede estimarse con la expresión (2.6) para la descarga ahogada,  $Q_s$ :



**Figura 2.7.** Ilustración de un vertedor sumergido. (Villemonete, 1947).

$$Q_s = Q_1 \left[ 1 - \left( \frac{h_d}{h^*} \right)^{3/2} \right]^{0.385} \quad (2.6)$$

Dónde:  $Q_1$  es el gasto considerado a partir de la carga aguas arriba,  $Q_s$  es el gasto bajo las condiciones de flujo ahogado,  $h^*$  y  $h_d$  son las cargas hidráulicas aguas arriba y aguas abajo sobre la cresta del vertedor, respectivamente.

Por su parte, Taylor (1968) comparó el factor de magnificación del flujo ( $Q_d/Q_s$ ), para una carga aguas arriba dada, con el factor de ahogamiento  $h_d/h^*$ , donde  $Q_d$  es el flujo ahogado del vertedor tipo laberinto, y  $Q_s$  el flujo ahogado del vertedor lineal.  $Q_d$  fue determinado experimentalmente, y  $Q_s$  fue calculado con la ecuación (2.6). Taylor concluyó que los efectos de ahogamiento son menos significativos para vertedores tipo laberinto que para vertedores lineales.

## 2.8 Métodos de diseño del vertedor tipo laberinto

Gentilini (1940) publicó un estudio usando datos previos de vertedores oblicuos localizados dentro de un canal. Juntó múltiples vertedores oblicuos para formar vertedores triangulares tipo laberinto. Los vertedores fueron probados para tres ángulos diferentes de pared lateral:  $\alpha=30^\circ$ ,  $45^\circ$  y  $60^\circ$ . Los resultados de Gentilini fueron presentados como una función de  $h/w$  y dependían del valor de  $w/P$ , debido que la carga hidráulica era grande en relación con el ancho del ciclo,

Kozák y Sváb (1961) probaron once diferentes vertedores trapezoidales tipos laberinto de cresta plana y chaflanado por ambos bordes. Los vertedores estudiados tuvieron las siguientes

**PROGRAMA DE POSGRADO:**  
**DOCTORADO EN CIENCIAS Y TECNOLOGÍA DEL AGUA****“Análisis del comportamiento hidráulico del vertedor tipo laberinto mediante Dinámica de Fluidos Computacional (CFD)”**

condiciones:  $0.05 \leq h/P \leq 0.25$ ,  $5.7^\circ \leq \alpha \leq 20.6^\circ$ ,  $1.23 \leq L_{ciclo}/w \leq 4.35$ ,  $1.15 \leq w/P \leq 4.61$ . Kozák y Sváb (1961), concluyeron que la capacidad de descarga del vertedor tipo laberinto es apreciablemente mayor que uno lineal para una misma carga hidráulica. También concluyeron que un mayor número de ciclos pequeños son más eficientes y económicos que un vertedor tipo laberinto de longitud equivalente compuesto por menos ciclos. Es importante resaltar que el estudio se realizó para cargas pequeñas donde la capacidad de descarga no es significativamente afectada por el ángulo de la pared lateral y la interferencia de las láminas vertientes.

Taylor (1968) realizó un estudio detallado con 24 modelos, principalmente con vertedores triangulares tipo laberinto y un número limitado de vertedores rectangulares y trapezoidales tipo laberinto. Dos tipos de crestas fueron utilizados en el estudio: la de cresta viva y de medio redondeo. Los vertedores fueron probados para valores de  $h/P$  en el rango de  $0.05 \leq h/P \leq 0.55$ . Hay y Taylor (1970), definieron el desempeño hidráulico en términos de magnificación del flujo ( $Q_{lab}/Q_{lin}$ =descarga en vertedor tipo laberinto/descarga en vertedor lineal) vs  $h/P$ . Para determinar la ventaja obtenida del aumento de la longitud de la cresta, presentaron la ecuación (2.7) como la eficacia ( $E$ ) del vertedor tipo laberinto:

$$E(\%) = \frac{Q_{lab}/Q_{lin}}{L/w} * 100 \quad (2.7)$$

Hay y Taylor (1970) presentaron recomendaciones respecto a la relación  $L_{ciclo}/w$ , el ahogamiento del vertedor y la interferencia de la lámina vertiente; sugieren utilizar el valor máximo del ángulo de la pared lateral,  $\alpha$ , dadas por las ecuaciones (2.2) y (2.3).

Darvas (1971) introdujo una ecuación de descarga dimensional  $C_{d-Darvas}$  con unidades  $ft^{0.5}s^{-1}$  (ec. 2.8). Los resultados lo presentan en forma gráfica relacionando  $C_{d-Darvas}$  con  $L_{ciclo}/w$  para una familia de curvas de  $H_T/P$  ( $0.2 \leq H_T/P \leq 0.6$ ) para vertedores trapezoidales tipo laberinto, para  $w/P \geq 2$ . Su criterio de diseño está limitado para un perfil de cresta de cuarto redondeo y se basa en estudios aplicados a modelos físicos de dos presas australianas: Avon ( $\alpha=22.8^\circ$ ) y Woronora ( $\alpha=27.5^\circ$ ).

$$C_{d-Darvas} = \frac{Q}{WH_T^{1.5}} \quad (2.8)$$

Hinchliff y Houston (1984) de la Oficina de Recuperación de los Estados Unidos (U.S.B.R por sus siglas en inglés), realizaron estudios del vertedor tipo laberinto de la presa Ute localizado en

**PROGRAMA DE POSGRADO:**  
**DOCTORADO EN CIENCIAS Y TECNOLOGÍA DEL AGUA**

**“Análisis del comportamiento hidráulico del vertedor tipo laberinto mediante Dinámica de Fluidos Computacional (CFD)”**

el estado de Nuevo México, Estados Unidos. El diseño de dicho vertedor se realizó según las recomendaciones de los estudios de Hay y Taylor (1970), sin embargo, se encontraron discrepancias en el diseño atribuido a la estimación de la carga total aguas arriba del vertedor.

Hinchliff y Houston (1984) desarrollaron guías de diseño con base en los resultados obtenidos de la modelación de las presas Ute y Hyrum, ubicadas en Estados Unidos, proporcionando información robusta sobre la ubicación del vertedor tipo laberinto.

Lux y Hinchliff (1985) y Lux (1984,1989) estimaron la descarga de un vertedor de un sólo ciclo (ec. 2.9) como función del coeficiente de descarga, del aspecto vertical y de una constante ( $k$ ) que depende de la forma del ciclo del vertedor (0.18 para un ciclo triangular, 0.1 para un ciclo trapezoidal).

$$Q_{ciclo} = C_{d-Lux} \left( \frac{w/P}{w/P+k_{ciclo}} \right) w \sqrt{g} H_T^{1.5} \quad (2.9)$$

El coeficiente de descarga se obtiene al relacionar  $H_T/P$  con la familia de curvas de la relación  $L/W$  presentadas por Lux y Hichliff (1985).

Magalhães y Lorena (1989) desarrollaron curvas similares a las de Darvas (1971), excepto que sus resultados son aplicados para un vertedor cuyo perfil de cresta es tipo WES y el coeficiente de descarga  $C_{d-M\&L}$  está dado en términos dimensionales (ec. 2.10).

$$C_{d-M\&L} = \frac{Q}{w \sqrt{2g} H_T^{1.5}} \quad (2.10)$$

Los resultados experimentales del coeficiente de descarga obtenidos en este estudio son sistemáticamente inferiores a los reportados por Darvas (1971) (ec.2.8).

Tullis *et al.* (1995) realizaron un ajuste menor a la ecuación convencional del vertedor para definir el coeficiente de descarga ( $C_{d-Tullis}$ ). En la ecuación (2.11)  $C_{d-Tullis}$  es adimensional y la longitud característica es la longitud efectiva del vertedor tipo laberinto definida como:  $L_e = 2*N*(A+L)$ .

$$C_{d-Tullis} = \frac{3Q}{2\sqrt{2g} H_T^{1.5} L_e} \quad (2.11)$$

Los valores del coeficiente de descarga son presentados como  $C_{d-Tullis}$  vs  $H_T/P$  para una familia de curvas del ángulo  $\alpha$ . Sin embargo, el método de diseño se limita a vertedores trapezoidales con perfiles de cresta tipo cuarto redondeo,  $\alpha \leq 18^\circ$ , y  $3 \leq w/P \leq 4$ .

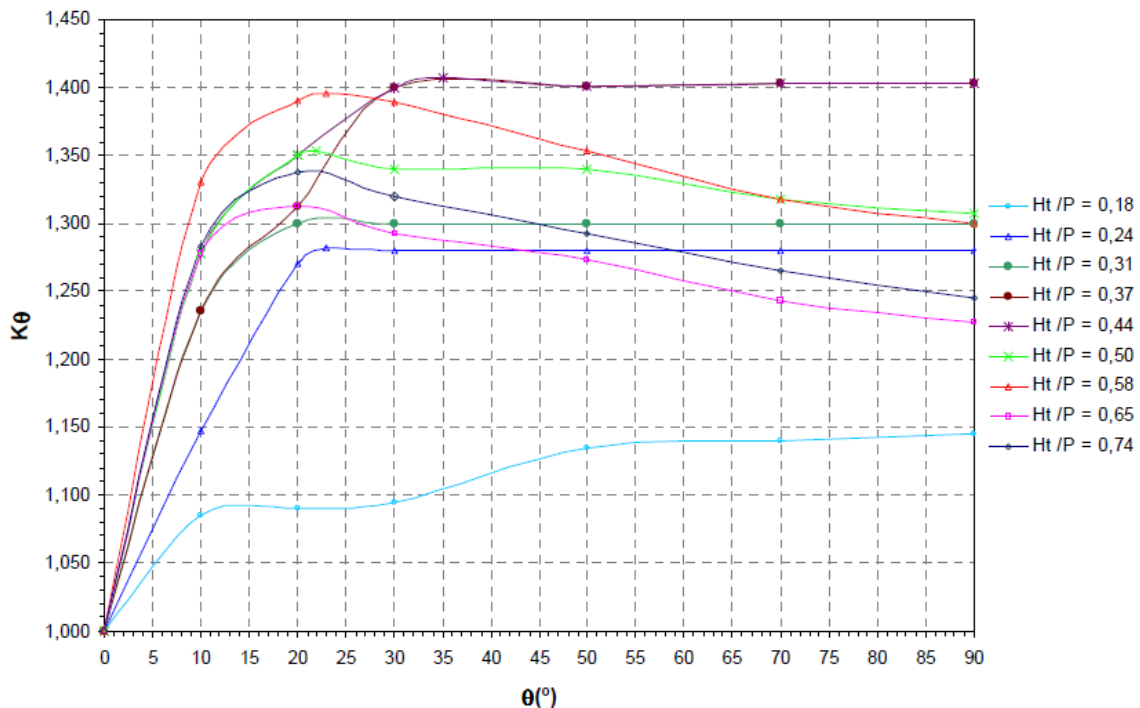
**PROGRAMA DE POSGRADO:  
DOCTORADO EN CIENCIAS Y TECNOLOGÍA DEL AGUA**

“Análisis del comportamiento hidráulico del vertedor tipo laberinto mediante Dinámica de Fluidos Computacional (CFD)”

Una contribución significativa de Tullis et al. (1995) fue la implementación de una hoja de cálculo para optimizar el método de diseño. Este enfoque es el método generalizado más utilizado para el diseño de vertedores tipo laberinto en los Estados Unidos. Brinker (2005) reportó que dicho método fue utilizado para el diseño un vertedor de emergencia tipo laberinto (N=59 ciclos,  $\alpha = 8^\circ$ ) para el Lago Boyd, ubicado en Loveland, Colorado, USA

Melo *et al.* (2002), con base en estudios experimentales expandieron el trabajo de Magalhães y Lorena (1989) al agregar un parámetro de ajuste ( $k_\theta$ ) para verificar la influencia de las paredes convergentes de un canal sobre vertedores tipo laberinto de un sólo ciclo. Con los valores de  $k_\theta$  en función de  $H_T/P$  y  $\vartheta$ , Melo *et al.* (2002) corrigieron la ecuación propuesta por de Magalhães y Lorena (1989) (ec. 2.12). En la figura (2.8) se muestra la variación del parámetro de  $k_\theta$  en función del ángulo de las paredes convergentes.

$$C_{d-Melo} = \frac{Q}{k_\theta W \sqrt{2gH_T^{1.5}}} \tag{2.12}$$



**Figura 2.8.** Variación del parámetro de muros convergentes ( $k_\theta$ ) presentada por Melo *et al.* (2002).

**PROGRAMA DE POSGRADO:  
DOCTORADO EN CIENCIAS Y TECNOLOGÍA DEL AGUA**

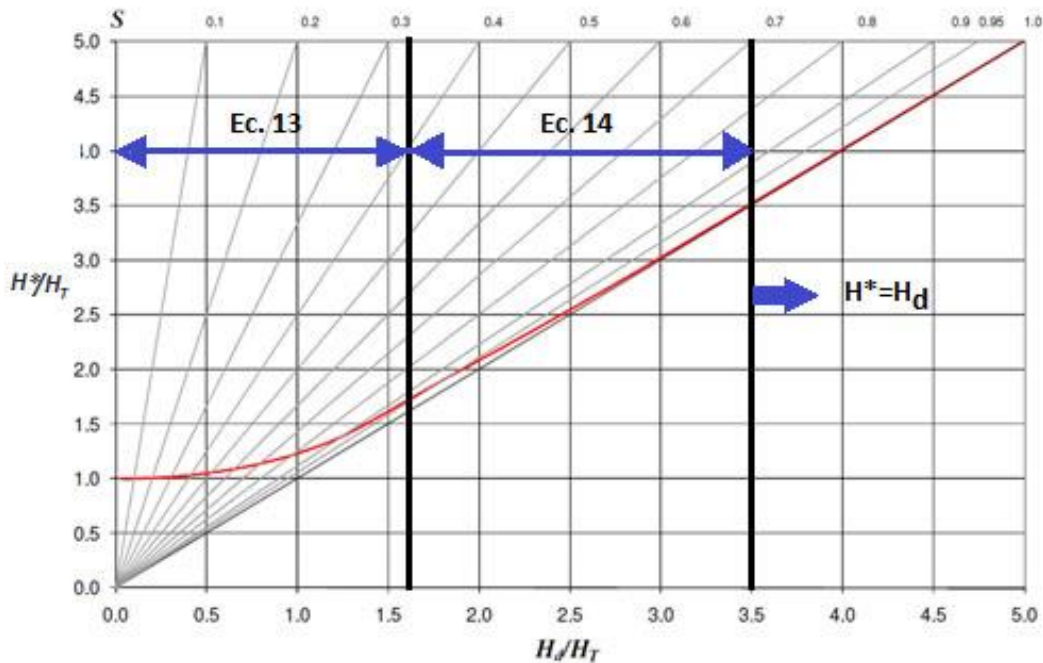
“Análisis del comportamiento hidráulico del vertedor tipo laberinto mediante Dinámica de Fluidos Computacional (CFD)”

El método de sumergencia del vertedor lineal desarrollado por Villemonte (1947) fue el método más comúnmente aplicado para vertedores tipo laberinto bajo condición de sumergencia. Tullis *et al.* (2007), desarrollaron una relación adimensional de cargas de sumergencia para vertedores tipo laberinto con un promedio de error predictivo de 0.9%. En la figura (2.9), una sola función (línea roja) no fue encontrada para representar con exactitud la curva de sumergencia, la curva fue dividida en tres secciones representadas por las ecuaciones (2.13)-(2.15).

$$\frac{H^*}{H_T} = 0.3320 \left(\frac{H_d}{H_T}\right)^4 + 0.2008 \left(\frac{H_d}{H_T}\right)^2 + 1 ; 0 \leq \frac{H_d}{H_T} \leq 1.53 \quad (2.13)$$

$$\frac{H^*}{H_T} = 0.9379 \frac{H_d}{H_T} + 0.2174 ; 1.53 \leq \frac{H_d}{H_T} \leq 3.5 \quad (2.14)$$

$$H^* = H_d ; 3.5 \leq \frac{H_d}{H_T} \quad (2.15)$$



**Figura 2.9.** Límites de sumergencia de acuerdo a las ecs. 13-15 (Tullis *et al.*, 2007).

Donde  $H^*$  es la carga total aguas arriba cuando el vertedor se encuentra sumergido,  $H_T$  es la carga total aguas arriba cuando el vertedor no se encuentra sumergido y  $H_d$  es la carga total aguas abajo del vertedor tipo laberinto en estado de sumergencia.

**PROGRAMA DE POSGRADO:**  
**DOCTORADO EN CIENCIAS Y TECNOLOGÍA DEL AGUA****“Análisis del comportamiento hidráulico del vertedor tipo laberinto mediante Dinámica de Fluidos Computacional (CFD)”**

Emiroglu *et al.* (2010) propusieron la ecuación (2.16) para determinar la capacidad de descarga de un vertedor triangular tipo laberinto de un sólo ciclo ( $22.5^\circ \leq \alpha \leq 75^\circ$ ) utilizado como vertedor lateral de un canal recto. Dicho estudio reporta el efecto de parámetros adimensionales del vertedor y del número de Froude aguas arriba ( $Fr$ ) en el coeficiente de descarga, en el perfil de velocidad y de la superficie libre del agua.

$$C_{d-Emiroglu} = \left[ 18.6 - 23.535 \left( \frac{W}{w} \right)^{0.012} + 6.769 \left( \frac{W}{L} \right)^{0.112} - 0.502 \left( \frac{P}{h} \right)^{4.024} + 0.094 \sin(2\alpha) - 0.393 Fr^{2.155} \right]^{1.431} \quad (2.16)$$

## **CAPÍTULO 3**

### **DINÁMICA DE FLUIDOS COMPUTACIONAL (CFD)**

#### **3.1 Modelación de estructuras hidráulicas**

En la actualidad, no se construyen estructuras hidráulicas importantes sin estudios previos apoyados en la modelación física o numérica. La modelación implica simular un fenómeno real, conceptualizándolo y simplificándolo en mayor medida, para luego describirlo y cuantificarlo. En general existen dos maneras de modelación: física y numérica.

La modelación física es una técnica ampliamente empleada en la solución de problemas en ingeniería para la investigación o el diseño de estructuras hidráulicas. Un modelo físico es la reproducción a escala de la estructura objeto de estudio, en la cual se pueden simular las diferentes condiciones de operación, con la finalidad de predecir el comportamiento de la estructura durante su vida útil.

Los resultados y recomendaciones que se obtienen a partir de los modelos físicos han sido históricamente de gran utilidad en la investigación y en el diseño hidráulico de estructuras, sin embargo, se han identificado algunas limitaciones, como las dimensiones del modelo, dificultades en los métodos de medición y recolección de datos, la fiel reproducción de las condiciones de contorno, costos de montaje entre otros (Mateos, 2000).

Según Santos *et al.* (2015), en grandes escalas el modelo físico se asemeja a la realidad del prototipo, pero representa mayor costo; mientras que en escalas pequeñas se presentan efectos de escala originando errores en el análisis de resultados.

Un modelo físico no representa valor alguno si el mismo no puede predecir el comportamiento del fenómeno del prototipo, razón por la cual los modelos físicos deben ser calibrados. Para prototipos donde la fricción o deformaciones del fondo (rugosidad) son importantes, el proceso de calibración es más complejo. Para simular descargas en el modelo, es necesario calibrar el mismo para un amplio rango de gastos. En la simulación de velocidades, modelos con escalas geométricas distorsionadas resulta difícil la reproducción de las distribuciones de velocidad de manera precisa, la cual genera información sólida de la precisión del modelo (Santos *et al.*, 2015).

Es claro que el uso de las técnicas numéricas como la Dinámica de Fluidos Computacional (CFD) permite un número muy importante de ventajas. Sobre todo, permite reducir tiempo y costos



**PROGRAMA DE POSGRADO:**  
**DOCTORADO EN CIENCIAS Y TECNOLOGÍA DEL AGUA**

“Análisis del comportamiento hidráulico del vertedor tipo laberinto mediante Dinámica de Fluidos Computacional (CFD)”

en fases de diseño, y además proporciona un número casi ilimitado de información: cada celda que compone el dominio de simulación equivale a un pequeño sensor que mide cada una de las variables del flujo. Además, en aquellas situaciones en las que la experimentación no es segura o viable, la herramienta de CFD permite obtener información muy valiosa de las variables, en respuesta al comportamiento hidráulico de la estructura, de utilidad para la toma de decisiones.

Las principales ventajas y desventajas de los métodos basados en CFD, que Fernández (2012) menciona de las técnicas numéricas para el estudio de flujos son:

**3.1.1 Ventajas:**

- Reducción de tiempos y costos en los nuevos diseños. Según Ho *et al.* (2006) y Chandler *et al.* (2003), consideran que el coste de la simulación numérica está en torno al 20%-25 % del coste de un modelo físico para el caso específico del análisis de la presa Winenhoe (Brisbane, Australia).
- Posibilidad de analizar sistemas o condiciones muy difíciles de reproducir experimentalmente.
- Pueden estudiarse configuraciones y variaciones distintas de un mismo problema con un tiempo de cálculo relativamente corto. Generalmente, resulta sencillo cambiar geometrías y condiciones de contorno.
- Nivel de detalle prácticamente ilimitado. Los métodos experimentales son más caros, cuando mayor es el número de puntos de medida, mientras las técnicas numéricas pueden generar un gran volumen de resultados sin costo adicional. La solución numérica ofrece una información completa y detallada sobre el dominio de interés, mientras que en la experimentación sólo es posible obtenerla en unos pocos puntos.

**3.1.2 Desventajas:**

- Se tiene que verificar y validar el modelo computacional para obtener resultados cercanos al modelo físico.
- No siempre es posible obtener resultados lo suficientemente precisos; esto proviene de la necesidad de simplificar el fenómeno a estudiar, para que la computadora sea capaz de procesarlo. El resultado será tanto más preciso cuanto más adecuadas hayan sido las hipótesis y simplificaciones realizadas.

**PROGRAMA DE POSGRADO:  
DOCTORADO EN CIENCIAS Y TECNOLOGÍA DEL AGUA**

**“Análisis del comportamiento hidráulico del vertedor tipo laberinto mediante Dinámica de Fluidos Computacional (CFD)”**

- Limitación de modelos existentes para el análisis de la turbulencia.

### **3.2 Modelación numérica mediante la Dinámica de Fluidos Computacional (CFD)**

El estudio hidrodinámico mediante modelación numérica de estructuras hidráulicas involucra dificultades de diversa índole. Hoy en día el conocimiento de las ecuaciones que rigen estos fenómenos del movimiento de fluidos no está completamente resuelto. Las ecuaciones de Navier-Stokes son un conjunto de ecuaciones en derivadas parciales no lineales, y de las que no se dispone de una solución general. Habitualmente se recurre al análisis numérico para obtener una solución aproximada a través de la discretización, con lo cual se pasa de un problema diferencial a uno analítico o algebraico. Con la evolución de las computadoras, en capacidad de almacenamiento y velocidad de procesamiento, desde mediados del siglo pasado, se ha añadido una nueva técnica de análisis comúnmente conocido como Dinámica de Fluidos Computacional (CFD) (Balairón, 2011).

En general, la mayoría de los programas comerciales utiliza el método de volúmenes finitos para resolver numéricamente las ecuaciones fundamentales de la Mecánica de Fluidos (Fernández, 2012). De forma esquemática lo que plantean es lo siguiente:

- El dominio espacial se discretiza en un conjunto finito de celdas (volúmenes de control en el caso tridimensional, áreas de control para el bidimensional y nodos para el caso unidimensional), dicho conjunto conforma la malla computacional.
- Se plantean en cada celda las ecuaciones generales de conservación de masa, de cantidad de movimiento y energía.
- Las ecuaciones diferenciales que sean necesarias resolver se discretizan y se linealizan para obtener un sistema algebraico de ecuaciones.
- Finalmente, se resuelve numéricamente (de forma iterativa) el sistema algebraico para obtener la solución final de las variables de interés.

Los códigos de CFD presentan generalmente la siguiente estructura: i) un módulo de preproceso, ii) un módulo de resolución (solver) y iii) un módulo final de postproceso. Cada uno de ellos responde a las siguientes funciones:

- Preproceso.** Permite introducir los datos de entrada al programa de resolución, convirtiéndola luego a un formato compatible para el módulo “solver”. Esta fase comprende:
  - Generación de la geometría a modelizar: el dominio computacional.

**PROGRAMA DE POSGRADO:**  
**DOCTORADO EN CIENCIAS Y TECNOLOGÍA DEL AGUA****“Análisis del comportamiento hidráulico del vertedor tipo laberinto mediante Dinámica de Fluidos Computacional (CFD)”**

- Generación de la malla o división del dominio en un número suficiente de celdas o elementos que no se superpongan y que cubran toda la geometría.
- Identificación de los fenómenos físicos y/o químicos que pretenden modelarse.
- Definición de las propiedades del fluido (o fluidos).
- Especificación de las condiciones iniciales y de contorno del problema.

La generación de la malla computacional es un aspecto fundamental de la simulación numérica de flujos, porque condicionará definitivamente la precisión de los resultados. En principio, cuanto más fino sea la malla, más próxima a la solución real será la simulación. Sin embargo, mallas demasiado finas incrementan el tiempo de cálculo y disminuyen los errores numéricos. Además, un buen mallado debe de ser más fino en aquellas zonas donde se prevean gradientes más pronunciados de las variables.

**ii) Solver.** Constituye la parte central del programa de resolución y es el encargado de resolver de forma iterativa las ecuaciones que fueron activados previamente en el proceso (los modelos). Las ejecuciones, en función de los modelos que se resuelvan y del tamaño de la malla, pueden durar desde minutos hasta semanas de cálculos en tiempo real.

**iii) Postproceso.** Este módulo consiste en un tratamiento numérico de las variables secundarias e incluye una serie de herramientas gráficas que permiten analizar los resultados.

Para Fernández (2012), el análisis de resultados comprende dos importantes tareas: la validación de la solución y las revisiones y mejoras al modelo que podrían derivarse del estudio de los resultados. En éste módulo se debe plantear lo siguiente:

- **Análisis de resultados**
  - Analizar los resultados y revisar la solución para obtener información relevante.
  - Las herramientas de postproceso tipo cualitativo (mapas, distribuciones, vectores) se utilizan para contestar las preguntas: ¿es correcto el patrón global del flujo?, ¿predice correctamente las capas límites?, ¿están bien resueltos las prestaciones de los diseños y los parámetros del fenómeno?.
  - Por otro lado, las herramientas de postproceso cuantitativas (gráficas, integrales, valores, promedios) se utilizan para conocer fuerzas y momentos, balances, integrales volumétricas y de superficie, etc. Los resultados obtenidos permite responder a las preguntas: ¿los resultados

**PROGRAMA DE POSGRADO:****DOCTORADO EN CIENCIAS Y TECNOLOGÍA DEL AGUA****“Análisis del comportamiento hidráulico del vertedor tipo laberinto mediante Dinámica de Fluidos Computacional (CFD)”**

obtenidos concuerdan con lo esperado?, ¿son coherentes con lo que predice la teoría?, ¿son semejantes a los publicados en la literatura científica?.

- **Revisiones y mejoras del modelo.** Para revisar el modelo y mejorar los resultados numéricos, Fernández (2012) propone responder las preguntas siguientes:
  - ¿Son correctos los modelos físicos empleados?, ¿es el flujo turbulento?, ¿no estacionario?, ¿compresible? Replantear de nuevo.
  - ¿Son correctas las condiciones de contorno empleadas?
  - ¿Es apropiada la elección de las condiciones? ¿son razonables sus valores?
  - ¿Es la malla adecuada?, ¿se puede mejorar?, ¿cambia la solución si se modifica la calidad de malla?, ¿hay que mejorar la malla en los contornos?
  - ¿Es necesario cambiar el enfoque por completo?

### 3.3 Ecuaciones de comportamiento del flujo

Las ecuaciones que gobiernan la dinámica de fluidos son ecuaciones que se fundamentan en los principios de conservación aplicadas a un sistema cerrado, es decir, un sistema cuya masa permanece invariable y no es afectada por fuerzas externas (Streeter *et al.*, 1988).

Estas ecuaciones pueden expresarse en forma diferencial o en forma integral. En su forma diferencial, las ecuaciones de conservación se restringen a aquellos problemas en los que se desea calcular la distribución espacial y/o temporal de una o varias magnitudes fluidas (campos de temperatura, presión, velocidad, etc.) en todos los puntos de un volumen fluido; el estudio matemático de este problema es bastante complejo ya que exige resolver un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales no lineales. Por el contrario, el uso de las ecuaciones en forma integral es necesario en aquellos problemas donde se desea calcular las magnitudes fluidas en un sólo punto o superficie (región) donde éstas toman valores uniformes; la dificultad matemática de este planteamiento depende de las integrales que aparezcan (Zamora *et al.*, 2008).

Las ecuaciones generales que gobiernan la dinámica de fluidos son:

- Ecuación de continuidad o conservación de la masa
- Ecuación de conservación del momentum.
- Ecuación de conservación de la energía.

### 3.3.1 Ecuación de continuidad o conservación de masa

Según Fernández (2012), la ecuación de conservación de masa (ec. 3.1) establece de forma general que la variación de masa en el interior de un elemento fluido es consecuencia del flujo neto de masa hacia dicho elemento. Puesto que en general no puede crearse ni destruirse masa (salvo en casos donde haya involucradas reacciones nucleares), la expresión no estacionaria, incompresible y vectorial en un punto para un fluido general es:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U}) = 0 \quad (3.1)$$

Esta es la forma diferencial de la conservación de masa. A esta ecuación se le llama ecuación de continuidad.

La ecuación (3.2) representa la ecuación de continuidad para un flujo incompresible ( $\rho = \text{constante}$ ).

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \quad (3.2)$$

### 3.3.2 Conservación de cantidad de movimiento o momentum

Esta es la consideración de la segunda ley de Newton, la cantidad de movimiento total de todo sistema cerrado (que no es afectado por fuerzas exteriores, y cuyas fuerzas internas no son disipadoras) no puede ser cambiada y permanece constante en el tiempo. En el estudio de medios continuos este concepto lagrangiano se transforma a una forma euleriana para facilitar su manejo.

Al respecto se identifican, en un medio continuo dos tipos de fuerzas:

- Las de cuerpo, que actúan en el interior de la región material.
- Las de superficie, que actúan sobre la frontera de la región.

La ecuación general de la ecuación de momentum (ec. 3.3) para un fluido newtoniano (por tanto, que presenta una relación lineal entre las tensiones cortantes y las deformaciones resultantes según

$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$ ) e incompresible es (White, 1979):

**PROGRAMA DE POSGRADO:  
 DOCTORADO EN CIENCIAS Y TECNOLOGÍA DEL AGUA**

“Análisis del comportamiento hidráulico del vertedor tipo laberinto mediante Dinámica de Fluidos Computacional (CFD)”

$$\rho \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \rho(\mathbf{U} \cdot \nabla)\mathbf{U} = -\nabla p + \rho \mathbf{f} + \nabla(\mu \nabla \mathbf{U}) \quad (3.3)$$

Aprovechándose de las propiedades de los campos vectoriales (Aris, 1962), es relativamente fácil reformular el término convectivo (ec.3.4):

$$(\mathbf{U} \cdot \nabla)\mathbf{U} \equiv \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U} = \nabla \cdot (\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}) - \mathbf{U} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{U}) \quad (3.4)$$

Y teniendo en cuenta que al ser incompresible el flujo es adivergente ( $\nabla \cdot \mathbf{U} = 0$ ), sustituyendo la ecuación (3.4) en (3.3) se obtiene la ecuación (3.5), que es la ecuación de la cantidad de movimiento en su forma conservativa.

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{U})}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{U} \mathbf{U}) = \nabla(\mu \nabla \mathbf{U}) - \nabla p + \rho \mathbf{f} \quad (3.5)$$

### 3.3.3 Conservación de energía

El principio en que se basa la ecuación de la energía es el primer principio de la termodinámica. Si se aplica este principio a un volumen de control, expresa que la variación de la energía total en el volumen de control es igual al incremento de trabajo de las fuerzas que actúan sobre el volumen y el flujo neto de calor a través del contorno de dominio.

La ecuación de la energía (ec. 3.6) se formula en términos de la entalpía específica de forma (Fernández, 2012):

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U} h) = \nabla \cdot (k \nabla T) + S_h \quad (3.6)$$

Donde  $k$  representa la conductividad térmica del fluido y  $T$  es la temperatura. Es práctica habitual relacionar la temperatura con la entalpía (ec. 3.7) según:  $dh = c_p dT$ .

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U} h) = \nabla \cdot \left( \frac{k}{c_p} \nabla h \right) + S_h \quad (3.7)$$

### 3.4 Discretización de ecuaciones

En general, la estrategia utilizada en CFD consiste en reemplazar un problema definido sobre un dominio continuo por un dominio discreto a partir de una malla. En el continuo, cada variable del

**PROGRAMA DE POSGRADO:  
DOCTORADO EN CIENCIAS Y TECNOLOGÍA DEL AGUA**

“Análisis del comportamiento hidráulico del vertedor tipo laberinto mediante Dinámica de Fluidos Computacional (CFD)”

flujo está definido en todos los puntos del espacio. Sin embargo, en el dominio discreto, cada variable del flujo está definida únicamente en los nodos que configuran la malla. Existen diversas formas de discretizar el dominio computacional, los más comunes son el método de diferencias finitas, el método de elementos finitos y el de volúmenes finitos. Sin embargo, el método de los volúmenes finitos, en general, es el más empleado en el desarrollo de códigos de CFD por su generalidad, simplicidad conceptual y facilidad para ser implementado en cualquier tipo de mallado.

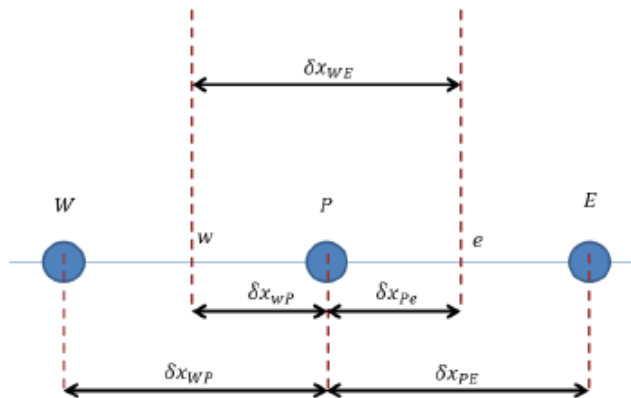
El método de los volúmenes finitos establece que los valores discretos,  $\phi$ , quedarán descritos por un conjunto de ecuaciones algebraicas que relacionan el valor de la variable en un punto con el valor de los puntos vecinos. La forma en que se transmite la información entre esos nodos requiere de algún tipo de aproximación, que en el caso de volúmenes finitos es mediante esquemas conservativos que evalúan los flujos a través de la superficie de control.

El método de volúmenes finitos o volumen de control divide el dominio en un número finito de celdas no superpuestas sobre las que se impone la conservación de la variable  $\phi$  de manera discreta.

Considerando la ecuación (3.8) e integrándola sobre un volumen de control (ec. 3.9) unidimensional  $P$  de la figura (3.1) se plantea que:

$$\frac{d\phi}{dx} + \phi = 0 \tag{3.8}$$

$$\int_w^e \left( \frac{d\phi}{dx} \right) dx + \int_w^e \phi dx = 0 \tag{3.9}$$



**Figura 3.1.** Discretización unidimensional por volúmenes finitos.

**PROGRAMA DE POSGRADO:**  
**DOCTORADO EN CIENCIAS Y TECNOLOGÍA DEL AGUA**

“Análisis del comportamiento hidráulico del vertedor tipo laberinto mediante Dinámica de Fluidos Computacional (CFD)”

Suponiendo una variación lineal entre los centroides de las celdas (en los cuales está definida la variable  $\phi$ ), y tomando el valor medio de la variación de  $\phi$  en cada celda como  $\bar{\phi}$ , es directo establecer la ecuación (3.10) de la forma:

$$\frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta x} - \frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta x} + \bar{\phi} \Delta x = 0 \quad (3.10)$$

Donde la notación aceptada es  $P$  para el nodo actual y  $E$ ,  $W$  para los nodos a la derecha e izquierda respectivamente. Reordenando la ecuación (3.10) se llega a obtener la ecuación linealizada (ec. 3.11) de la forma:

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W + S_C \Delta x \quad (3.11)$$

Donde  $a_P$ ,  $a_E$  y  $a_W$  son los coeficientes de las variables en cada nodo implicado y  $S_C$  es el coeficiente de linealización del término fuente. Ecuaciones similares a la ecuación (27) se pueden obtener para cada una de las celdas de la discretización, resultando un conjunto de ecuaciones algebraicas que se deben resolver de manera acoplada.

En este método garantiza la conservación de la variable sobre cada celda. Es decir, los flujos entrantes a la celda deben ser iguales a los flujos salientes. Esta propiedad, debido a la formulación, se cumple sea cual sea el tamaño de las celdas. Sin embargo, que se preserve la conservación no significa que se obtenga precisión: la solución obtenida para  $\phi$  puede ser conservativa y a la vez imprecisa (si la discretización tiene pocas celdas).

### 3.4.1 Volumen finito para problemas de convección y difusión

Para la construcción de un modelo numérico se consideran las leyes de conservación de masa y cantidad de movimiento, es posible aplicar una variante en su presentación (ec. 3.12), entonces se tiene:

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U} \phi) = \nabla \cdot (\Gamma \nabla \phi) + S_\phi \quad (3.12)$$

Dónde:  $\phi$  es la variable de flujo,  $\rho$  la densidad,  $\Gamma$  el coeficiente de difusión,  $S_\phi$  el término fuente y  $\mathbf{U}$  es el campo vectorial de velocidades.



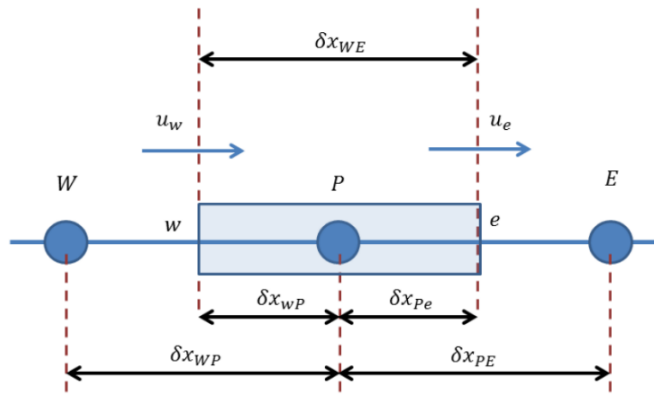
**PROGRAMA DE POSGRADO:**  
**DOCTORADO EN CIENCIAS Y TECNOLOGÍA DEL AGUA**

“Análisis del comportamiento hidráulico del vertedor tipo laberinto mediante Dinámica de Fluidos Computacional (CFD)”

En los fluidos, el problema de difusión se sucede en combinación con la convección. La representación diferencial de la ecuación de difusión-convección en flujo unidimensional (ec. 3.13) es:

$$\frac{d}{dx}(\rho\phi U) = \frac{d}{dx}\left(\Gamma \frac{d\phi}{dx}\right) \quad (3.13)$$

Se considera el volumen de control unidimensional de la figura (3.2) para establecer la relación entre los nodos y los flujos para el nodo  $P$  y los nodos contiguos  $W$  y  $E$ , además las caras del volumen de control la definen los puntos  $w$  y  $e$ :



**Figura 3.2.** Volumen de control para problema de difusión y convección.

Aplicando la integración en la ecuación (3.13) sobre el volumen de control entre los puntos  $w$  y  $e$  se llega a la expresión (3.14).

$$(\rho u A_{VC} \phi)_e - (\rho u A_{VC} \phi)_w = \left(\Gamma A_{VC} \frac{d\phi}{dx}\right)_e - \left(\Gamma A_{VC} \frac{d\phi}{dx}\right)_w \quad (3.14)$$

Para generar el modelo discreto de la ecuación es necesario incluir dos variables ( $F$ ,  $G$ ), las cuales representan el flujo de masa de convección (ec. 3.15) y conductancia (capacidad de transportar o mover partículas en un fluido) de la difusión (ec. 3.16), ambas por unidad de área y que tiene influencia en las caras  $w$  y  $e$  del volumen de control.

$$F = \rho u \quad (3.15)$$

$$G = \frac{\Gamma}{\delta x} \quad (3.16)$$

**PROGRAMA DE POSGRADO:  
 DOCTORADO EN CIENCIAS Y TECNOLOGÍA DEL AGUA**

**“Análisis del comportamiento hidráulico del vertedor tipo laberinto mediante Dinámica de Fluidos Computacional (CFD)”**

Entonces las variables del flujo de convección y conductancia en las caras del volumen de control son presentadas en las ecuaciones (3.17) y (3.18):

$$F_w = (\rho u)_w ; F_e = (\rho u)_e \quad (3.17)$$

$$G_w = \frac{\Gamma_w}{\delta x_{WP}} ; G_e = \frac{\Gamma_e}{\delta x_{PE}} \quad (3.18)$$

Considerando que las áreas en las caras del volumen de control son uniformes, y tomando una aproximación en diferencias para las derivadas  $d\phi/dx$ , entonces la aproximación discreta (ec.3.19) es:

$$F_e \phi_e - F_w \phi_w = G_e (\phi_E - \phi_P) - G_w (\phi_P - \phi_W) \quad (3.19)$$

### 3.4.2 Esquemas de discretización espacial

#### 3.4.2.1 Esquema de diferencias centradas

Se supone que “e” se encuentra exactamente a igual distancia de P y E y que  $\phi$  varía linealmente en el intervalo entre nodos, entonces el modelo discreto (ec. 3.20) es:

$$\left[ \left( G_w - \frac{F_w}{2} \right) + \left( G_e - \frac{F_e}{2} \right) \right] \phi_P = \left( G_w - \frac{F_w}{2} \right) \phi_W + \left( G_e - \frac{F_e}{2} \right) \phi_E \quad (3.20)$$

Desafortunadamente, los esquemas relacionados con el término convectivo son bastantes restrictivos debido a la influencia de la velocidad en el transporte de las variables. Así, en el caso de las diferencias centradas, se demuestra que sólo son válidas si se cumple la restricción de la ecuación (3.21):

$$Pe = \frac{\rho u \delta x}{\Gamma} < 2 \quad (3.21)$$

Este parámetro limitador se denomina *número de Peclet (Pe)* y relaciona el transporte convectivo (en el numerador) con el transporte difusivo (denominador).

Es posible establecer que tanto a E como a W pueden ser negativos si el valor de F se hace muy grande o muy pequeño con respecto al valor de G. La condición límite de estabilidad (para que tanto a E como a W sean siempre positivos) es:  $F < 2G$ .

**PROGRAMA DE POSGRADO:  
 DOCTORADO EN CIENCIAS Y TECNOLOGÍA DEL AGUA**

“Análisis del comportamiento hidráulico del vertedor tipo laberinto mediante Dinámica de Fluidos Computacional (CFD)”

### 3.4.2.2 Esquema Upwind

El esquema Upwind o de diferencias finitas hacia adelante, primero fue puesto en práctica por Courant, Isaacson & Rees en (1952) y después re-inventado por Gentry, Martin y Daly (1966).

En el esquema Upwind se basa en que el valor en la cara se sustituye directamente por el valor en el centroide más cercano aguas arriba, entonces para el valor de las caras está dado por las ecuaciones (3.22) y (3.23).

$$\phi_e = \phi_P \quad \text{si } F_e > 0 \quad ; \quad \phi_e = \phi_E \quad \text{si } F_e < 0 \quad (3.22)$$

$$\phi_w = \phi_W \quad \text{si } F_w > 0 \quad ; \quad \phi_w = \phi_P \quad \text{si } F_w < 0 \quad (3.23)$$

Y en forma más compacta se puede escribir con un nuevo operador  $[[A, B]]$  para decir que se toma el valor más grande a  $A$  y  $B$ . Entonces el esquema Upwind se presenta como la ecuación (3.24).

$$[G_e + [[F_e, 0]] + G_w + [[-F_w, 0]]]\phi_P = [G_e + [[-F_e, 0]]]\phi_E + [G_w + [[F_w, 0]]]\phi_W \quad (3.24)$$

En este caso los coeficientes son todos siempre positivos, por lo que el esquema es estable.

### 3.4.2.3 Esquema exponencial

El esquema exponencial (ec. 3.25) se deduce de la solución exacta de la ecuación convectiva-difusiva unidimensional. Debido que el empleo de la función exponencial es costoso computacionalmente, se han buscado soluciones alternativas que aproximen este comportamiento, pero de forma más sencilla, como es el caso de los esquemas híbrido y exponencial.

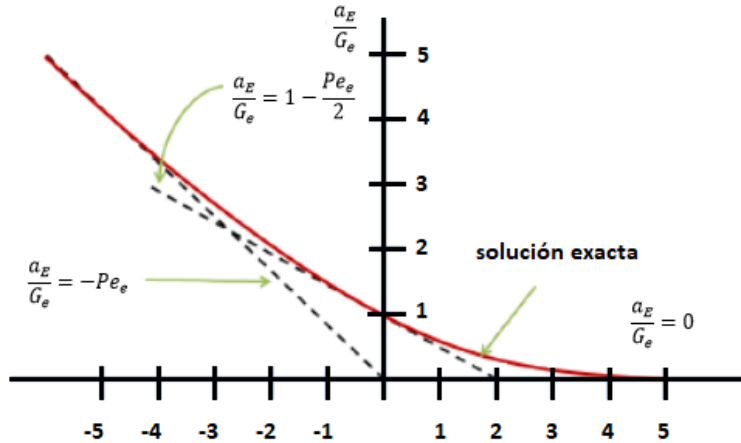
$$\left( \frac{F_e}{e^{Pe_e-1}} + F_w \frac{e^{Pe_w}}{e^{Pe_w-1}} + F_e - F_w \right) \phi_P = \left( F_w \frac{e^{Pe_w}}{e^{Pe_w-1}} \right) \phi_W + \left( \frac{F_e}{e^{Pe_e-1}} \right) \phi_E \quad (3.25)$$

### 3.4.2.4 Esquema híbrido

Este esquema, introducido por Spalding en 1972, trata de aproximar el comportamiento exponencial de los coeficientes por medio de funciones sencillas que tiendan asintóticamente al mismo límite (figura 3.3).

**PROGRAMA DE POSGRADO:  
DOCTORADO EN CIENCIAS Y TECNOLOGÍA DEL AGUA**

“Análisis del comportamiento hidráulico del vertedor tipo laberinto mediante Dinámica de Fluidos Computacional (CFD)”



**Figura 3.3.** Variación exponencial de  $a_E/G_e$  en función de  $Pe_e$  y aproximación híbrida (Patankar, 1980).

Así, reordenando y representando el coeficiente  $a_E$  únicamente como función del número de Peclet (ec. 3.26), entonces se tiene:

$$\frac{a_E}{G_e} = \frac{Pe_e}{e^{Pe_e} - 1} \quad (3.26)$$

Entonces la siguiente configuración por tramos para el valor de  $a_E/G_e$  será:

- $a_E/G_e \rightarrow 0$  cuando  $Pe_e \rightarrow \infty$
- $a_E/G_e \rightarrow -Pe_e$  cuando  $Pe_e \rightarrow -\infty$
- $a_E/G_e \rightarrow 1 - Pe_e/2$  cuando  $Pe_e = 0$

Aprovechando estas características, el esquema híbrido utiliza las tangentes en las asíntotas para extenderlas a todo el dominio y proponer unos coeficientes únicamente con variación lineal de forma:

- $a_E/G_e = 0$  si  $Pe_e > 2$
- $a_E/G_e = 1 - Pe_e/2$  si  $-2 \leq Pe_e \leq 2$
- $a_E/G_e \rightarrow -Pe_e$  si  $Pe_e < -2$

Y en forma más compacta utilizando el operador  $\llbracket A, B \rrbracket$  para decir que se toma el valor más grande entre  $A$  y  $B$ , se tiene el siguiente sistema (ecs. 3.27-3.28) para resolver el esquema híbrido:

**PROGRAMA DE POSGRADO:**  
**DOCTORADO EN CIENCIAS Y TECNOLOGÍA DEL AGUA**

“Análisis del comportamiento hidráulico del vertedor tipo laberinto mediante Dinámica de Fluidos Computacional (CFD)”

$$a_E = G_e \left[ \left[ -Pe_e, 1 - \frac{Pe_e}{2}, 0 \right] \right] \quad (3.27)$$

$$a_W = \left[ \left[ -F_w, G_w + \frac{F_w}{2}, 0 \right] \right] \quad (3.28)$$

### 3.4.2.5 Esquema potencial

El esquema potencial, propuesto por Patankar en 1980, es mucho más precisa a la solución exponencial exacta y produce mejores resultados que el esquema híbrido.

La principal aportación de este esquema consiste en anular el esquema difusivo en la celda cuando el número de Peclet exceda el valor de 10 en su interior. Si el número de está entre 0 y 10 entonces el flujo por la cara se evalúa con una expresión polinómica en potencias. Con estas restricciones, los coeficientes que se obtienen son obtenidos a partir de las ecuaciones (3.29) y (3.30).

$$a_E = \left[ \left[ 0, (1 - 0, 1|Pe_e|)^5 \right] \right] + \left[ \left[ -F_e, 0 \right] \right] \quad (3.29)$$

$$a_W = \left[ \left[ 0, (1 - 0, 1|Pe_w|)^5 \right] \right] + \left[ \left[ -F_w, 0 \right] \right] \quad (3.30)$$

### 3.4.3 Esquemas de discretización temporal

#### 3.4.3.1 Esquema explícito

En el esquema explícito los flujos y términos fuente se evalúan usando valores del paso temporal anterior, esto implica las siguientes consideraciones:

- En el mejor de los casos es estable de forma condicional y presenta una limitación importante con respecto al tamaño máximo del paso temporal que se puede emplear.
- El gasto computacional es reducido porque se puede evaluar en cada instante el valor de la variable  $\phi$  en cada celda en función de los valores en el instante anterior (no es necesario resolver un sistema de ecuaciones acoplados).
- Por el contrario, el exigente límite de estabilidad requerirá un gran número de iteraciones.

#### 3.4.3.2 Esquema implícito

En el esquema implícito los flujos y los términos fuente se evalúan en el mismo instante en el que se pretenden conocer las variables (los valores en el paso temporal actual). Ha de tenerse en cuenta que:

**PROGRAMA DE POSGRADO:**  
**DOCTORADO EN CIENCIAS Y TECNOLOGÍA DEL AGUA****“Análisis del comportamiento hidráulico del vertedor tipo laberinto mediante Dinámica de Fluidos Computacional (CFD)”**

- A primera vista es evidente la complejidad que supone evaluar los flujos en función de los valores en las celdas contiguas, que pueden no estar aún disponibles en función del orden en que se vaya recorriendo el dominio a resolver.
- Son generalmente estables de forma incondicional, por lo que se puede emplear pasos temporales muy grandes.
- El paso temporal resultante siempre será significativamente mayor que el necesario para el esquema explícito.
- Consecuentemente, el gasto computacional por iteración será mucho mayor que en el esquema explícito.

La elección entre emplear un esquema explícito o uno implícito se debe tomar en función del producto “coste computacional por paso temporal” por “el número de pasos temporales”. Por tanto, se ha de equilibrar el paso temporal máximo admisible frente al mayor número de iteraciones necesarias para resolver el sistema implícito de ecuaciones algebraicas.

### 3.5 Modelo de volumen de fluido (VOF)

El modelo Volumen de Fluido (VOF) es una técnica de seguimiento de superficie mediante la definición de celdas de cálculo que puede estar vacía, parcialmente llena, o llena del fluido. Fue reportado por Hirt y Nichols (1981) y se basa en un concepto de que el volumen ocupado por un material no puede ser ocupado por el otro. Para cada fase adicional que se agrega al modelo, se introduce una nueva variable: la fracción de volumen de la fase en la celda computacional. En cada volumen de control, las fracciones en volumen de todas las fases suman la unidad. La fracción de volumen del fluido  $q^{\text{th}}$  en la celda se denota como  $\alpha_q$ , entonces las tres condiciones siguientes son posibles: en caso de que  $\alpha_q = 0$  la celda está vacía del fluido  $q^{\text{th}}$ , si  $\alpha_q = 1$  la celda está llena del fluido  $q^{\text{th}}$  y si  $0 < \alpha_q < 1$  la celda contiene la interfaz entre el fluido  $q^{\text{th}}$  y el resto de los fluidos.

El seguimiento de la interfaz entre las fases se lleva a cabo por la solución de la ecuación de continuidad, ecuación (3.31), para la fracción de volumen de una (o más) de las fases. Para la fase de  $q^{\text{th}}$  esta ecuación tiene la siguiente forma (Hirt y Nichols, 1981):

$$\frac{1}{\rho_q} \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\alpha_q \rho_q) + \nabla \cdot (\alpha_q \rho_q \mathbf{v}_q) \right] = S_{\alpha_q} + \sum_{p=1}^n (\dot{m}_{pq} - \dot{m}_{qp}) \quad (3.31)$$

**PROGRAMA DE POSGRADO:**  
**DOCTORADO EN CIENCIAS Y TECNOLOGÍA DEL AGUA**

“Análisis del comportamiento hidráulico del vertedor tipo laberinto mediante Dinámica de Fluidos Computacional (CFD)”

Dónde:  $\rho_q$  es la densidad de la fase  $q$ ,  $v_q$  es la velocidad de la fase  $q$ ,  $S_{\alpha q}$  es el término fuente de la ecuación,  $\dot{m}_{pq}$  la transferencia de masa que pasa de la fase  $p$  a la fase  $q$  y  $\dot{m}_{qp}$  la transferencia de masa de la fase  $q$  a la fase  $p$ .

### 3.6 Modelo de turbulencia $K$ - $\mathcal{E}$

El modelo de turbulencia  $K$ - $\mathcal{E}$  se caracteriza por ser el método simple más completo de menor costo computacional para simular la turbulencia demostrando su ventaja en flujos confinados e internos (Fernández, 2012) y en flujos a superficie libre (Channel, 2008; Olsen y Kljellesvig, 2010; San Mauro *et al.*, 2016)

Existen muchos modelos  $K$ - $\mathcal{E}$  que son presentados en la literatura, de los diversos modelos de  $K$ - $\mathcal{E}$  desarrollados el más importante es el modelo de Jones y Launder (1972), conocido como  $K$ - $\mathcal{E}$  estándar cuyos coeficientes fueron ajustados poco después por Launder y Sharma (1974); éste se encuentra dentro de la categoría de los modelos de bajo número de Reynolds.

El modelo de turbulencia  $K$ - $\mathcal{E}$  es un modelo semi-empírico basado en las ecuaciones de transporte para la energía turbulenta ( $K$ ) y para la disipación de la energía cinética turbulenta ( $\mathcal{E}$ ). Se asume que el flujo es totalmente turbulento y que los efectos de la viscosidad molecular son despreciables (Jones y Launder, 1972). Los parámetros  $K$  y  $\mathcal{E}$  se obtienen de las ecuaciones (3.32) y (3.33):

Energía cinética turbulenta ( $K$ ):

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U_j k)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\partial \mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + P_k - \rho \mathcal{E} + P_{kb} \quad (3.32)$$

Disipación de la energía cinética turbulenta ( $\mathcal{E}$ ):

$$\frac{\partial(\rho \mathcal{E})}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U_j \mathcal{E})}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\partial \mu_t}{\sigma_\mathcal{E}} \right) \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x_j} \right] + \frac{\mathcal{E}}{k} (C_{1\mathcal{E}} P_k + C_{2\mathcal{E}} \rho \mathcal{E} + C_{1\mathcal{E}} P_{\mathcal{E}b}) \quad (3.33)$$

$\mu_t$  es la viscosidad turbulenta y es calculado con la ecuación (3.34):

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\mathcal{E}} \quad (3.34)$$

**PROGRAMA DE POSGRADO:**  
**DOCTORADO EN CIENCIAS Y TECNOLOGÍA DEL AGUA**

“Análisis del comportamiento hidráulico del vertedor tipo laberinto mediante Dinámica de Fluidos Computacional (CFD)”

Donde  $C_\mu$ ,  $C_{1\varepsilon}$ ,  $C_{2\varepsilon}$ ,  $\sigma_k$  y  $\sigma_\varepsilon$  son constantes.

$P_{kb}$  y  $P_{eb}$  representan la influencia de las fuerzas de flotabilidad.  $P_k$  es la generación turbulenta debido a las fuerzas viscosas (ec. 3.35) y es presentado de la forma:

$$P_K = \mu_t \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \left( \mu_t \frac{\partial U_k}{\partial x_{kk}} + \rho k \right) \quad (3.35)$$

Los valores de los coeficientes  $C_\mu$ ,  $C_{1\varepsilon}$ ,  $C_{2\varepsilon}$ ,  $\sigma_k$  y  $\sigma_\varepsilon$  fueron ajustados por Launder y Spalding, (1974), los cuales se presentan a como:  $C_\mu = 0.09$ ,  $C_{1\varepsilon} = 1.44$ ,  $C_{2\varepsilon} = 1.92$ ,  $\sigma_\varepsilon = 1.3$ ,  $\sigma_k = 1.0$ .

Además del modelo  $K-\varepsilon$  Estándar, existe el modelo  $K-\varepsilon$  Realizable (Shih et al., 1995) que se diferencia con el  $K-\varepsilon$  Estándar en que  $C_\mu$  no es constante, en este caso los coeficientes son:  $C_{1\varepsilon} = 1.44$ ,  $C_{2\varepsilon} = 1.90$ ,  $\sigma_\varepsilon = 1.0$ ,  $\sigma_k = 1.2$ .

### 3.7 Independencia de la malla y parámetros de calidad

Cuando las soluciones numéricas que se obtienen en diferentes densidades de mallas coinciden dentro de un nivel de tolerancia definido por el usuario, se dice que las soluciones son *independientes de la malla*. Este concepto es perfectamente extrapolable al caso de volúmenes finitos, en el que se obtiene independencia de la malla si la solución final no varía, aun cuando el tamaño de las celdas se reduzca progresivamente (Fernández, 2012). Por tanto, es imprescindible que antes de adoptar una solución numérica se haya contrastado que la solución no cambia cuando se utiliza un mallado más denso.

Analizar y mejorar la calidad de la malla garantiza el mejor análisis para la resolución del problema, minimiza la necesidad de cálculos extra, y mejora la predicción de resultados precisos; ANSYS-FLUENT aborda básicamente con las siguientes medidas de calidad:

- **Aspect Ratio.** Determina la extensión de una celda. Se obtiene a partir de la razón entre el valor máximo y mínimo de la distancia entre el centroide de un elemento y el centroide de una cara, y la distancia entre el centroide del mismo elemento con sus nodos. Para una calidad de celda ideal de forma geométrica equilátera este parámetro será igual a 1, mientras que para formas más irregulares será mayor a 1.



**PROGRAMA DE POSGRADO:**

**DOCTORADO EN CIENCIAS Y TECNOLOGÍA DEL AGUA**

“Análisis del comportamiento hidráulico del vertedor tipo laberinto mediante Dinámica de Fluidos Computacional (CFD)”

- **Skewness.** Se define como la diferencia entre la forma de un elemento irregular y la forma de un elemento equilátero de igual volumen. Esta medida es de suma importancia, ya que tener un alto nivel de oblicuidad de celdas localizadas en zonas de interés puede producir errores, desestabilizar la solución e incluso la imposibilidad de poder aplicar las ecuaciones diferenciales en dicha zona. Se define como un elemento ideal aquel que tiene oblicuidad igual a 0; los que se aproximan a 1, son de calidad muy pobre y se caracterizan porque sus nodos pueden llegar a ser casi coplanares. La ecuación (3.36) permite estimar el nivel de oblicuidad de la celda.

$$skewness = \max \left[ \frac{\theta_{max} - \theta_{eq}}{180 - \theta_{eq}}, \frac{\theta_{eq} - \theta_{min}}{\theta_{eq}} \right] \quad (3.36)$$

Dónde:  $\theta_{max}$  es el ángulo máximo de la celda,  $\theta_{min}$  es el ángulo mínimo de la celda y  $\theta_{eq}$  es el ángulo de una celda equilátera.

- **Orthogonal Quality.** La calidad ortogonal es una medida indispensable para la predicción de análisis en la solución; su rango varía entre 0 y 1, cuando su valor se encuentra cerca de 1 mayor es su calidad. La ecuación (3.37) permite estimar calidad ortogonal de la celda.

$$Orthogonal\ Quality = \min \left[ \frac{A_i \times f_i}{|A_i| |f_i|}, \frac{A_i \times C_i}{|A_i| |C_i|} \right] \quad (3.37)$$

Dónde:  $A_i$  es el vector normal a la cara,  $f_i$  es el vector localizado entre los centroides de la celda y una de sus caras, y  $C_i$  es el vector ubicado entre los centroides de la celda y de una celda contigua.

### 3.8 Modelación de vertedores utilizando CFD

Bouhadji (2002) simuló con ANSYS-CFX y el modelo de turbulencia SST la lámina libre y las presiones sobre la cresta de un vertedor tipo Ogee con diferentes cargas ( $H_T/P = 0.50, 1.00, 1.33$ ). Los resultados fueron muy similares a los resultados del USACE (1990).

Ho *et al.* (2003) compararon las presiones obtenidas en un modelo bidimensional con los resultados del Waterways Experimental Station (WES) del USACE (USACE-WES, 1952). Los autores obtuvieron buena concordancia en los perfiles de presiones sobre el vertedor, con presión negativa ligeramente superior. Según los autores, algunas oscilaciones en la presión se debieron a

**PROGRAMA DE POSGRADO:**  
**DOCTORADO EN CIENCIAS Y TECNOLOGÍA DEL AGUA****“Análisis del comportamiento hidráulico del vertedor tipo laberinto mediante Dinámica de Fluidos Computacional (CFD)”**

efectos locales del mallado. Sin embargo, en este estudio no consideraron modelos de turbulencia, lo que pudo haber causado una sobreestimación de la velocidad y por tanto una subestimación de las presiones.

Ho *et al.* (2006) y Ho y Riddette (2010) recopilaron 14 casos de vertedores de Australia donde comprobaron los resultados del coeficiente de descarga obtenido con FLOW-3D con los resultados de modelos físicos y gráficos de diseño. En general, las diferencias fueron inferiores al 5% aunque existieron un par de casos con grandes diferencias que ocurrieron con baja carga y pequeños caudales, probablemente debido al uso de un mallado relativamente grande para esos caudales. Por otro lado, también obtuvieron un buen ajuste en vertedores en Morning Glory (Napa, California) y de laberinto, así como en presiones sobre la cresta del vertedor y lámina libre, que pueden fluctuar dependiendo de la densidad del mallado.

Por su parte Johnson y Savage (2006) comparan los resultados de dos modelos físicos, con sus correspondientes modelos numéricos. Se empleó FLOW-3D y como parámetros de comparación se emplearon los datos registrados por los piezómetros y la tasa de flujo sobre la cresta del vertedor. Se concluyó que el modelo numérico arroja una solución razonable, incluso en los casos en que la cresta del vertedor trabaja sumergida. Los datos presentados demuestran que el modelo numérico está en capacidad de predecir las presiones registradas sobre el vertedor, encontrándose una diferencia máxima de 2.5 cm en la profundidad de lámina de agua entre el modelo físico y el modelo numérico.

Johnson y Savage (2006) y Savage *et al.* (2009) realizaron simulaciones de tres tipos de vertedores, considerando diferentes condiciones aguas abajo, obteniendo un error máximo en la descarga del 3.2 % respecto al caudal de los modelos físicos. Las simulaciones se realizaron con FLOW-3D empleando el modelo de turbulencia  $K-\epsilon$  RNG que utiliza una técnica estadística llamada “teoría de grupos de renormalización”.

Chanel y Doering (2007, 2008) compararon las simulaciones tridimensionales llevadas a cabo con el modelo de turbulencia  $K-\epsilon$  RNG, con modelos físicos de vertedores hidrodinámicos de tres presas situadas en la provincia de Manitoba (Canadá). En la simulación de la presa de Wuskwatim, FLOW-3D tendió a sobreestimar la descarga entre 3.8% a 10 %, aumentando con la disminución de la carga de agua. Al reducir el tamaño de los elementos de malla de 1 m a 0.5 m el error disminuyó. El empleo de una malla de 0.25 m redujo aún más el error, mejorando significativamente tanto el perfil superficial como las presiones, aunque aumentó sustancialmente el coste computacional. En la

**PROGRAMA DE POSGRADO:**  
**DOCTORADO EN CIENCIAS Y TECNOLOGÍA DEL AGUA****“Análisis del comportamiento hidráulico del vertedor tipo laberinto mediante Dinámica de Fluidos Computacional (CFD)”**

presa de Limestone, las mayores diferencias en la descarga pasaron de 7.8 % con una densidad de malla de 1 m a un 2.8 % con el mallado de 0.5 m; la lámina libre y presiones obtenidas con una malla de 0.33 m concordaron con las mediciones de laboratorio. Para la presa de Conawapa, la reducción del tamaño de la malla tendió también a disminuir el caudal de descarga, aunque en este caso la descarga estaba subestimada, las diferencias aumentan.

Chanel (2008) evaluó el desempeño del FLOW-3D en la modelación del flujo sobre vertedores. La investigación, empleó los reportes de modelaciones físicas, entre las que se seleccionaron tres vertedores con diferentes relaciones de carga; afirma que las descargas del modelo numérico se reducen en comparación con las del modelo físico, cuando la relación de carga del vertedor aumenta.

Olsen y Kljellesvig (2010) realizaron la modelación de un vertedor lineal en dos y tres dimensiones para diferentes geometrías, elaborando un montaje físico para verificar la precisión de los resultados, determinaron coeficientes de descarga que se compararon con las fórmulas empíricas normalmente utilizadas. De acuerdo con los resultados presentados, el modelo numérico permitió determinar el coeficiente de descarga con una desviación del 1% para los casos bidimensionales y del 0.5% para casos tridimensionales. La modelación numérica reprodujo correctamente la superficie y profundidad del agua. Los autores recomiendan ser cuidadoso con la selección del paso de tiempo y el número de iteraciones para mejorar la precisión de los resultados.

Reda (2011) comparó el coeficiente de descarga de un vertedor de pared delgada obtenido por FLOW-3D frente a resultados obtenidos de la ecuación teórica. Comprobó 4 alturas de pared del vertedor, con 11 caudales cada una. En todos los casos obtuvo una desviación máxima de  $\pm 3\%$  respecto al coeficiente teórico.

Crookston *et al.* (2012) realizaron pruebas en FLOW-3D para un vertedor tipo laberinto con el que obtuvieron resultados de coeficiente de descargas aceptables comparados con la curva experimental que obtuvo de un modelo físico, cuyos errores varía del 3% al 7%. También realizó pruebas con cargas mayores para la relación  $H_T/P > 1$ , concluyendo que existen zonas de baja presión en las paredes laterales del vertedor cuyas regiones disminuyen conforme incrementa el gasto sobre el vertedor.

**PROGRAMA DE POSGRADO:  
DOCTORADO EN CIENCIAS Y TECNOLOGÍA DEL AGUA**

**“Análisis del comportamiento hidráulico del vertedor tipo laberinto mediante Dinámica de Fluidos Computacional (CFD)”**

Con el modelo numérico, desarrollado por Morales *et al.* (2012), para la estructura de control de la presa localizada en el río Cañar en Ecuador, se simularon 6 escenarios con diferentes condiciones de operación del modelo físico a escala. La estructura estudiada consistía en un vertedor, un tanque de disipación y una estructura de compuertas. Los resultados sobre el vertedor y el tanque de disipación mostraron correspondencia entre los resultados del modelo numérico y el modelo físico, con un rango de diferencia entre 12% a 21% para la profundidad, 2% del resalto hidráulico en la estructura de disipación y de 3% a 15% para la longitud del resalto. Se concluyó que no considerar los efectos de la rugosidad en las simulaciones numéricas pudo generar la variación en los resultados.

Zuhair (2013) comparó los resultados de la modelación numérica, con los datos experimentales del prototipo del vertedor Mandali (Irak). De acuerdo con los resultados encontrados, el perfil de flujo obtenido con el modelo *VOF* (Volumen de Fluido), disponible en el software ANSYS-FLUENT, se ajusta muy bien a los resultados del modelo físico. La curva de gastos para las diferentes cargas hidráulicas modeladas, indicaron diferencias en las descargas, con respecto a los datos experimentales, no mayores a 3%. Se concluyó que las diferencias encontradas se debían a pequeños errores en la elevación de la carga hidráulica causados por la región de rebose.

San Mauro *et al.* (2016) utilizaron el software FLOW-3D para simular vertedores tipo laberinto con fondos poliédricos localizados entre las paredes del vertedor en aguas arriba como en aguas abajo. Dicho estudio concluyó que la inclusión de fondos poliédricos produce una modificación en el patrón de flujo del agua, con respecto a configuraciones de fondo plano, esta modificación de patrón de flujo afectó a las distribuciones de velocidades como a la forma de la superficie libre. La utilización de fondos poliédricos no mejoró la capacidad de descarga del vertedor respecto a uno de fondo plano.

## CAPÍTULO 4

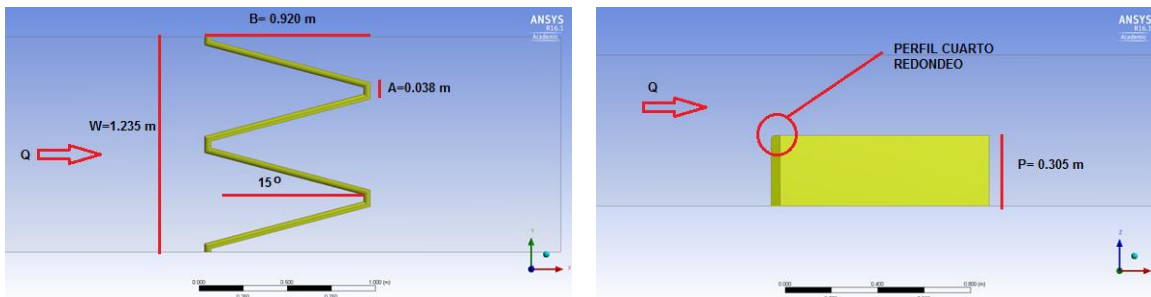
### VERIFICACIÓN Y VALIDACIÓN DE UN MODELO CONCEPTUAL MEDIANTE DINÁMICA DE FLUIDOS COMPUTACIONAL (CFD)

#### 4.1 Método experimental y descripción del modelo físico

La construcción del modelo conceptual está basada en el prototipo reportado por Crookston (2010): un vertedor trapezoidal tipo laberinto de dos ciclos dentro de un canal y cuyo perfil de cresta es del tipo cuarto redondeo. Las características geométricas del vertedor tipo laberinto evaluado en CFD se resumen en el cuadro (4.1) y en la figura (4.1).

**Cuadro 4.1.** Características geométricas del vertedor tipo laberinto evaluado en CFD.

<b>Características geométricas</b>						
$\alpha$ (°)	N	L (m)	A (m)	w (m)	P (m)	W (m)
15	2	4	0.038	0.617	0.305	1.235



**Figura 4.1.** Vista en planta y perfil del vertedor tipo laberinto evaluado en CFD.

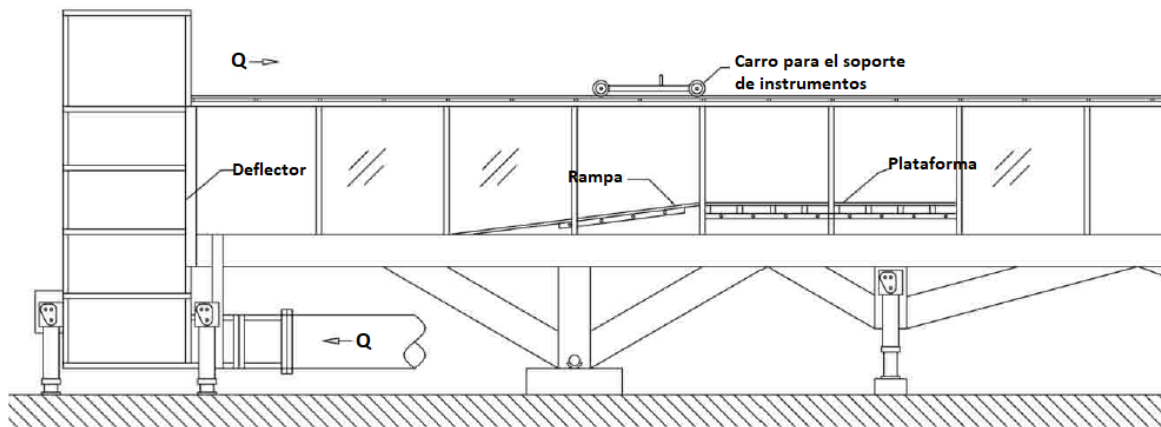
La modelación física, probado por Crookston (2010), fue realizada en el Laboratorio de Investigación del Agua de Utah (UWRL, por sus siglas en inglés) localizado en el campus de la universidad estatal de Utah. Los vertedores trapezoidales tipo laberinto fueron fabricados con polietileno de alta densidad y probados dentro de un canal rectangular (1.23 x 14.60 x 1.00 m). Basado en los estudios de Johnson (1996), Crookston (2010) consideró despreciable la influencia de las paredes acrílicas del canal en el comportamiento hidráulico de la descarga sobre el vertedor.

Como instrumentos de medición se utilizó una placa de orificio en la tubería de suministro del canal para la medición del caudal, transductores de presión diferencial y un registrador de datos.

**PROGRAMA DE POSGRADO:  
DOCTORADO EN CIENCIAS Y TECNOLOGÍA DEL AGUA**

“Análisis del comportamiento hidráulico del vertedor tipo laberinto mediante Dinámica de Fluidos Computacional (CFD)”

El canal está equipado con un deflector aguas arriba (para estabilizar el flujo y mantenerlo en condición uniforme), un carro para el soporte de instrumentos y un tanque de amortiguación. Los vertedores tipo laberinto fueron instalados sobre una plataforma horizontal de polietileno de alta densidad de 2.44 metros de largo; una rampa de 7° fue instalada a aguas arriba de la plataforma para permitir una transición suave entre el piso del canal y la plataforma (figura 4.2); Willmore (2004) probó que los efectos de las rampas aguas arriba de un vertedor tipo laberinto no tienen efectos perceptibles sobre el rendimiento hidráulico. La pendiente del canal es ajustable, para el caso de estudio la pendiente del canal fue cero.



**Figura 4.2.** Sección transversal del canal rectangular empleado por Crookston (2010).

Los datos experimentales fueron obtenidos en condiciones de estado estacionario. Las mediciones del gasto ( $Q$ ) fueron registradas de 5 a 7 minutos con el registrador de datos para determinar el gasto medio, y los tirantes hidráulicos fueron medidos en el tanque de amortiguación equipado con un limnómetro de precisión  $\pm 0.15$  mm. En promedio se recolectaron 85 datos experimentales de carga-descarga para cada vertedor tipo laberinto; al menos el 10% de los datos fueron revisados dos veces para asegurar la precisión de las mediciones. En el cuadro (4.2) se resume los parámetros geométricos de los modelos físicos.

#### 4.2 Método de solución numérica

La modelación numérica se realizó con el software ANSYS-FLUENT 14.5, comercialmente disponible. El proceso de solución utilizando CFD contempla tres etapas básicas: **i)** Pre-proceso, se introduce los datos de entrada al programa de resolución, esta fase comprende: la definición de la geometría a modelizar, la discretización espacial del dominio, identificación de los fenómenos físicos

**PROGRAMA DE POSGRADO:**  
**DOCTORADO EN CIENCIAS Y TECNOLOGÍA DEL AGUA**

**“Análisis del comportamiento hidráulico del vertedor tipo laberinto mediante Dinámica de Fluidos Computacional (CFD)”**

que se pretende modelar, definición de las propiedades del fluido y especificación de las condiciones iniciales y de contorno ; **ii**) Proceso, es el encargado de resolver de forma iterativa las ecuaciones que se han activado previamente en el pre-proceso; **iii**) Post-proceso, los resultados son visualizados en forma gráfica, mapas de contornos de las variables o de forma escalar.

**Cuadro 4.2.** Parámetros geométricos de los modelos físicos analizados por Crookston (2010).

Modelo	$\alpha$ (°)	P (mm)	$L_{ciclo}$ (cm)	$L_{ciclo}/w$ (m)	w/P	N	Perfil de cresta	Tipo	Orientación
1	6	304.8	465.457	7.607	2.008	2	MR	Trapezoidal	Inverso
2-3	6	304.8	465.457	7.607	2.008	2	CR, MR	Trapezoidal	Normal
4-5	8	304.8	354.492	5.793	2.008	2	CR, MR	Trapezoidal	Normal
6-7	10	304.8	287.905	4.705	2.008	2	CR, MR	Trapezoidal	Normal
8-9	12	304.8	243.514	3.980	2.008	2	CR, MR	Trapezoidal	Normal
10-11	15	304.8	199.135	3.254	2.008	2	CR, MR	Trapezoidal	Normal
12	15	152.4	199.135	3.254	4.015	2	CR	Trapezoidal	Normal
13	15	152.4	99.567	3.254	2.008	4	CR	Trapezoidal	Normal
14	15	304.8	99.567	3.254	1.019	4	CR	Trapezoidal	Normal
15-16	20	304.8	154.810	2.530	2.008	2	CR, MR	Trapezoidal	Normal
17-18	35	304.8	98.352	1.607	2.008	2	CR, MR	Trapezoidal	Normal
19	6	203.2	307.547	7.607	2.008	5	MR	Trapezoidal	Lineal
20	12	203.2	63.455	4.705	2.008	5	MR	Trapezoidal	Lineal
21	6	203.2	307.547	7.607	2.008	5	MR	Trapezoidal	Flush
22	12	203.2	63.455	4.705	2.008	5	MR	Trapezoidal	Flush
23	6	203.2	307.547	7.607	2.008	5	MR	Trapezoidal	Entrada en curva
24	12	203.2	63.455	4.705	2.008	5	MR	Trapezoidal	Entrada en curva
25-26	90	304.8	122.377	1.000	4.015	-	CR, MR	-	-

CR= Cuarto redondeo  
 MR= Medio redondeo

El primer paso consiste en la generación digital como un sólido de la construcción del modelo físico en estudio. El módulo Geometry se utilizó para realizar el modelo numérico.

Después de la generación de la geometría, el dominio se divide en un número suficiente de celdas o elementos que no se superponen y cubren toda la geometría, donde las ecuaciones generales de conservación son aplicadas. El módulo Meshing fue usado para generar la malla en el modelo, el

**PROGRAMA DE POSGRADO:**  
**DOCTORADO EN CIENCIAS Y TECNOLOGÍA DEL AGUA**

**“Análisis del comportamiento hidráulico del vertedor tipo laberinto mediante Dinámica de Fluidos Computacional (CFD)”**

tipo de malla define no solo la calidad de los resultados, sino también el grado de detalle de los resultados y el tiempo de cálculo computacional. Para la discretización espacial, se decidió emplear una malla predominantemente hexaédrica; entre las ventajas de la malla hexaédrica es la reducción del número de elementos del dominio y la mejora de la convergencia de la solución (Sánchez y Elsitdié, 2011), cerca de la pared del vertedor la malla es refinada donde la turbulencia es disipada.

En el análisis del vertedor, el problema es definido como una geometría tridimensional. La condición de simetría es considerada en el plano lateral perpendicular del domino. La entrada del flujo se encuentra a una distancia suficiente del vertedor, mínimo 2 veces el ancho del canal (Bos *et al.*, 1986), de modo que la carga hidráulica no se vea afectada por esta condición. El ingreso del flujo es impuesto aguas arriba; la condición de entrada más común, en canales abiertos, es la velocidad promedio del flujo. En el plano vertical aguas abajo del vertedor se asigna como salida libre del flujo a la atmósfera, la condición de salida es la presión atmosférica. Las paredes del canal y del vertedor son consideradas como estacionarias y antideslizantes con rugosidad de  $1.6 \cdot 10^{-9}$  m (rugosidad absoluta del polietileno de alta densidad). En el cuadro (4.3) se describe las condiciones de contorno aplicados al modelo conceptual.

**Cuadro 4.3.** Condiciones de contorno.

<b>Condiciones de contorno</b>	
<b>Entrada</b>	Velocidad (aguas arriba). Presión atmosférica (área superior del canal).
<b>Salida</b>	Presión atmosférica (aguas abajo).
<b>Sólido</b>	Vertedor. Paredes laterales y plataforma del canal.
<b>Simetría</b>	Planos de contorno lateral y perpendicular al eje del vertedor.

La base de un desarrollo adecuado y ajustado a las condiciones físicas de un modelo conceptual es el esquema numérico que resuelva de forma aproximada las ecuaciones que describen el flujo; por tratarse de un flujo bifásico (agua-aire) y de superficie libre se le asigna el modelo de multifase *VOF* y el modelo de turbulencia *k-ε* por ser el método simple más completo de menor costo computacional para simular la turbulencia demostrando su ventaja en flujos confinados e internos (Fernández, 2012) y en flujos a superficie libre (Channel, 2008; Olsen y Kljellesvig, 2010; San Mauro *et al.*, 2016).



**PROGRAMA DE POSGRADO:**  
**DOCTORADO EN CIENCIAS Y TECNOLOGÍA DEL AGUA**
**“Análisis del comportamiento hidráulico del vertedor tipo laberinto mediante Dinámica de Fluidos Computacional (CFD)”**

Para el acoplamiento de presión-velocidad se utilizó el método *SIMPLE* (Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations) incluido en el software de ANSYS-FLUENT, se aproxima a la convergencia mediante una serie de campos intermedios de presión y velocidad que va satisfaciendo la continuidad (Fernández, 2012). La utilización del sistema de discretización espacial *Upwind* asegura esquemas estables pero su característica de primer orden lo hace sensible a errores de difusión numérica. Tales errores se pueden minimizar empleando esquemas de discretización de orden superior (Fernández, 2012). Finalmente se analizan los resultados de manera cualitativa (mapas, distribuciones, vectores) y cuantitativa (gráficas, integrales, valores, promedios).

Este estudio se apoyó en la modelación numérica en CFD para el análisis del funcionamiento hidráulico del vertedor tipo laberinto. A partir del prototipo físico presentado por Crookston (2010), se realizaron cambios en la configuración geométrica del vertedor, en particular en el perfil de la cresta y en la forma del ápice, con el propósito de mejorar el comportamiento hidráulico del vertedor, reflejado en su coeficiente de descarga. En el cuadro (4.4) es presentado los diferentes escenarios de simulación realizados para lograr alcanzar el objetivo de este estudio.

**Cuadro 4.4.** Escenarios de simulación.

Modelo	$\alpha$ (°)	P (cm)	$L_{\text{ciclo}}$ (cm)	w/P	N	Perfil de cresta	Ápice tipo	Orientación	$H_1/P$
1	15	30.48	200.00	2.008	2	CR	Trapezoidal	Normal	0.1-1.0
2,3,4	15	30.48	200.00	2.008	2	MR, CV, W	Trapezoidal	Normal	0.2-1.0
5,6,7	15	30.48	200.00	2.008	2	CR, CV, W	Circular	Normal	0.2-1.0
8	6	30.48	364.50	2.008	2	MR	Circular	Normal	0.05-0.8
9	8	30.48	306.70	2.008	2	MR	Circular	Normal	0.05-0.8
10	10	30.48	265.00	2.008	2	MR	Circular	Normal	0.05-0.8
11	12	30.48	233.30	2.008	2	MR	Circular	Normal	0.05-0.8
12	15	30.48	202.20	2.008	2	MR	Circular	Normal	0.05-1.0
13	20	30.48	158.90	2.008	2	MR	Circular	Normal	0.05-0.8

CR= Cuarto redondeo. CV= Cresta viva.  
 MR= Medio redondeo. W = Cresta tipo WES

### 4.3 Independencia de la malla

Para cada escenario se realizaron simulaciones numéricas con diferentes densidades de malla, con el propósito que los resultados sean independientes de la malla. La independencia de los

**PROGRAMA DE POSGRADO:**  
**DOCTORADO EN CIENCIAS Y TECNOLOGÍA DEL AGUA**

“Análisis del comportamiento hidráulico del vertedor tipo laberinto mediante Dinámica de Fluidos Computacional (CFD)”

resultados de la malla se obtuvo reduciendo el número de elementos mediante prueba y error, para obtener una convergencia adecuada de los cálculos.

Flores *et al.* (2014), mencionan parámetros para evaluar la calidad de la malla. La calidad ortogonal (Orthogonal quality) puede tener valores que varían de cero a uno, una malla de excelente calidad tiene valores cercanos a uno. La relación de aspecto (Aspect ratio) mide la estrechez de la celda; para una malla con formas equiláteras geométricas será de buena calidad si este parámetro será igual a uno, mientras que una malla con formas irregulares será de buena calidad si este parámetro es mayor que uno. La oblicuidad de las celdas (Skewness) que puede tener valores que varían de uno a cero, una malla de excelente calidad tiene valores de este parámetro cercanos a cero. Los resultados obtenidos (cuadro 4.5) indican que la calidad de la malla es estadísticamente aceptable.

**Cuadro 4.5.** Evaluación de la calidad de malla.

Modelo	Nro. de elementos	Parámetros de calidad		
		Aspect ratio	Orthogonal quality	Skewness
1	607,334	4.06	0.814	0.185
2	607,095	4.09	0.811	0.188
3	627,712	3.998	0.817	0.182
4	617,748	4.043	0.811	0.188
5	606083	4.076	0.813	0.186
6	624,946	4.016	0.814	0.186
7	619,166	4.058	0.811	0.188
8	1'108,612	3.573	0.816	0.184
9	984,339	3.663	0.810	0.189
10	899,082	3.709	0.812	0.187
11	824,323	3.771	0.813	0.186
12	601,742	4.077	0.813	0.186
13	683,811	3.882	0.809	0.189

Como indicador de medición de calidad entre los resultados numéricos y los experimentales se utilizó el error relativo porcentual (ec. 4.1) que indica qué tan alejado del valor experimental se encuentra la estimación numérica con CFD y está definida como:

$$error\ relativo\ porcentual\ (\%) = \frac{Simulado - experimental}{experimental} * 100 \quad (4.1)$$

**PROGRAMA DE POSGRADO:**  
**DOCTORADO EN CIENCIAS Y TECNOLOGÍA DEL AGUA****“Análisis del comportamiento hidráulico del vertedor tipo laberinto mediante Dinámica de Fluidos Computacional (CFD)”**

Se utilizó el coeficiente de determinación de Pearson ( $R^2$ ), para predecir el valor de una variable X con el conocimiento del valor de otra variable Y e indicar el grado de correspondencia entre ambas variables.  $R^2$  es adimensional y puede tomar valores de 0 a 1, el ajuste es bueno si  $R^2$  es cercano a 1 y se determina con la ecuación (4.2).

$$R^2 = \frac{\sigma_{X,Y}^2}{\sigma_X^2 \sigma_Y^2} \quad (4.2)$$

#### 4.4 Validación del modelo conceptual

En base a los resultados del modelo físico reportado por Crookston (2010) se realizó la validación del modelo conceptual. Las características geométricas del vertedor se resumen en el cuadro (4.1). Con el fin ajustar los parámetros, se realizaron diferentes simulaciones; los resultados numéricos corresponden a 10 simulaciones realizadas para obtener los coeficientes de descarga y ser evaluados con los coeficientes de descarga experimentales ajustados a la curva desarrollada por Crookston (2010).

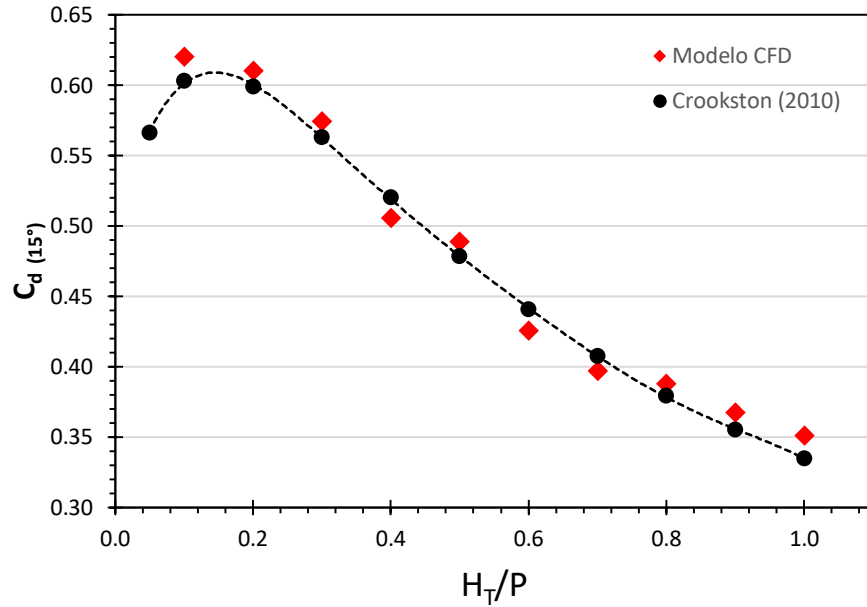
El coeficiente de descarga es obtenido a partir de la altura de la carga hidráulica, medido desde el nivel de la cresta del vertedor hasta la superficie libre del agua, y posteriormente es calculado con la ecuación general del vertedor (ecuación 2.1). Los coeficientes de descarga obtenidos a partir de los resultados numéricos de la carga hidráulica son comparados con los coeficientes de descarga que Crookston (2010) obtuvo a partir de resultados experimentales. Ambos coeficientes de descarga son presentados en la figura (4.3) como función de la relación  $H_T/P$  y en la figura (4.4) son comparados estadísticamente. Como se observa, existe concordancia entre los coeficientes de descarga obtenidos a partir de los resultados numéricos con los experimentales, presentando un error relativo máximo del 5%.

Granell (2010), menciona que en el entorno de los vértices del vertedor aguas arriba, se producirá una interferencia de las líneas de corriente durante la descarga en ambas paredes laterales del vertedor; estas interferencias producen el espesamiento de la lámina y por lo tanto la reducción de las velocidades de descarga. Finalmente la aproximación a los vértices de aguas abajo, se encuentra condicionada por la evacuación en las caras diagonales que confluyen en ese vértice, de tal manera que se produce un incremento de las velocidades de descarga y una depresión gradual de la lámina de agua. En la figura (4.5) se compara las velocidades de descarga en los ápices aguas arriba y aguas

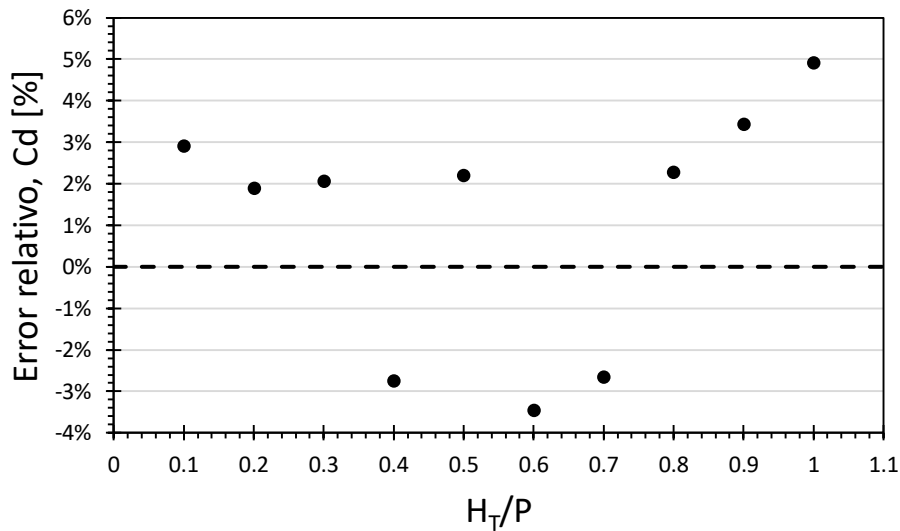
**PROGRAMA DE POSGRADO:  
DOCTORADO EN CIENCIAS Y TECNOLOGÍA DEL AGUA**

“Análisis del comportamiento hidráulico del vertedor tipo laberinto mediante Dinámica de Fluidos Computacional (CFD)”

abajo, del vertedor evaluado, en función de la relación  $H_T/P$ ; en promedio la velocidad de descarga en el ápice aguas abajo es 1.46 veces mayor que la velocidad de descarga en el ápice aguas arriba.



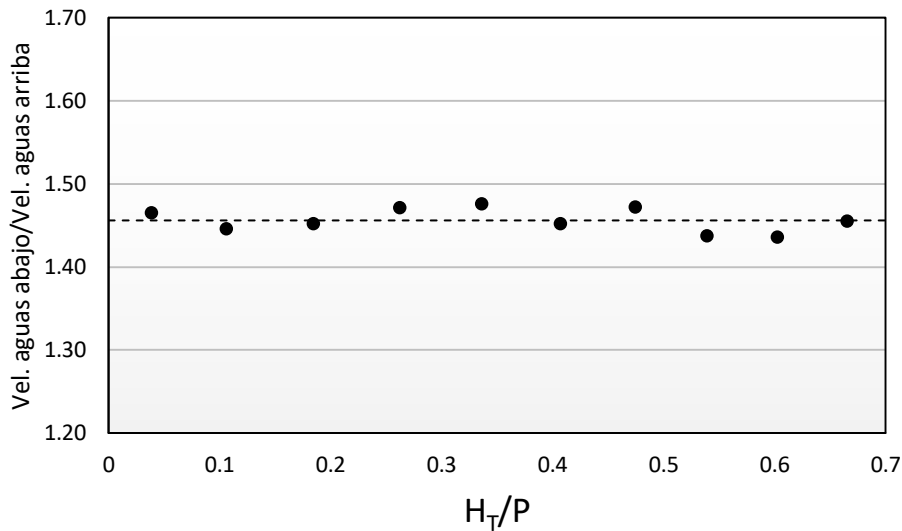
**Figura 4.3.** Coeficientes de descarga del vertedor trapezoidal tipo laberinto  $\alpha=15^\circ$ .



**Figura 4.4.** Error relativo porcentual del coeficiente de descarga numérico contra el experimental.

**PROGRAMA DE POSGRADO:  
DOCTORADO EN CIENCIAS Y TECNOLOGÍA DEL AGUA**

“Análisis del comportamiento hidráulico del vertedor tipo laberinto mediante Dinámica de Fluidos Computacional (CFD)”

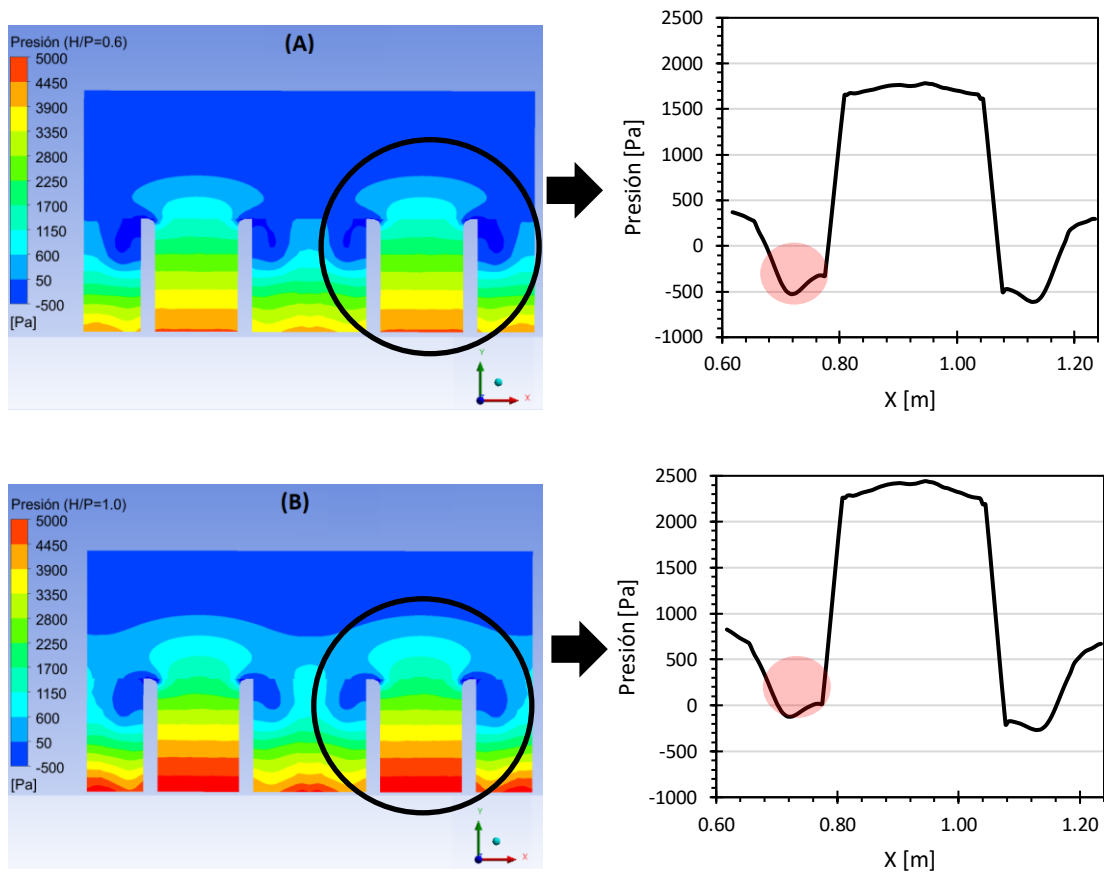


**Gráfico 4.5.** Relación de velocidades de descarga entre el ápice aguas abajo con respecto al ápice aguas arriba en función de  $H_T/P$ .

Los resultados muestran la existencia de zonas con presiones sub-atmosféricas en las paredes laterales del vertedor. En la figura (4.6) se resaltan la diferencia de ubicación y tamaño de las regiones de baja presión que afectan en la trayectoria de la lámina vertiente. Cuando la lámina vertiente se encuentra parcialmente aireado (figura 4.6-A), tiene menor magnitud de presión sub-atmosférica y su región de influencia es mayor. En un vertedor ahogado (figura 4.6-B) la lámina vertiente cambia de trayectoria, se presenta mayor magnitud de presión sub-atmosférica con menor área de influencia. Conforme se incrementa la carga sobre el vertedor, la cavidad de aire ubicado debajo de la lámina parcialmente aireada es llenada por agua y el aire es transportado hacia aguas abajo; el área presión sub-atmosférica disminuye moviéndose hacia regiones de baja presión. El tamaño del área y la magnitud de las presiones sub-atmosféricas dependen de la condición de aireación del flujo, cuando éste se encuentra parcialmente aireado o ahogado, y de la geometría del perfil de la cresta vertedora.

PROGRAMA DE POSGRADO:  
DOCTORADO EN CIENCIAS Y TECNOLOGÍA DEL AGUA

“Análisis del comportamiento hidráulico del vertedor tipo laberinto mediante Dinámica de Fluidos Computacional (CFD)”



**Figura 4.6.** Distribución de presiones, aguas abajo del vertedor tipo laberinto  $\alpha=15^\circ$ .  
(A)  $H_T/P=0.6$ , (B)  $H_T/P=1.0$ .

## CAPÍTULO 5

### MEJORA DEL COMPORTAMIENTO HIDRÁULICO DEL VERTEDOR TIPO LABERINTO BAJO CAMBIOS GEOMÉTRICOS DEL ÁPICE Y CRESTA VERTEDORA

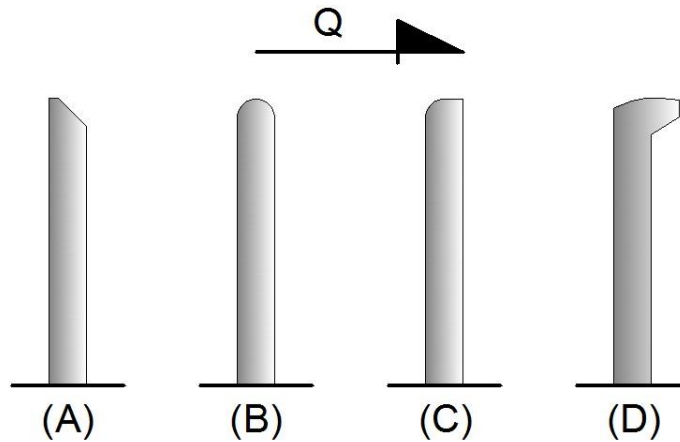
#### 5.1 Introducción

La forma de la cresta influye en la eficiencia hidráulica de un vertedor tipo laberinto. El perfil implementado tiene por objeto facilitar la descarga del flujo, pero éste podría tener efectos en la lámina vertiente, como la generación de cavitación y la oscilación del flujo. La cavitación es un fenómeno que consiste en la formación de cavidades de vapor de agua dentro del flujo cuando se presentan presiones negativas iguales o menores a la presión de vaporización del fluido (-2,447 Pa a 20 °C para el agua), las cuales al implotar pueden causar daños al concreto de la obra hidráulica, en particular a los vertedores de las presas (Arreguín, 2005).

Se realizaron simulaciones de vertedores tipo laberinto en el software ANSYS-FLUENT 14.5 para diferentes perfiles de cresta y formas de ápice, con el propósito de analizar y mejorar su comportamiento hidráulico. Los tipos perfiles de cresta y ápices analizados en este estudio se muestran en las figuras 5.1 y 5.3.

#### 5.2 Variación del perfil de la cresta vertedora

El perfil de cuarto redondeo presenta mejor condición de descarga que el perfil de cresta viva, sin embargo, ambos tienen los mismos inconvenientes: erosión en la cresta vertedora y problemas de cavitación durante la descarga.



**Figura 5.1.** Perfiles de cresta: (A) Cresta viva, (B) Medio redondeo, (C) Cuarto redondeo, (D) Tipo WES

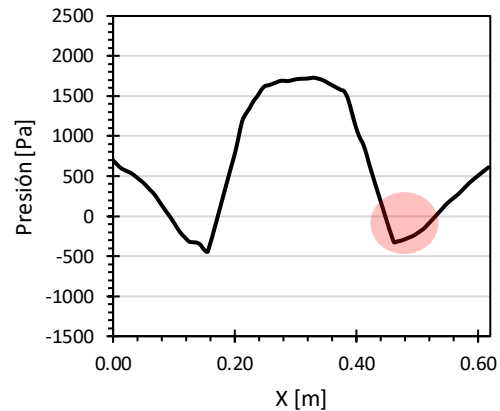
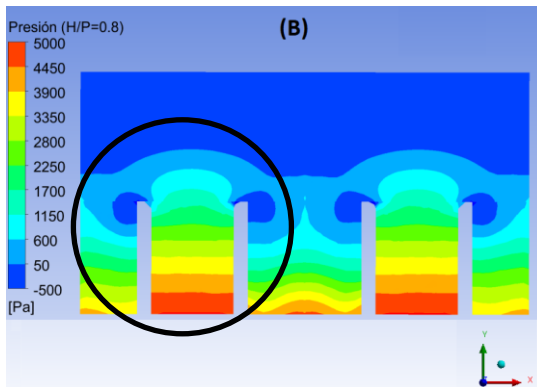
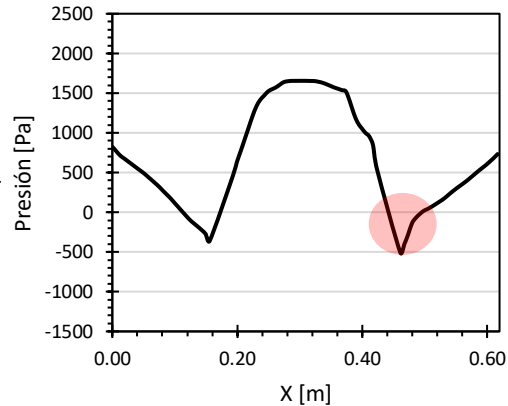
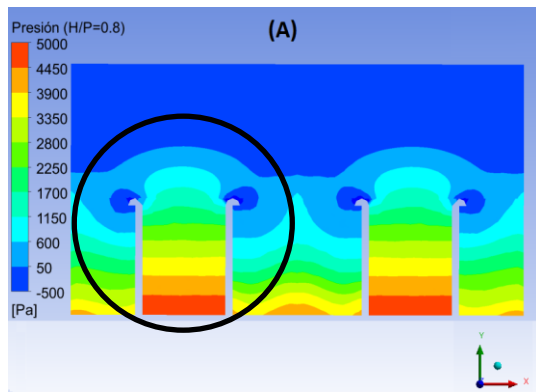
**PROGRAMA DE POSGRADO:  
DOCTORADO EN CIENCIAS Y TECNOLOGÍA DEL AGUA**

**“Análisis del comportamiento hidráulico del vertedor tipo laberinto mediante Dinámica de Fluidos Computacional (CFD)”**

Comparado con otros perfiles, el perfil tipo WES disminuye la presencia de presiones negativas en las paredes aguas abajo del vertedor y evita que la lámina vertiente se adhiera a la pared del vertedor.

Formas de crestas semicirculares han demostrado ser más eficientes (Willmore 2004), permitiendo que la lámina vertiente se mantenga adherida a la pared del vertedor para pequeñas cargas, lo que resulta la presencia de presiones subatmosféricas entre la pared y la lámina vertiente.

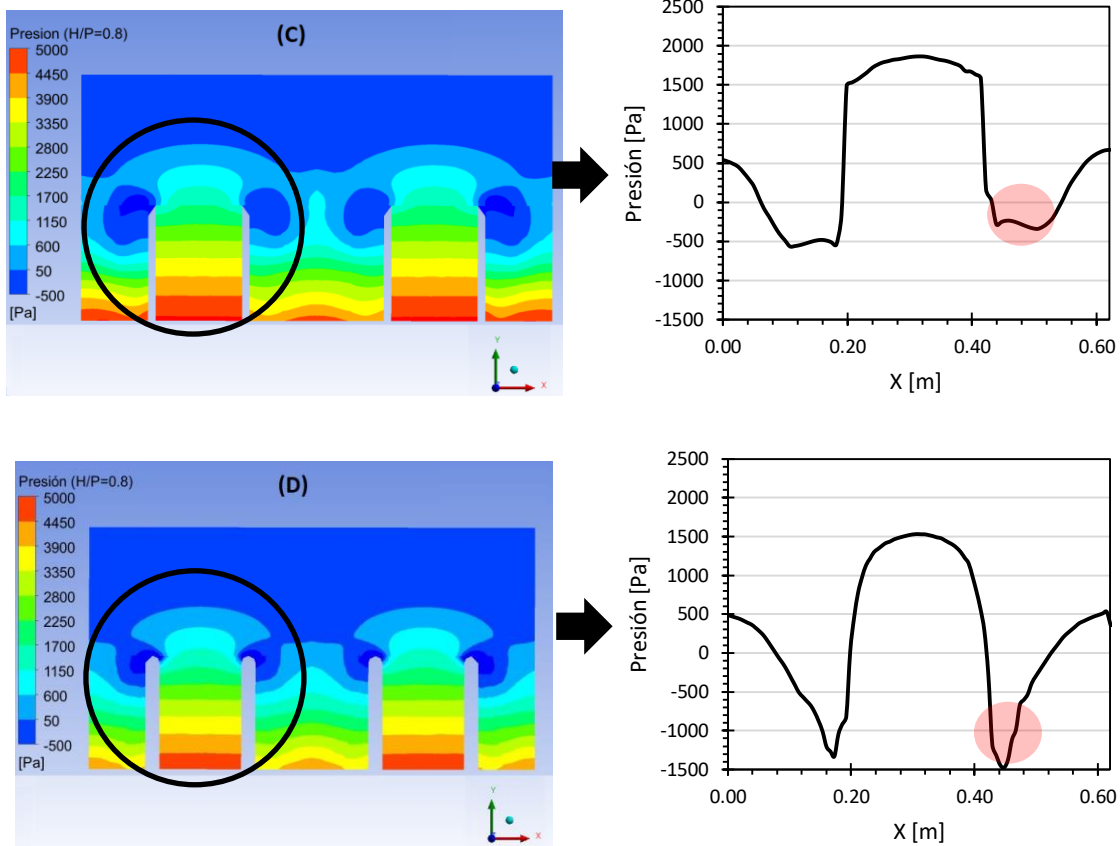
Bajas presiones se presentan en las paredes laterales del vertedor (figura 5.2); las áreas de estas presiones en los vertedores con perfiles de cresta de medio redondeo y tipo WES son pequeñas comparados con los vertedores con perfiles de cuarto redondeo y cresta viva. Entre los cuatro perfiles analizados, el de medio redondeo presenta presiones más reducidas.





**PROGRAMA DE POSGRADO:  
DOCTORADO EN CIENCIAS Y TECNOLOGÍA DEL AGUA**

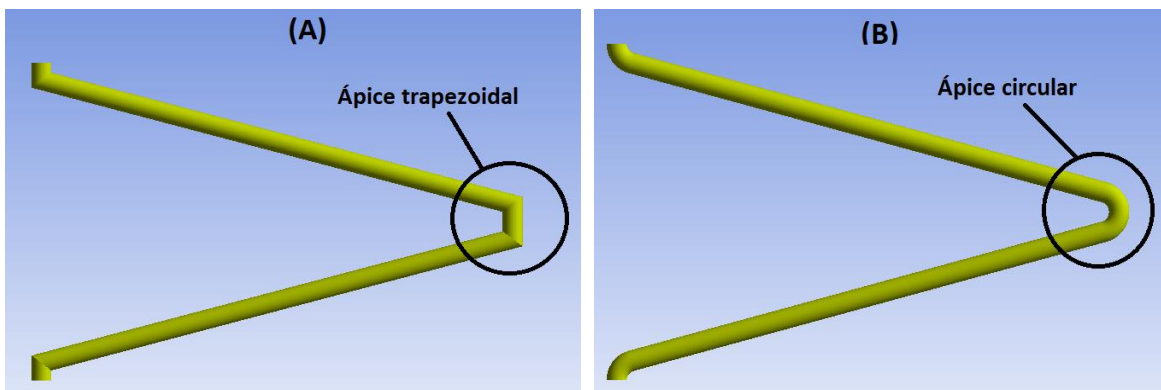
“Análisis del comportamiento hidráulico del vertedor tipo laberinto mediante Dinámica de Fluidos Computacional (CFD)”



**Figura 5.2.** Distribución de presiones, aguas abajo del vertedor tipo laberinto.  $\alpha=15^\circ$ ,  $P=30.48$  cm. (A) WES (B) Cuarto redondeo (C) Cresta viva (D) Medio redondeo.

**5.3 Variación geométrica del ápice del vertedor**

Crookston (2010) menciona que un vertedor con transición suave, en la sección del ápice, permite que éste sea ligeramente más eficiente que un vertedor de transición abrupta.

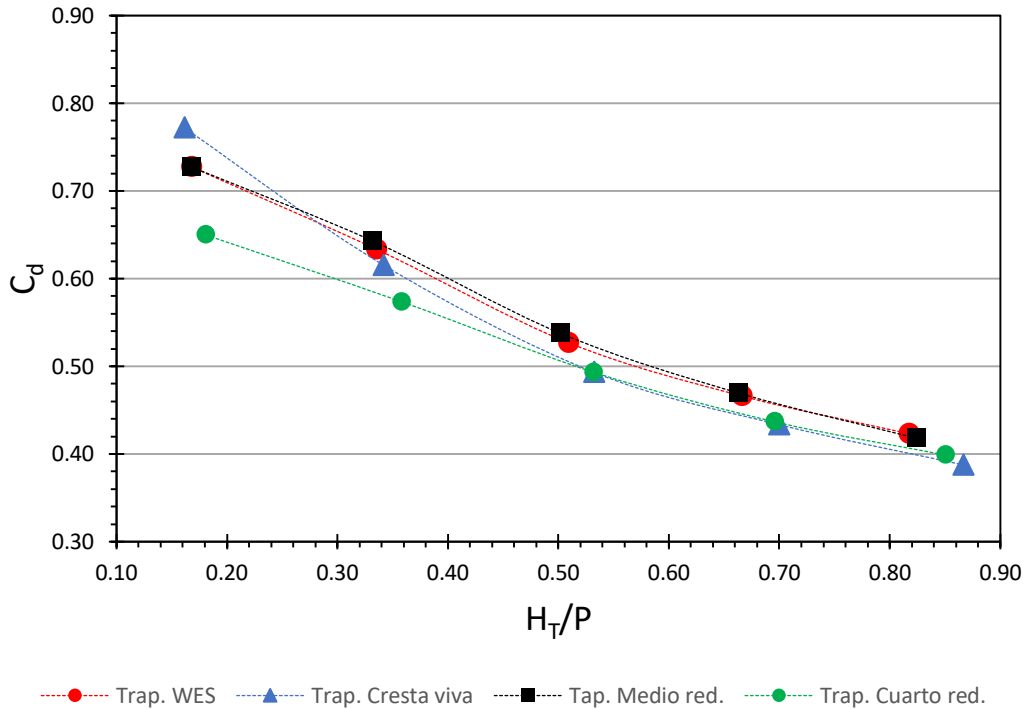


**Figura 5.3.** Ápices en vertedores tipo laberinto. (A) Trapezoidal, (B) Circular.

**PROGRAMA DE POSGRADO:  
DOCTORADO EN CIENCIAS Y TECNOLOGÍA DEL AGUA**

**“Análisis del comportamiento hidráulico del vertedor tipo laberinto mediante Dinámica de Fluidos Computacional (CFD)”**

Los resultados presentados en las figuras (5.4) y (5.5) muestran que vertedores de ápice circular presenta mayor capacidad de descarga, reflejado en su coeficiente de descarga, comparados con los de ápice trapezoidal. La longitud de la interferencia de las láminas vertientes es afectada también por la forma del ápice e influye en la capacidad de descarga del vertedor. La dirección perpendicular del flujo con respecto al ápice trapezoidal, presenta menor velocidad de descarga e incrementa la carga hidráulica sobre el vertedor y un mayor ensanchamiento de la lámina vertiente.



**Figura 5.4.** Comparación del coeficiente de descarga en vertedores tipo laberinto de ápice trapezoidal,  $\alpha=15^\circ$ .

Para Delgado (2009) uno de los inconvenientes derivados de la interferencia de la descarga es el decrecimiento de la longitud efectiva del vertedor. Este inconveniente, en el caso del vertedor tipo laberinto de ápice trapezoidal, se produce por la geometría del modelo y la dirección del flujo; las líneas de corriente tienen una orientación perpendicular con respecto al ápice y con la pared lateral del vertedor guarda un ángulo. Al encontrarse el flujo en secciones diferentes de descarga con volúmenes de descarga diferentes, se producen disminuciones de velocidad en los puntos donde se encuentran las paredes y los ápices del vertedor, estas disminuciones de velocidad disminuye la longitud de descarga.

El valor del coeficiente de descarga depende también de las condiciones de aireación de la lámina vertiente. El ahogamiento local reduce la longitud y la velocidad de descarga, por la geometría del ápice es más probable que se presente con anterioridad en un vertedor de ápice trapezoidal que en un vertedor de ápice circular. Al colisionar perpendicularmente el flujo contra la pared del vertedor,

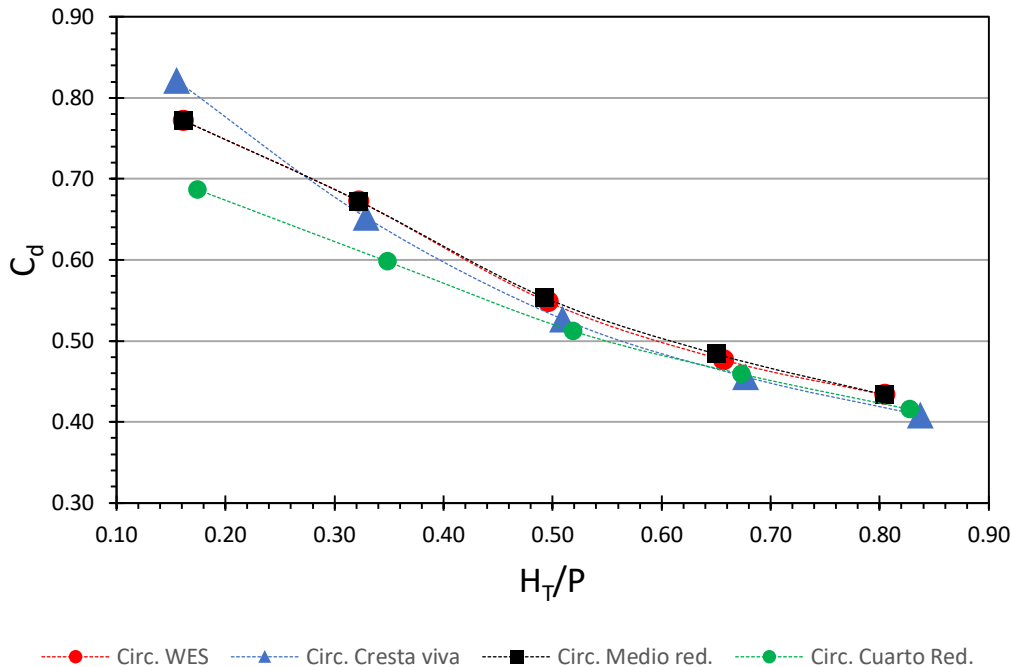
**PROGRAMA DE POSGRADO:  
DOCTORADO EN CIENCIAS Y TECNOLOGÍA DEL AGUA**

“Análisis del comportamiento hidráulico del vertedor tipo laberinto mediante Dinámica de Fluidos Computacional (CFD)”

el incremento de la carga hidráulica sobre el vertedor y a la presencia del ahogamiento local son favorecidos

Como se observa en las figuras (5.4) y (5.5), los vertedores cuyo perfil de cresta es de cuarto redondeo presentan menor eficiencia que el resto de los perfiles; sin embargo, el perfil de cresta viva tiene similar comportamiento a partir de valores  $H_T/P > 0.5$ , pero para valores  $H_T/P < 0.3$  su coeficiente de descarga es mayor que el resto de los perfiles analizados. Entre los vertedores de ápice trapezoidal y circular, son los de ápice circular los que poseen mayor coeficiente de descarga y por lo tanto mayor eficiencia en el funcionamiento del vertedor; los perfiles tipo WES y medio redondeo presentan igual comportamiento y mayor capacidad de descarga que los demás perfiles. Ambos tipos de perfiles, WES y medio redondeo, son recomendables utilizarlos desde el punto de vista hidráulico. Sin embargo, desde el punto de vista estructural, por su facilidad constructiva se recomienda el perfil de medio redondeo sobre el perfil WES.

En conclusión, en la implementación de vertedores tipo laberinto se aconseja que éste posea ápice circular y perfil de cresta de medio redondeo. Los resultados muestran que éste tipo combinación geométrica posee mayor capacidad de descarga que el resto de las combinaciones geométricas analizadas.



**Figura 5.5.** Comparación del coeficiente de descarga en vertedores tipo laberinto de ápice circular,  $\alpha=15^\circ$ .

## **CAPÍTULO 6**

### **CONSIDERACIONES DE DISEÑO DEL VERTEDOR TIPO LABERINTO**

#### **6.1 Introducción**

Los coeficientes de descarga y curvas para el diseño de vertedores tipo laberinto han sido determinados a partir de modelos físicos de estructuras prototipo: Avon (Darvas, 1971), Dungo (Magalhães and Lorena, 1989), Hyrum (Houston, 1982), Keddara (Magalhães and Lorena, 1989), Lake Brazos (Tullis and Young, 2005), Lake Townsend (Tullis and Crookston, 2008), Ute (Houston 1982) y Woronora (Darvas, 1971); los métodos de diseño más utilizados fueron presentados por Tullis *et al.* (1995), Magalhães y Lorena (1989), Lux (1989), Hinchliff y Houston (1984), Darvas (1971), y Hay y Taylor (1970). Sin embargo, la información del diseño hidráulico, que se tiene actualmente no considera los efectos de aireación, inestabilidad e interferencia de la lámina vertiente.

En el Capítulo 5, se analizó el comportamiento hidráulico de un vertedor tipo laberinto realizando cambios en la geometría de su ápice y cresta vertedora; se concluyó que un vertedor tipo laberinto con cresta de medio redondeo y ápice circular posee mayor capacidad de descarga que el resto de las demás combinaciones geométricas, con base en este vertedor se analizan las consideraciones de diseño y mejora en el comportamiento hidráulico.

En este estudio se analiza las condiciones de aireación, los fenómenos de inestabilidad e interferencia de las láminas vertientes como parte de las herramientas de diseño. En los párrafos siguientes, se resume los estudios realizados en este capítulo que se recomienda ser considerados en la toma de decisiones y en el diseño del vertedor tipo laberinto.

i) Se presentan valores del coeficiente de descarga en función de la relación  $H_T/P$  para  $6^\circ \leq \alpha \leq 20^\circ$  y son comparados con los coeficientes de descarga de vertedores tipo laberinto de ápice trapezoidal, también es analizado la eficiencia del vertedor como herramienta para la selección del ángulo  $\alpha$  en el diseño.

ii) Cuatro condiciones de aireación de la lámina vertiente son definidas: adherido a la pared, aireado, parcialmente aireado y ahogado. Para valores bajos de la relación  $H_T/P$  la lámina vertiente se encuentra adherida a la pared del vertedor, en su cara aguas abajo. Una condición aireada representa una cavidad de aire detrás de la lámina vertiente. Para valores mayores de  $H_T/P$  la cavidad de aire varía espacial y temporalmente, esta condición se conoce como parcialmente aireado. Finalmente,

**PROGRAMA DE POSGRADO:**  
**DOCTORADO EN CIENCIAS Y TECNOLOGÍA DEL AGUA****“Análisis del comportamiento hidráulico del vertedor tipo laberinto mediante Dinámica de Fluidos Computacional (CFD)”**

una lámina vertiente ahogada presenta una lámina de descarga más gruesa que en los casos anteriores y sin cavidad de aire, esta condición ocurre para altos valores de  $H_T/P$ .

iii) La inestabilidad de las láminas vertientes es un fenómeno que debe ser evitado en el diseño del vertedor, porque su presencia provoca vibraciones que amenaza la seguridad de la estructura. Para Crookston y Tullis (2012) la inestabilidad de la lámina vertiente se refiere a una lámina con una trayectoria inestable u oscilante; sus observaciones indican que la inestabilidad ocurre brevemente con mayor frecuencia durante la condición aireada y parcialmente aireada. En este estudio fue definida la presencia de la inestabilidad, los resultados indican que el fenómeno se presenta a partir de  $\alpha \geq 12^\circ$ .

iv) La interferencia entre lámina vertiente reduce la capacidad de descarga del vertedor tipo laberinto, se origina en el ápice aguas arriba cuando las láminas de descarga colisionan entre sí aguas abajo del vertedor. Este fenómeno ha sido caracterizado en este estudio para predecir su influencia en el comportamiento hidráulico del vertedor.

## 6.2 Coeficiente de descarga y eficiencia del vertedor tipo laberinto

La ecuación general del vertedor es usada para determinar la descarga sobre vertedores tipo laberinto (ec. 6.1); en este caso la longitud característica ( $L_c$ ) está definida como la longitud del vertedor referenciada en el centro de la pared de la cresta, el coeficiente de descarga ( $C_d$ ) es influenciado por la geometría del vertedor, condiciones de flujo (carga hidráulica, ángulo de aproximación del flujo, ahogamiento, interferencia de láminas vertientes) y las condiciones de aireación de la lámina vertiente.

$$Q = \frac{2}{3} \sqrt{2g} C_d L_c H_T^{3/2} \quad (6.1)$$

Dónde:  $C_d$  es el coeficiente de descarga,  $H_T$  la carga total sobre el vertedor,  $L_c$  la longitud total y  $Q$  la descarga sobre el vertedor tipo laberinto

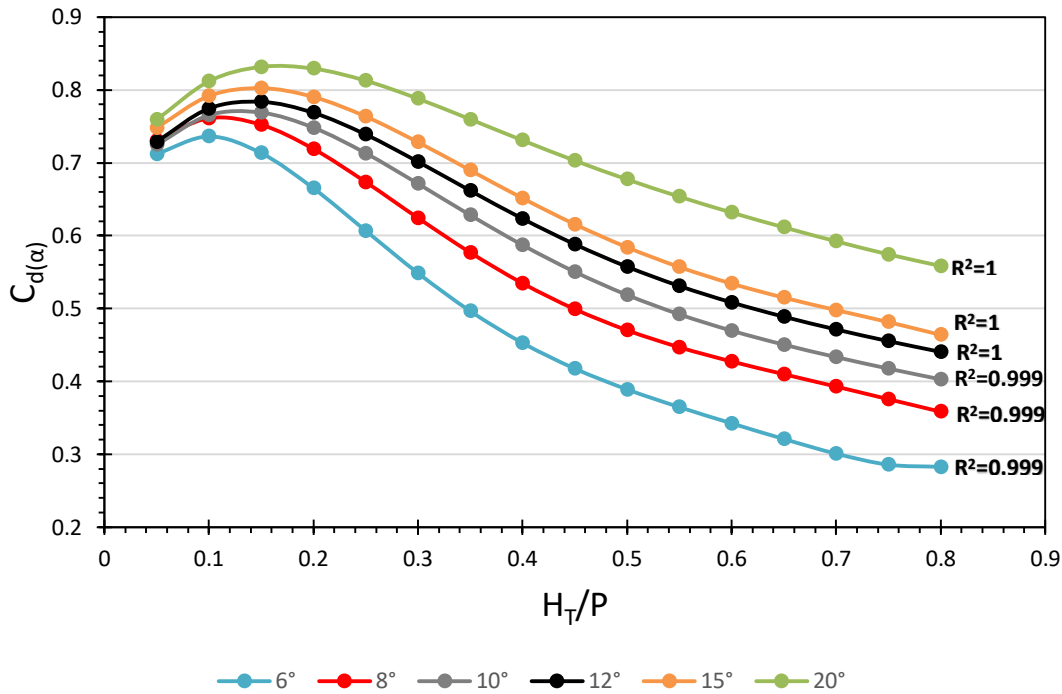
Los valores de  $C_d$  y las condiciones hidráulicas son críticas para el análisis y diseño del vertedor tipo laberinto. Los datos del coeficiente de descarga, son presentados en términos de  $H_T/P$  para ángulos  $\alpha$  que varía de  $6^\circ$  a  $20^\circ$  (figura 6.1); para valores de  $H_T/P \leq 0.09$  los datos del coeficiente de descarga de  $\alpha = 8^\circ$  son ligeramente más eficientes que la curva adyacente  $\alpha = 10^\circ$ . Un fenómeno similar se aprecia en los datos experimentales de Tullis *et al.* (1995) para  $\alpha = 12^\circ$ . Para  $\alpha = 20^\circ$ , la

**PROGRAMA DE POSGRADO:  
DOCTORADO EN CIENCIAS Y TECNOLOGÍA DEL AGUA**

“Análisis del comportamiento hidráulico del vertedor tipo laberinto mediante Dinámica de Fluidos Computacional (CFD)”

cavidad de aire detrás de la lámina vertiente desaparece abruptamente cuando  $H_T/P \approx 0.1$  presentándose aumento en la eficiencia del vertedor.

Durante la transición de régimen de lámina vertiente adherida a la pared a la de lámina aireada se ha observado una fuerte disminución en la eficiencia del vertedor para aquellos cuyos ángulos varían de  $6^\circ$  a  $10^\circ$ , la disminución es menos dramática para  $\alpha \geq 12^\circ$ .



**Figura 6.1.**  $C_d$  vs  $H_T/P$  para vertedores tipo laberinto.

Los valores máximos del coeficiente de descarga se presenta cuando la carga hidráulica varía entre 0.1 y 0.17 veces la altura del vertedor. En el cuadro (6.1) se indica el valor máximo que adquiere el coeficiente de descarga para cada ángulo  $\alpha$  en función de  $H_T/P$ .

Para facilitar el uso del gráfico (6.1) en la aplicación del diseño, los datos del  $C_d$  del vertedor tipo laberinto fueron ajustados por una ecuación polinómica de quinto grado en función de  $H_T/P$  (ec. 6.2).

$$C_d = a \left(\frac{H_T}{P}\right)^5 + b \left(\frac{H_T}{P}\right)^4 + c \left(\frac{H_T}{P}\right)^3 + d \left(\frac{H_T}{P}\right)^2 + e \left(\frac{H_T}{P}\right) + f \quad (6.2)$$

**PROGRAMA DE POSGRADO:**  
**DOCTORADO EN CIENCIAS Y TECNOLOGÍA DEL AGUA**

“Análisis del comportamiento hidráulico del vertedor tipo laberinto mediante Dinámica de Fluidos Computacional (CFD)”

**Cuadro 6.1.** Valor máximo del coeficiente de descarga para cada ángulo.

Ángulo ( $\alpha$ )	$H_T/P$	$C_{d(\alpha)}$
6°	0.10	0.736
8°	0.11	0.762
10°	0.13	0.771
12°	0.14	0.784
15°	0.15	0.803
20°	0.17	0.833

Los valores de los coeficientes de la ecuación (6.2) son ajustadas con las ecuaciones

(6.3)-(6.8) en función del ángulo  $\alpha$ .

$$a = 42.99 + 48.93 * \cos(\alpha * 0.1926) - 24.14 * \sin(\alpha * 0.1926) + 7.606 * \cos(2 * \alpha * 0.1926) - 15.95 * \sin(2 * \alpha * 0.1926) ; R^2 = 1 \quad (6.3)$$

$$b = -61.88 - 65.87 * \cos(\alpha * 0.2241) - 4.273 * \sin(\alpha * 0.2241) - 22.5 * \cos(2 * \alpha * 0.2241) + 5.11 * \sin(2 * \alpha * 0.2241); R^2 = 1 \quad (6.4)$$

$$c = 47.39 + 36.05 * \cos(\alpha * 0.2408) + 14.27 * \sin(\alpha * 0.2408) + 13.57 * \cos(2 * \alpha * 0.2408) + 3.893 * \sin(2 * \alpha * 0.2408); R^2 = 1 \quad (6.5)$$

$$d = -20.19 - 11.21 * \cos(\alpha * 0.2396) - 4.43 * \sin(\alpha * 0.2396) - 4.327 * \cos(2 * \alpha * 0.2396) - 1.013 * \sin(2 * \alpha * 0.2396); R^2 = 1 \quad (6.6)$$

$$e = 3.853 + 2.084 * \cos(\alpha * 0.2076) - 0.7578 * \sin(\alpha * 0.2076) + 0.5083 * \cos(2 * \alpha * 0.2076) - 0.7128 * \sin(2 * \alpha * 0.2076); R^2 = 1 \quad (6.7)$$

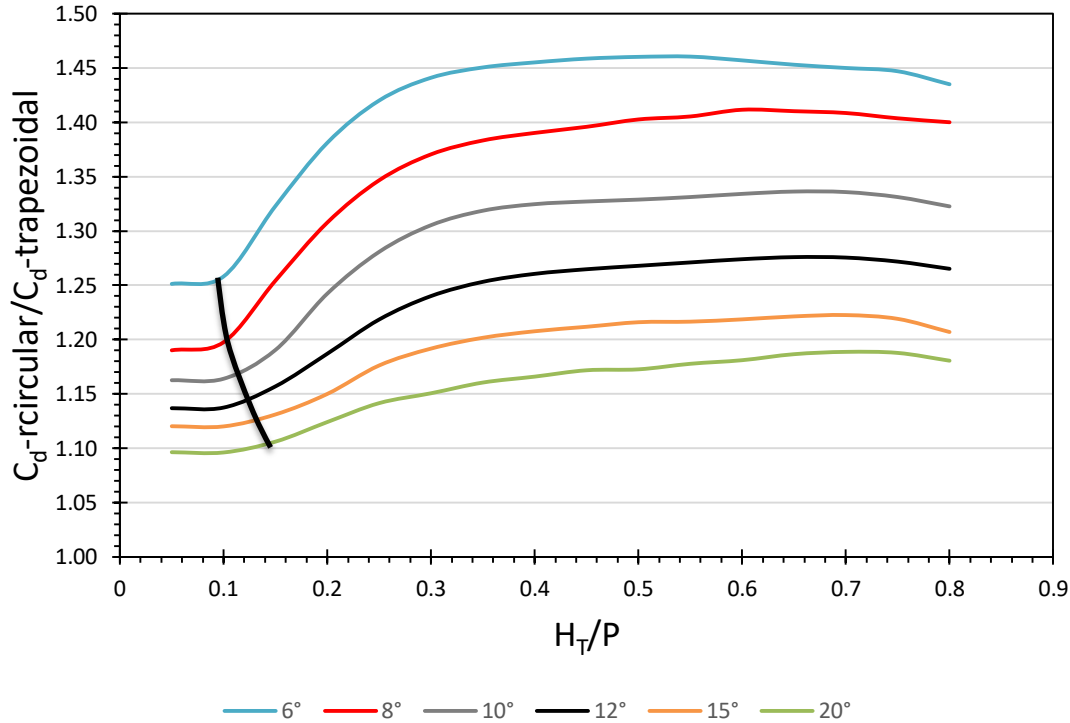
$$f = -5.158 * 10^{-5} \alpha^4 + 2.591 * 10^{-3} \alpha^3 - 4.62 * 10^{-2} \alpha^2 + 0.3487 \alpha - 0.3085; R^2 = 0.994 \quad (6.8)$$

En el capítulo 5 se ha sido descrito las causas por lo que un vertedor tipo laberinto de ápice circular posee mayor capacidad de descarga que uno de ápice trapezoidal. Los coeficientes de descarga de ambos tipos de vertedores son comparados en la figura (6.2) en función de la relación  $H_T/P$ . El coeficiente de descarga del vertedor de ápice circular es significativamente mayor para  $\alpha \leq 10^\circ$ , el incremento de la longitud de la cresta vertedora favorece al aumento de la descarga y a la reducción de longitud de la interferencia de las láminas vertientes. El aumento del coeficiente de descarga, en relación con el del vertedor de ápice trapezoidal, es casi inmediato a partir de  $H_T/P \approx 0.1$ , la línea negra de la figura (6.2) indica el punto de inflexión de cada curva dónde los coeficientes de descarga tienen su valor máximo para cada vertedor. La reducción de la pendiente de la curva se

PROGRAMA DE POSGRADO:  
DOCTORADO EN CIENCIAS Y TECNOLOGÍA DEL AGUA

“Análisis del comportamiento hidráulico del vertedor tipo laberinto mediante Dinámica de Fluidos Computacional (CFD)”

presenta cuando la lámina vertiente cambia se encuentra parcialmente aireado y se presenta el ahogamiento local en el ápice del vertedor.



**Figura 6.2.** Relación del coeficiente de descarga del vertedor de ápice circular con el vertedor de ápice trapezoidal en función de  $H_T/P$ .

Para ayudar en la selección del ángulo de pared, en la figura (6.3) se presenta la eficiencia del vertedor ( $\mathcal{E}'$ ) que permite comparar el comportamiento hidráulico del vertedor tipo laberinto en relación con un vertedor lineal convencional y determinar las ventajas obtenidas del aumento de su longitud de la cresta vertedora. La eficiencia se calcula con la ecuación (6.9) (Falvey, 2003).

$$\mathcal{E}' = \frac{C_{d(\alpha)}}{C_{d(90)}} M \quad (6.9)$$



PROGRAMA DE POSGRADO:  
DOCTORADO EN CIENCIAS Y TECNOLOGÍA DEL AGUA

“Análisis del comportamiento hidráulico del vertedor tipo laberinto mediante Dinámica de Fluidos Computacional (CFD)”

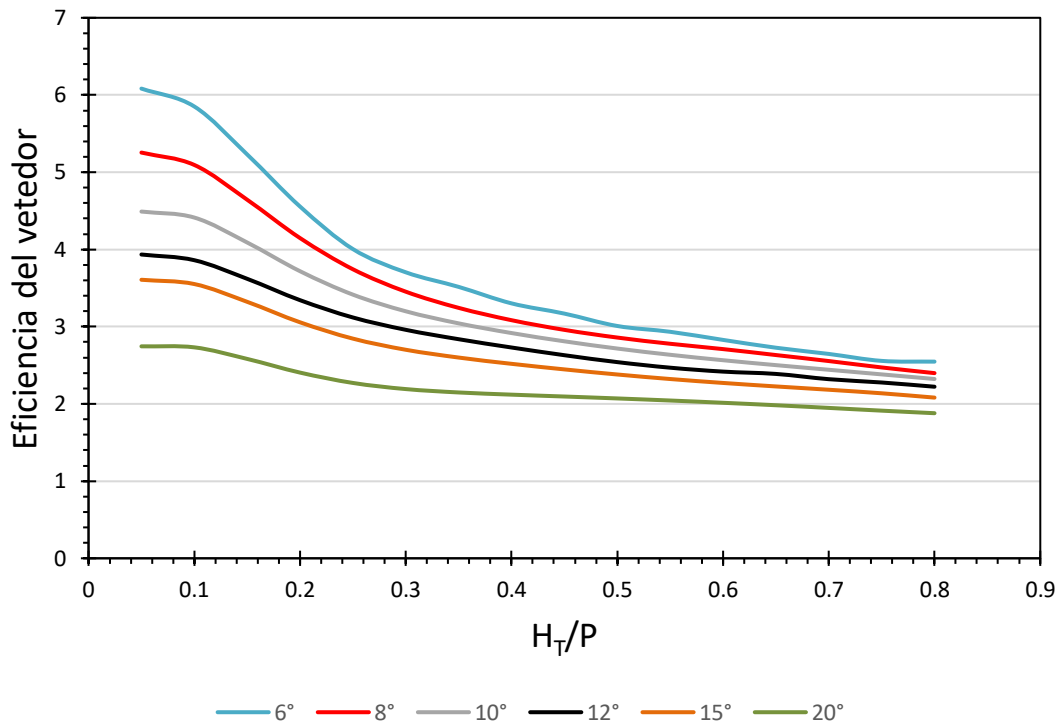


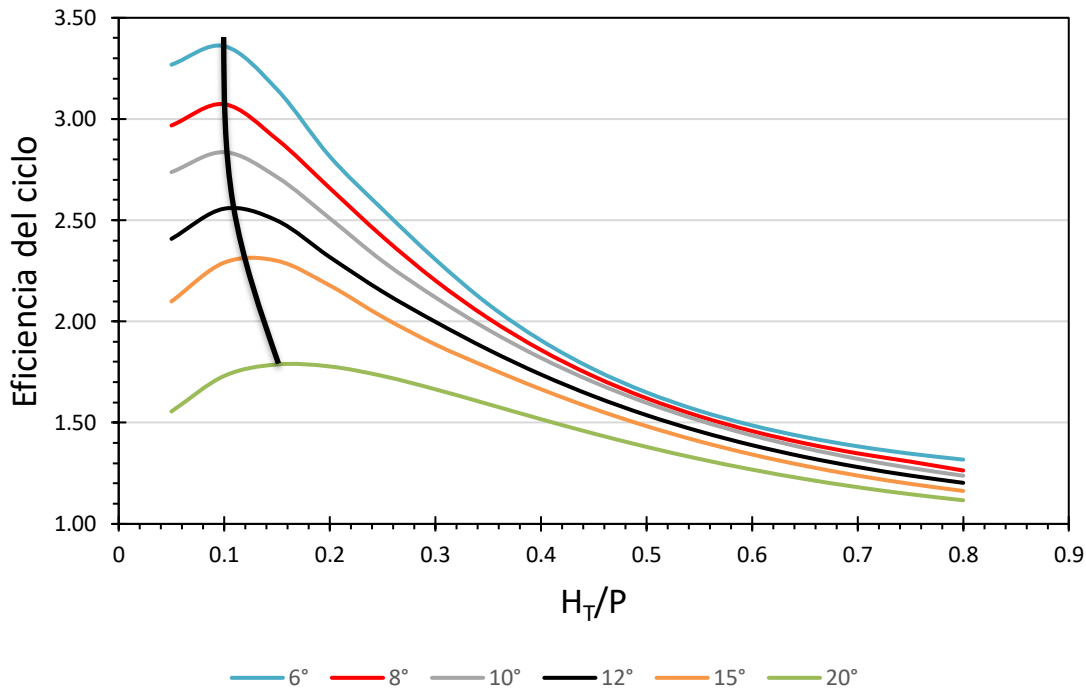
Figura 6.3. Eficiencia vs  $H_T/P$  del vertedor tipo laberinto.

En la figura (6.4), también se presenta la eficiencia del ciclo ( $\mathcal{E}''$ ) en función de  $H_T/P$ , representativa de la descarga por ciclo. La gráfica muestra que la máxima eficiencia se presenta para valores pequeños de la relación  $H_T/P$ , la línea negra indica cuándo se presenta el valor máximo del coeficiente de descarga en función de  $H_T/P$ . La eficiencia del ciclo del vertedor incrementa con la reducción del ángulo de la pared lateral. En ciclos donde  $\alpha \leq 10^\circ$ , se ha observado la reducción abrupta de la eficiencia después de presentar su valor máximo, éste comportamiento se debe al cambio de régimen de aireación de la lámina vertiente, la eficiencia del vertedor reduce cuando la lámina vertiente deja de estar adherido a la pared y presenta un régimen aireado, éste fenómeno se presenta con anterioridad en vertedores donde  $\alpha \leq 10$ . La eficiencia del ciclo se obtiene a partir de la ecuación (6.10) desarrollado por Willome (2004).

$$\mathcal{E}'' = C_{d(\alpha)} M \quad (6.10)$$

**PROGRAMA DE POSGRADO:**  
**DOCTORADO EN CIENCIAS Y TECNOLOGÍA DEL AGUA**

“Análisis del comportamiento hidráulico del vertedor tipo laberinto mediante Dinámica de Fluidos Computacional (CFD)”



**Figura 6.4.** Eficiencia del ciclo del vertedor tipo laberinto.

### 6.3 Condiciones de aireación

La eficiencia y la capacidad de descarga del vertedor tipo laberinto no sólo dependen de la geometría del vertedor y de las condiciones del flujo sino también del régimen de aireación de la lámina vertiente. Se ha identificado cuatro condiciones de aireación (figura 6.5) durante las pruebas de descarga del vertedor tipo laberinto: lámina vertiente adherido a la pared del vertedor, aireado, parcialmente aireado y ahogado.

La condición de aireación está influenciada por la forma de cresta, la carga hidráulica, la altura del vertedor, la turbulencia del flujo detrás de la lámina vertiente, la trayectoria del flujo que pasa sobre la cresta y la presión detrás de la lámina (sub-atmosférica para vertedor no ventilado o atmosférica para vertedor ventilado). Conforme incrementa la carga sobre el vertedor, la transición de la condición de aireación cambiará de flujo adherido a la pared a aireado, parcialmente aireado y ahogado.

El vertedor es más eficiente cuando la lámina vertiente se encuentra adherida a la pared que cuando se encuentra aireado. Un flujo en régimen aireado presenta presiones sub-atmosféricas en la cara inferior de la lámina vertiente y contribuye a la reducción del coeficiente de descarga. Un flujo

PROGRAMA DE POSGRADO:  
DOCTORADO EN CIENCIAS Y TECNOLOGÍA DEL AGUA

“Análisis del comportamiento hidráulico del vertedor tipo laberinto mediante Dinámica de Fluidos Computacional (CFD)”

parcialmente aireado se presenta para valores mayores de  $H_T/P$  y la cavidad de aire que presenta es inestable, es decir, varía espacial y temporalmente; la cavidad de aire oscila entre los ápices de la pared del vertedor, la cantidad de aire que fluctúa puede ser removido completamente y luego volver a aparecer. Finalmente, se producirá la condición de ahogamiento para cargas relativamente más grandes y se puede caracterizar por una lámina grande y gruesa sin cavidad de aire.

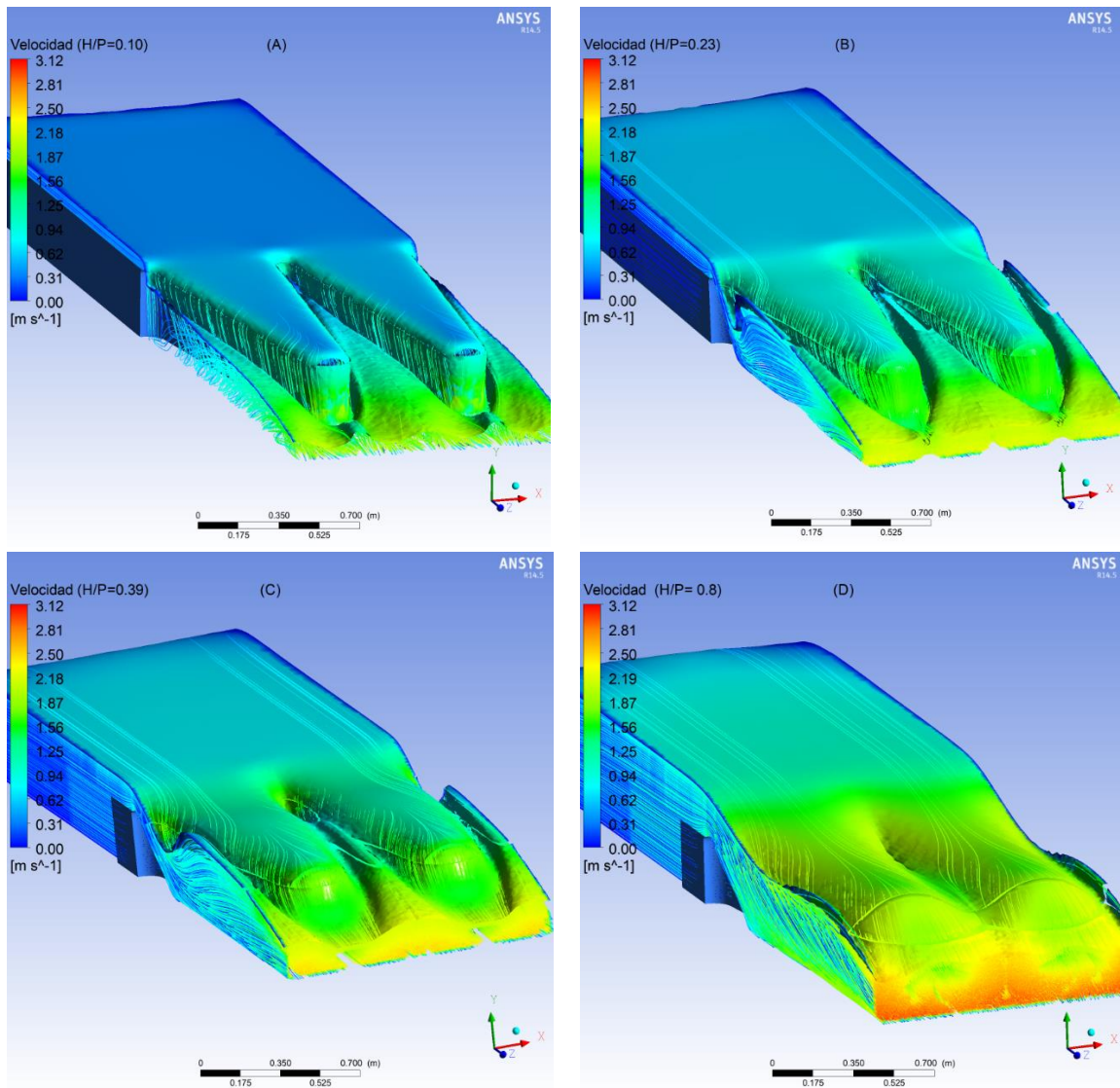


Figura 6.5. Condiciones de aireación: (A) adherido a la pared, (B) aireado, (C) parcialmente aireado, (D) ahogado.

El cuadro (6.2) y la figura (6.6) presentan los rangos de  $H_T/P$  correspondiente a las condiciones de aireación observado. En vertedores tipo laberinto de ápice circular con forma de cresta de medio redondeo, las condiciones de lámina adherida a la pared se presentan cuando  $H_T/P < 0.16$

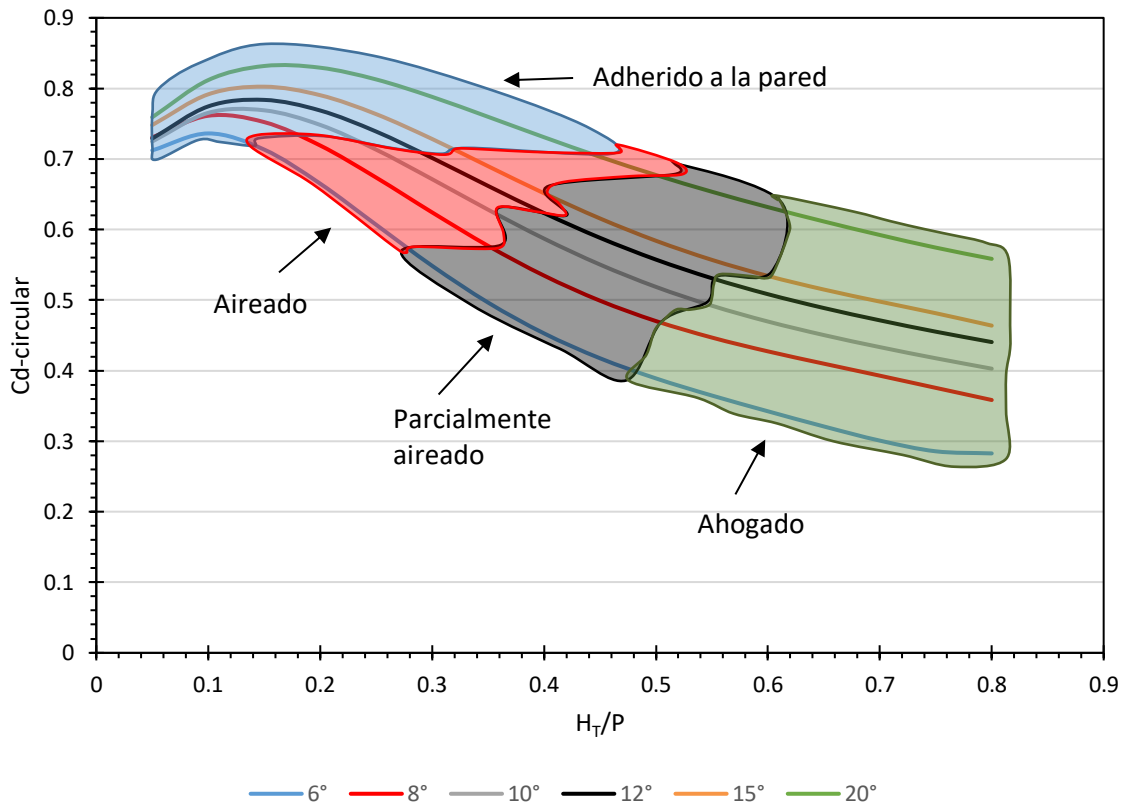
**PROGRAMA DE POSGRADO:  
DOCTORADO EN CIENCIAS Y TECNOLOGÍA DEL AGUA**

“Análisis del comportamiento hidráulico del vertedor tipo laberinto mediante Dinámica de Fluidos Computacional (CFD)”

conforme incrementa el ángulo de la pared lateral la condición de flujo adherido a la pared aumenta; cuando  $\alpha=15^\circ$  o  $20^\circ$  el vertedor tiene mayor rango de flujo adherida a la pared en contraste para la condición de flujo aireado que es producida brevemente cambiando de régimen de aireado a parcialmente aireado. La condición de ahogado se genera para elevadas cargas cuando  $H_T/P > 0.49$ . El coeficiente de descarga presenta una disminución abrupta para ángulos de  $6$  a  $10^\circ$  durante la transición de la condición de flujo adherido a la pared a aireado.

**Cuadro 6.2.** Rangos de condiciones de aireación para vertedor tipo laberinto de ápice circular.

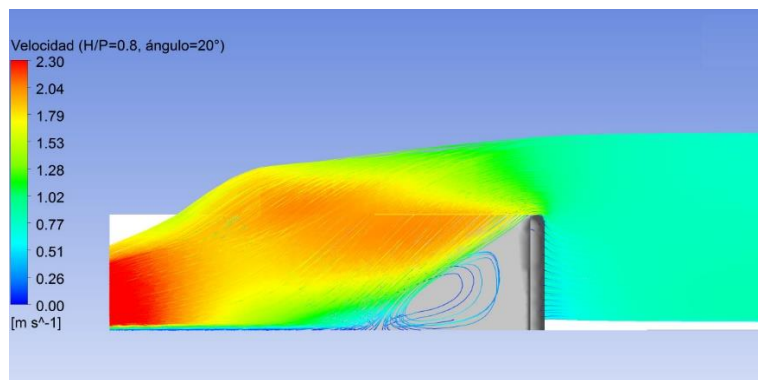
$\alpha$ ( $^\circ$ )	$H_T/P$			
	Adherido	Aireado	Parcialmente aireado	Ahogado
$6^\circ$	$<0.165$	$0.165-0.270$	$0.270-0.487$	$>0.487$
$8^\circ$	$<0.200$	$0.200-0.350$	$0.350-0.500$	$>0.500$
$10^\circ$	$<0.265$	$0.265-0.350$	$0.350-0.540$	$>0.540$
$12^\circ$	$<0.300$	$0.300-0.410$	$0.410-0.550$	$>0.550$
$15^\circ$	$<0.325$	$0.325-0.400$	$0.400-0.600$	$>0.600$
$20^\circ$	$<0.450$	$0.450-0.500$	$0.500-0.600$	$>0.600$



**Figura 6.6.** Condiciones de aireación para vertedores tipo laberinto de ápice circular con cresta de medio redondeo.

## 6.4 Inestabilidad de la lámina vertiente

La inestabilidad de la lámina vertiente se presenta cuando el flujo de descarga tiene una trayectoria oscilante (variaciones temporales) acompañado de líneas de corrientes helicoidales adyacentes y paralelas a las paredes laterales del vertedor (figura 6.7) y puede ir acompañada de cambios de la condición de aireación. La inestabilidad afecta completamente a los ciclos del vertedor, Crookston y Tullis (2012) mencionan que las oscilaciones de la lámina vertiente pueden ser sincronizadas en los ciclos del vertedor o puede existir variaciones temporales entre los ciclos.



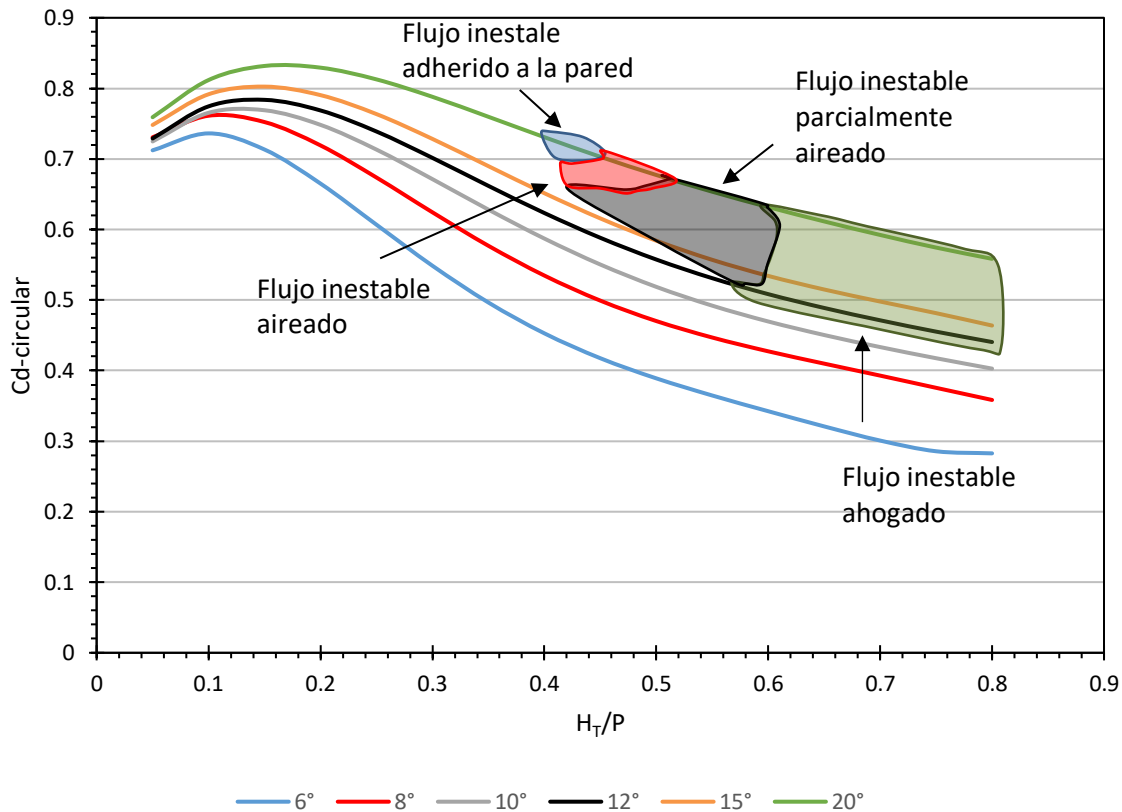
**Figura 6.7** Líneas de corrientes helicoidales paralelas a la pared del vertedor.

Los resultados de éste estudio, confirman la presencia de flujo inestable localizado aguas abajo entre las paredes laterales del vertedor. Para elevadas cargas hidráulicas sobre vertedores donde  $\alpha \geq 12^\circ$  se ha sido detectado la presencia de flujo turbulento y corrientes helicoidales junto a las paredes del ciclo del vertedor; no se observó efectos de inestabilidad para vertedores cuyos ángulos de pared lateral sean menores de  $12^\circ$ .

El efecto de la inestabilidad de la lámina vertiente en vertedores tipo laberinto aún no está claro, sin embargo, se deben evitar los rangos de inestabilidad en el diseño del vertedor tipo laberinto porque los niveles de vibración, fluctuaciones de la lámina vertiente y presiones no deseadas pueden resultar potencialmente dañinos para la estructura. En la figura (6.8) se presenta los rangos de  $H_7/P$  en la que se presenta la inestabilidad del flujo.

**PROGRAMA DE POSGRADO:  
DOCTORADO EN CIENCIAS Y TECNOLOGÍA DEL AGUA**

“Análisis del comportamiento hidráulico del vertedor tipo laberinto mediante Dinámica de Fluidos Computacional (CFD)”



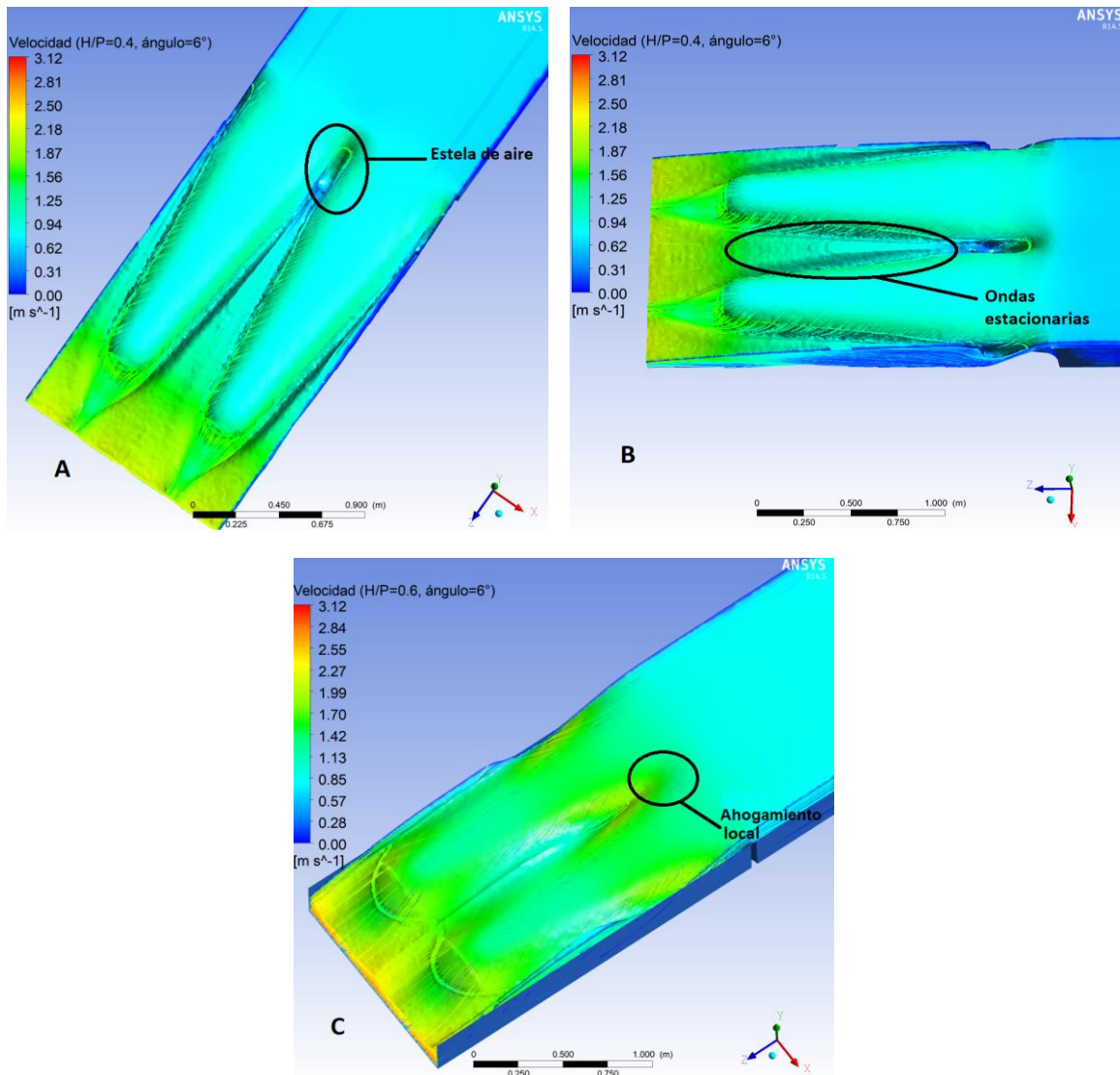
**Figura 6.8.** Inestabilidad del flujo en vertedores tipo laberinto de ápice circular con cresta de medio redondeo.

**6.5 Interferencia de la lámina vertiente**

La interferencia de la lámina vertiente, se refiere a la región en el que dos o más láminas vertientes se cruzan, y ocurre en el vértice aguas arriba del vertedor. La interferencia de las láminas de descarga disminuye la eficiencia del vertedor, por lo que es inherente caracterizar y cuantificar su tamaño para predecir su influencia en el rendimiento hidráulico del vertedor. El tamaño de la región influenciada por la interferencia depende de la longitud del ápice, la forma de la cresta, la altura del vertedor, la carga hidráulica, y condiciones de aireación y puede producir estela de aire aguas abajo del ápice, ondas estacionarias y ahogamiento local entre las paredes laterales y el ápice del vertedor (figura 6.9).

PROGRAMA DE POSGRADO:  
DOCTORADO EN CIENCIAS Y TECNOLOGÍA DEL AGUA

“Análisis del comportamiento hidráulico del vertedor tipo laberinto mediante Dinámica de Fluidos Computacional (CFD)”

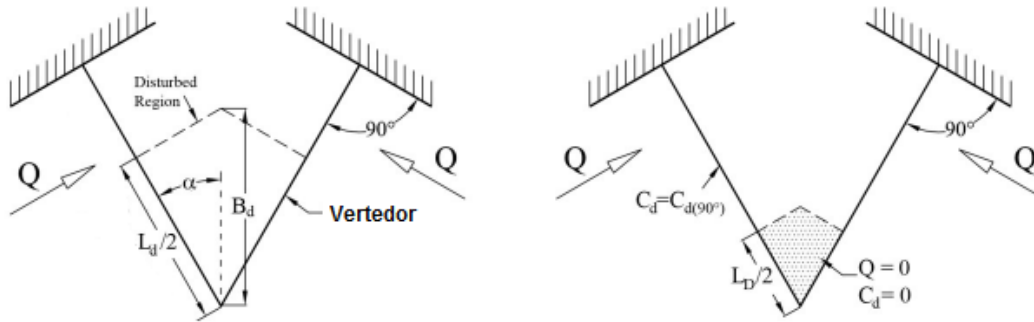


**Figura 6.9.** Efectos de la interferencia de la lámina vertiente. (A) Estela de aire, (B) ondas estacionarias, (C) Ahogamiento local.

Indlerkofer y Rouvé (1975), estudiaron la interferencia de láminas vertientes en vertedores de esquina con cresta viva. Un vertedor de esquina se describe como un vertedor triangular de un sólo ciclo cuyas paredes laterales son perpendiculares a las paredes del canal (figura 6.10). Indlerkofer y Rouvé (1975) identifican una región perturbada donde los flujos de descarga de cada pared lateral del vertedor de esquina colisionan y una segunda región donde las líneas de corriente son perpendiculares a la pared del vertedor como un vertedor lineal, desarrollaron una ecuación empírica de descarga (ecuación 6.11):

**PROGRAMA DE POSGRADO:  
DOCTORADO EN CIENCIAS Y TECNOLOGÍA DEL AGUA**

“Análisis del comportamiento hidráulico del vertedor tipo laberinto mediante Dinámica de Fluidos Computacional (CFD)”



**Figura 6.10.** Parámetros e interferencia de láminas vertientes para vertedores de esquina de cresta viva (Indlekofer y Rouvé, 1975).

$$L_d = \left( L - \frac{3Q}{2C_{d(90^\circ)}\sqrt{2gH_T^{1.5}}} \right) - \frac{1}{1-C_{d-m}} = L_D \frac{1}{1-C_{d-m}} \quad (6.11)$$

Dónde:  $L_d$  es la longitud de la cresta del área perturbada,  $L$  la longitud del vertedor,  $C_{d(90^\circ)}$  es el coeficiente de descarga de un vertedor lineal [adimensional],  $H_T$  es la carga estática sobre el vertedor,  $Q$  es el gasto de descarga,  $g$  la aceleración de la gravedad,  $C_{d-m}$  es el coeficiente de descarga promedio que representa la eficiencia del vertedor de esquina con respecto al lineal ( $C_{d-m} = C_{d-esquina}/C_{d(90^\circ)}$ ) y  $L_D$  es la longitud de la cresta cuando  $Q$  y  $C_{d(90^\circ)}$  valgan cero [para más detalle consultar los estudios de Indlerkofer y Rouvé (1975)].

Falvey (2003) desarrolló una relación empírica tomando en cuenta la relación de datos de Indlerkofer y Rouvé (1975) (ecuación 6.12), donde  $L_{int}$  es la longitud de la cresta afectada por la interferencia de láminas vertientes; también desarrolló la ecuación (6.13) basado en el análisis de datos experimentales de un vertedor en laberinto, sin embargo, no da una recomendación con respecto a qué ecuación es la más apropiada o precisa.

$$\frac{L_{int}}{H_T} = 6.1 e^{-0.052\alpha} \quad ; \alpha \geq 10^\circ \quad (6.12)$$

$$L_{int} = L_c \left( 0.224 \ln \frac{H_T}{P} + 0.94 - 0.03\alpha^\circ \right) ; \alpha \leq 20^\circ \text{ y } H_T/P \geq 0.1 \quad (6.13)$$

Basado en el análisis de Tullis *et al.* (1995), Falvey (2003) propone como límite para el diseño de vertedores tipo laberinto:  $L_{int}/L \leq 0.35$ . Falvey, también afirma que se necesita investigación adicional para la validación de las ecuaciones (6.12) y (6.13).

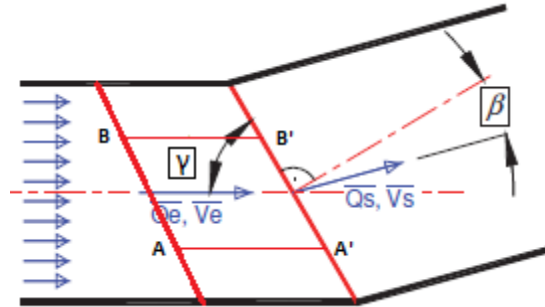
Por otro lado, Osuna (2000) realizó el análisis del comportamiento hidráulico de un vertedor dentro de un canal y oblicuo a la dirección del flujo aguas arriba (figura 6.11) a partir del teorema de



**PROGRAMA DE POSGRADO:  
DOCTORADO EN CIENCIAS Y TECNOLOGÍA DEL AGUA**

“Análisis del comportamiento hidráulico del vertedor tipo laberinto mediante Dinámica de Fluidos Computacional (CFD)”

la cantidad de movimiento. Tal desarrollo matemático ha sido adaptado por Granell. (2010) a vertedores tipo laberinto.



**Figura 6.11.** Vertedor oblicuo dentro de un canal (Osuna, 2000).

En base a la cantidad del momentum Granell *et al.* (2013) proponen las ecuaciones (6.14)-(6.16) para obtener la longitud de interferencia de láminas efectiva:

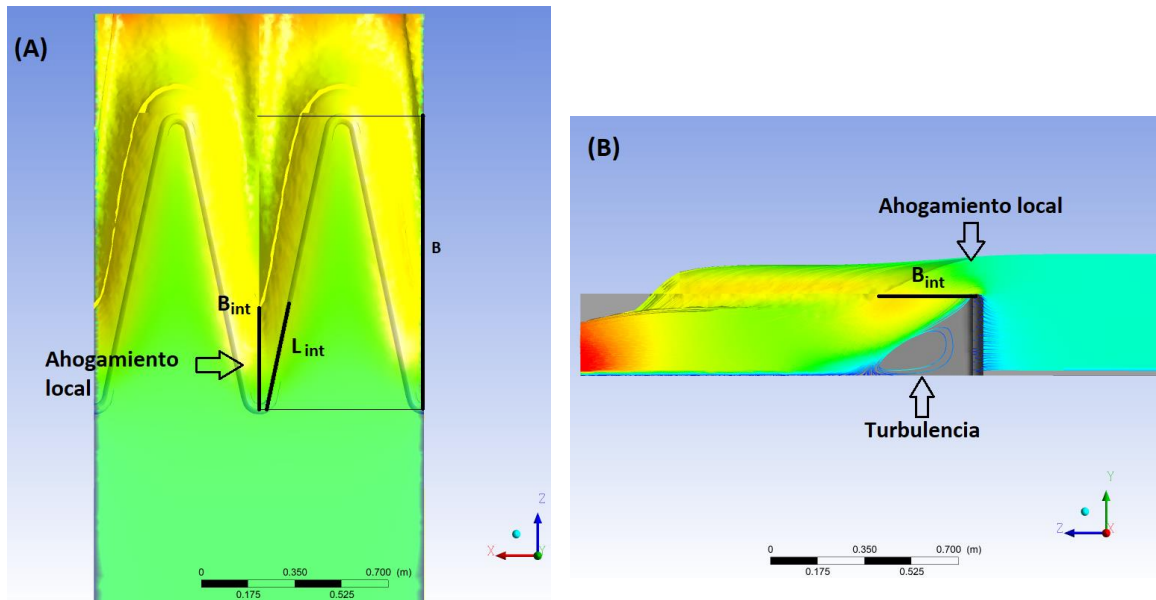
$$L_{int} = 6.1H_T e^{-0.052(\gamma_{max} + \beta_{max})} \quad (6.14)$$

$$\beta_{max} = \arctg \left( \frac{0.667 H_T}{P + H_T} \operatorname{tg}(90 - \gamma_{max}) \right) \quad (6.15)$$

$$\gamma_{max} = \arctg \left( \frac{0.5 w \operatorname{tg} \gamma}{0.5 w - A_c} \right) \quad (6.16)$$

Dónde  $w$  es el ancho de un ciclo del vertedor,  $A_c$  el ancho del ápice,  $\gamma$  y  $\beta$  son los ángulos que forman las líneas de corriente a la entrada y salida del vertedor con la perpendicular del mismo respectivamente.

En este estudio, para caracterizar el tamaño de las regiones de interferencia, se midió perpendicularmente desde el ápice aguas arriba hacia aguas abajo la longitud donde el flujo de descarga de las paredes del vertedor se intersectan ( $B_{int}$ ) figura (6.12-A). Dependiendo de la geometría del vertedor tipo laberinto y de las condiciones del flujo, la región de interferencia puede incluir una región de flujo turbulento, ahogamiento local o ambos (figura 6.12-B).  $L_{int}$  se puede utilizar para aproximar la parte de la longitud de cresta dentro de la región de interferencia de láminas vertientes.



**Figura 6.12.** (A) Definición de las longitudes  $B_{int}$  y  $L_{int}$ , (B) Interferencia de láminas, ahogamiento local y turbulencia.

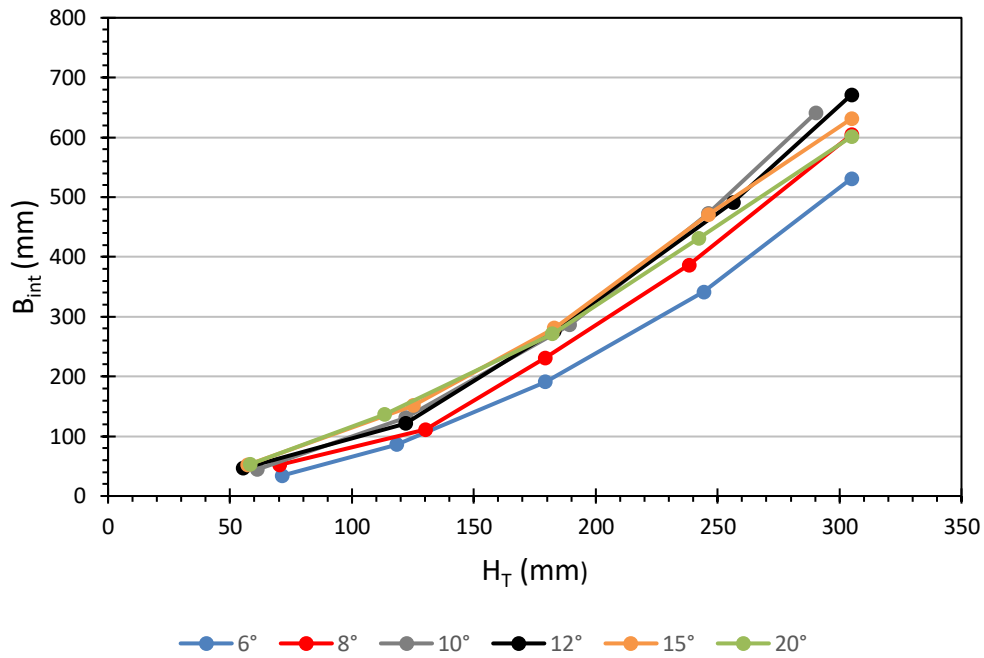
En la figura (6.13), la longitud de  $B_{int}$  incrementa junto con la carga hidráulica  $H_T$ ; conforme el flujo pasa de la condición de aireado a ahogado, el tamaño de la región del salto hidráulico (onda estacionaria) disminuye. En la figura (6.14), permite la apreciación más clara sobre la variación de la longitud de la interferencia del flujo de descarga sobre la cresta del vertedor en relación con la carga hidráulica; en aquellos vertedores cuya inestabilidad del flujo se encuentra presente,  $\alpha=12^\circ, 15^\circ, 20^\circ$ , la longitud de interferencia de la lámina vertiente decrece en relación con los vertedores de menor ángulo para cargas hidráulicas similares.

La información presentada en la figura (6.13), puede ser cuantificada. En la figura (6.15) se muestra que para elevadas cargas la longitud de  $B_{int}$  alcanza hasta el 60% de la longitud de  $B$ ; la familia de curvas de la figura (6.15), permite caracterizar el porcentaje de la interferencia a aguas abajo del ciclo en relación con la longitud del vertedor en dirección del flujo, la familia de curvas resulta de variar la longitud del vertedor, o la longitud de  $B$ .

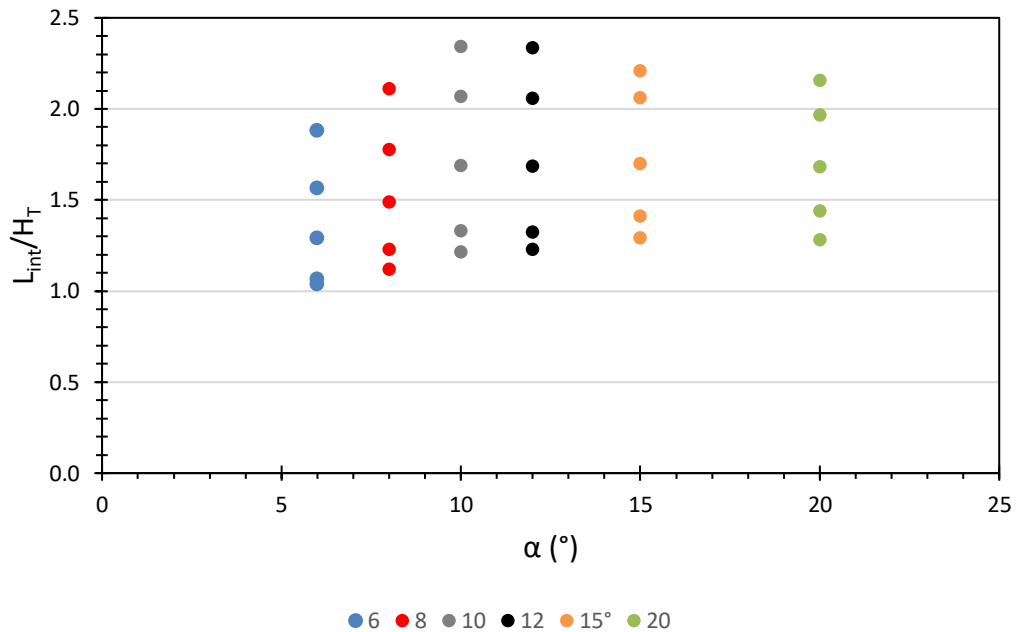
Para facilitar el uso de la figura (6.15), en la predicción de la longitud de interferencia de la lámina vertiente, la familia de curvas  $B_{int}/B$  vs  $H_T/P$  son ajustados a una ecuación de segundo grado en función de  $H_T/P$  (ec. 6.17).

**PROGRAMA DE POSGRADO:  
DOCTORADO EN CIENCIAS Y TECNOLOGÍA DEL AGUA**

“Análisis del comportamiento hidráulico del vertedor tipo laberinto mediante Dinámica de Fluidos Computacional (CFD)”



**Figura 6.13.**  $B_{int}$  vs  $H_T$  para  $6^\circ \leq \alpha \leq 20^\circ$ .



**Figura 6.14.** Variación de la longitud de interferencia de láminas vertientes ( $6^\circ \leq \alpha \leq 20^\circ$ ).

PROGRAMA DE POSGRADO:  
DOCTORADO EN CIENCIAS Y TECNOLOGÍA DEL AGUA

“Análisis del comportamiento hidráulico del vertedor tipo laberinto mediante Dinámica de Fluidos Computacional (CFD)”

$$\frac{B_{int}}{B} = m \left( \frac{H_T}{P} \right)^2 + n \frac{H_T}{P} + o \quad (6.17)$$

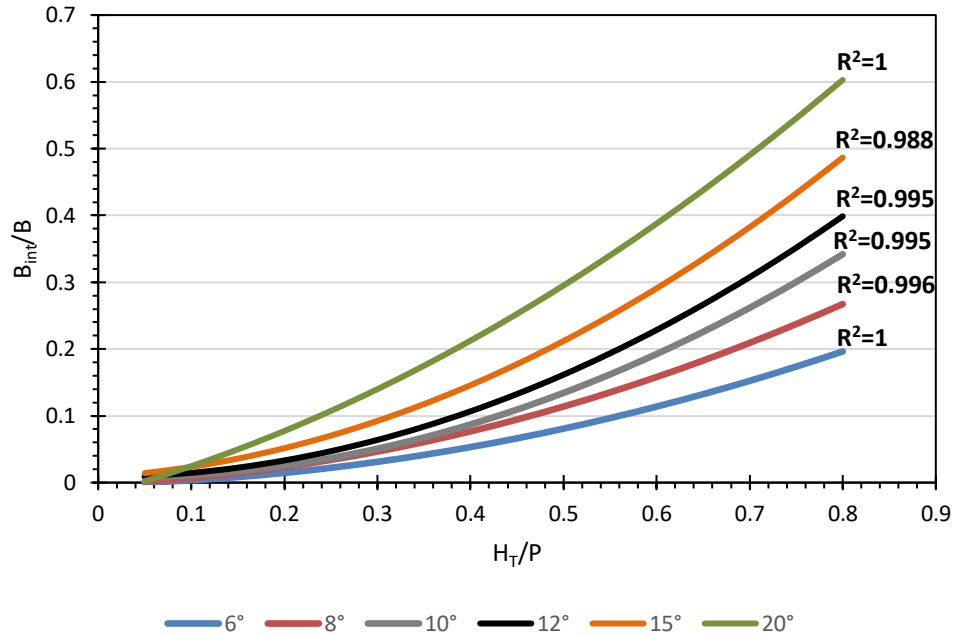


Figura 6.15. Porcentaje de la interferencia de la lámina vertiente en relación con la distancia B. ( $6^\circ \leq \alpha \leq 20^\circ$ ).

Los valores de los coeficientes de la ecuación (6.17) se pueden calcular con las ecuaciones (6.18)-(6.20) en función del ángulo  $\alpha$ .

$$m = 1.284 * 10^{-4} \alpha^4 - 6.583 * 10^{-3} \alpha^3 + 0.115 \alpha^2 - 0.764 \alpha + 1.978; R^2 = 0.982 \quad (6.18)$$

$$n = -1.095 * 10^{-4} \alpha^4 + 5.648 * 10^{-3} \alpha^3 - 0.01 \alpha^2 + 0.722 \alpha - 1.781; R^2 = 0.990 \quad (6.19)$$

$$o = 6.004 * 10^{-6} \alpha^4 - 3.349 * 10^{-4} \alpha^3 + 0.006 \alpha^2 - 0.046 \alpha + 0.110; R^2 = 0.976 \quad (6.20)$$

## 6.6 Procedimiento de diseño

El procedimiento de diseño recomendado se describe en el cuadro (6.3) y en el diagrama de flujo de la figura (6.16), utilizando un ejemplo basado en los datos de Houston (1982) sobre un estudio realizado a la presa Ute ubicado en Logan, Nuevo México. La figura (6.17) muestra los parámetros geométricos considerados en el diseño del vertedor tipo laberinto. El cuadro (6.3) se subdivide en cuatro bloques, de la manera siguiente:

**PROGRAMA DE POSGRADO:**  
**DOCTORADO EN CIENCIAS Y TECNOLOGÍA DEL AGUA****“Análisis del comportamiento hidráulico del vertedor tipo laberinto mediante Dinámica de Fluidos Computacional (CFD)”**

**i)** El bloque superior enlista los datos con el que se inicia el diseño del vertedor, obtenidos previamente mediante un estudio topográfico e hidrológico. El gasto de diseño ( $Q_{diseño}=15574 \text{ m}^3/\text{s}$  para este ejemplo) representa a una avenida de diseño para un periodo de retorno específico, la carga total aguas arriba del vertedor ( $H_T=5.8 \text{ m}$ ) es restringido por el bordo libre, y la carga aguas abajo ( $H_d=0.5 \text{ m}$ ) es calculado a partir de la curva de remanso basado  $Q_{diseño}$ , la elevación del volumen total de almacenamiento corresponde a la altura del vertedor ( $P=9.14 \text{ m}$ ). El ancho del vertedor ( $W=256 \text{ m}$ ) generalmente es un dato restringido por la topografía, también se puede calcular a partir del ancho y número de ciclos ( $W=N*w$ ).

**ii)** El segundo bloque permite definir el ángulo óptimo ( $\alpha$ ) para evitar la inestabilidad del flujo de descarga, el número de ciclos ( $N$ ) y la condición de aireación de lámina vertiente. El ángulo  $\alpha$  tiene impacto en la economía como en la eficiencia del vertedor; la selección del ángulo determinará la longitud total del vertedor y la distancia entre los ápice aguas arriba y aguas abajo ( $B$ ), conforme incrementa  $\alpha$  la longitud del vertedor disminuye pero posee menor volumen de descarga, se puede elegir un ángulo grande cuando la longitud de  $B$  se encuentre limitada por la topografía. En el ejemplo considerado, se muestra que para  $\alpha=11^\circ$  el flujo es estable, el vertedor tiene menor longitud de cresta ( $L_c=796.13 \text{ m}$ ) y distancia entre ápices ( $B=45 \text{ m}$ ), y mayor coeficiente de descarga ( $C_d=0.474$ ).

Otra variable importante que influye en el diseño y en el costo de construcción es el número de ciclos ( $N$ ). El número de ciclos se calcula como la relación del ancho del vertedor ( $W$ ) entre el ancho del ciclo ( $w$ ), sin embargo, el valor del ancho del ciclo debe de tal manera que  $2 \leq w/P \leq 4$  para que el vertedor sea hidráulicamente eficiente. Para Taylor (1968)  $w/P$  no debe ser menor de 2 porque contribuiría a la reducción de la eficiencia del vertedor, Tullis *et al.* (1995) recomienda que  $w/P$  no debe ser mayor de 4, considerando ambos criterios se recomienda obtener el número de ciclos a partir de  $w/P=3$  para que el vertedor sea hidráulicamente eficiente y rentable. En el ejemplo se calculó como 9 el número de ciclos que permitirá que el vertedor sea hidráulicamente eficiente ( $w/P=3.1$ ).

**iii)** La tercera sección contiene las variables geométricas calculadas (como:  $t_w$ ,  $C_{int}$ ,  $Arc_{int}$ ,  $Arc_{ext}$ ,  $l_c$ ), las eficiencias del ciclo y del vertedor, y la longitud de interferencia la láminas vertientes ( $B_{int}=10.66 \text{ m}$ ) todas en función de los parámetros definidos anteriormente.

**iv)** La última sección del método de diseño, incluye las relaciones adimensionales de carga para el vertedor sumergido, desarrollado por Tullis *et al.* (2007).

**PROGRAMA DE POSGRADO:**  
**DOCTORADO EN CIENCIAS Y TECNOLOGÍA DEL AGUA**

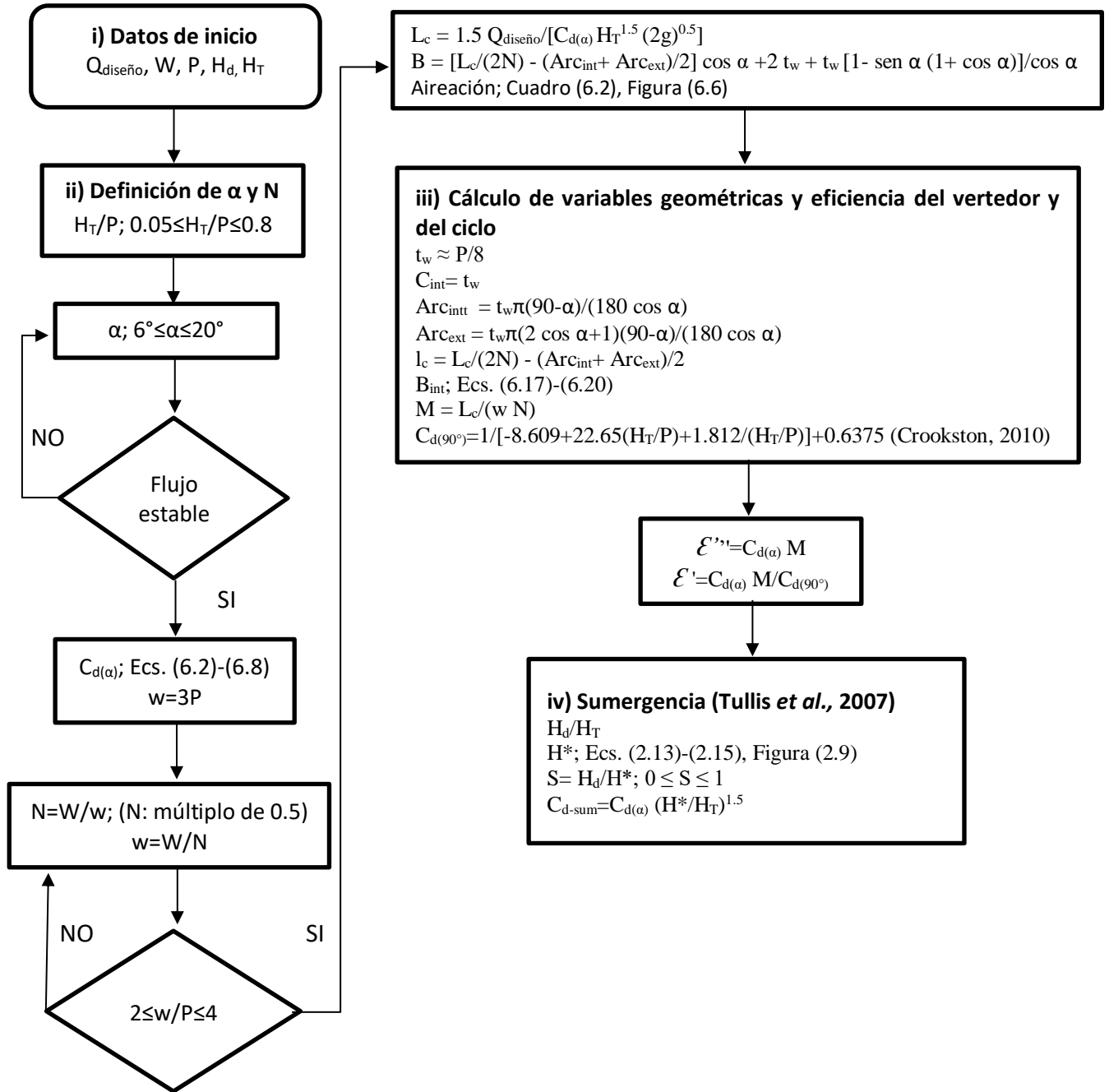
“Análisis del comportamiento hidráulico del vertedor tipo laberinto mediante Dinámica de Fluidos Computacional (CFD)”

**Cuadro 6.3.** Hoja de cálculo para el diseño de un vertedor tipo laberinto

Concepto	símbolo	Valor-Unidad	Observaciones
<b>i) Datos de inicio</b>			
Gasto de diseño	$Q_{\text{diseño}}$	15574 m <sup>3</sup> /s	-
Ancho del vertedor	$W$	256 m	-
Altura del vertedor	$P$	9.14 m	-
Carga total aguas arriba	$H_T$	5.8 m	-
Carga total aguas abajo	$H_d$	0.5 m	-
<b>ii) Definición de <math>\alpha</math> y el número de ciclos (N)</b>			
Carga-altura del vertedor	$H_T/P$	0.63	$0.05 \leq H_T/P \leq 0.8$
Ángulo del muro lateral	$\alpha$	11°	$6^\circ \leq \alpha \leq 20^\circ$
Estabilidad del flujo	-	Estable	Estable-Inestable (Figura 6.8)
Coefficiente de descarga	$C_{d(\alpha)}$	0.474	$C_{d(\alpha)} = f(H_T/P, \alpha)$ , Ecs. (6.2)-(6.8)
Ancho del ciclo	$w$	27.2 m	$w=3P$
Número de ciclos	$N$	9.34≈9	$N = W/w$
Nuevo ancho del ciclo	$w$	28.44 m	$w=W/N$
Aspecto vertical	$w/P$	3.11	$2 \leq w/P \leq 4$
Longitud del vertedor	$L_c$	796.13 m	$L_c = 1.5 Q_{\text{diseño}}/[C_{d(\alpha)} H_T^{1.5} (2g)^{0.5}]$
Longitud entre ápices (paralelo al flujo)	$B$	45.06 m	$B = [L_c/(2N) - (Arc_{\text{int}} + Arc_{\text{ext}})/2] \cos \alpha + 2 t_w + t_w [1 - \sin \alpha (1 + \cos \alpha)]/\cos \alpha$ (ó dato de ingreso)
Aireación de la lámina vertiente	-	Ahogado	Cuadro (6.2), Figura (6.6)
<b>iii) Cálculo de variables geométricas, eficiencias del vertedor y del ciclo</b>			
Espesor de la pared	$t_w$	1.14 m	$t_w \approx P/8$
Cuerda interno del ápice	$C_{\text{int}}$	1.14 m	$C_{\text{int}} = t_w$
Arco interno del ápice	$Arc_{\text{int}}$	1.60 m	$Arc_{\text{int}} = t_w \pi (90 - \alpha) / (180 \cos \alpha)$
Arco externo del ápice	$Arc_{\text{ext}}$	1.19 m	$Arc_{\text{ext}} = t_w \pi (2 \cos \alpha + 1) (90 - \alpha) / (180 \cos \alpha)$
Longitud del muro lateral	$l_c$	42.83 m	$l_c = L_c / (2N) - (Arc_{\text{int}} + Arc_{\text{ext}}) / 2$
Longitud de interferencia de láminas vertientes	$B_{\text{int}}$	10.66 m	Ecs. (6.17)-(6.20)
Relación de magnificación	$M$	3.23	$M = L_c / (w N)$
Coefficiente de descarga de vertedor lineal	$C_{d(90^\circ)}$	0.753	$C_{d(90^\circ)} = 1 / [-8.609 + 22.65 (H_T/P) + 1.812 / (H_T/P)] + 0.6375$ (Crookston, 2010)
Eficiencia del ciclo	$\mathcal{E}'$	0.74	$\mathcal{E}' = C_{d(\alpha)} M$
Eficiencia del vertedor	$\mathcal{E}'$	1.96	$\mathcal{E}' = C_{d(\alpha)} M / C_{d(90^\circ)}$
<b>iv) Sumergencia (Tullis et al. 2007)</b>			
Relación de cargas	$H_d/H_T$	0.08	-
Carga total de sumergencia	$H^*$	5.81m	Ecs. (2.13)-(2.15), Figura (2.9)
Nivel de sumergencia	$S$	0.09	$S = H_d/H^*$ ; $0 \leq S \leq 1$
Coefficiente de descarga del vertedor sumergido	$C_{d\text{-sum}}$	0.473	$C_{d\text{-sum}} = C_{d(\alpha)} (H^*/H_T)^{1.5}$

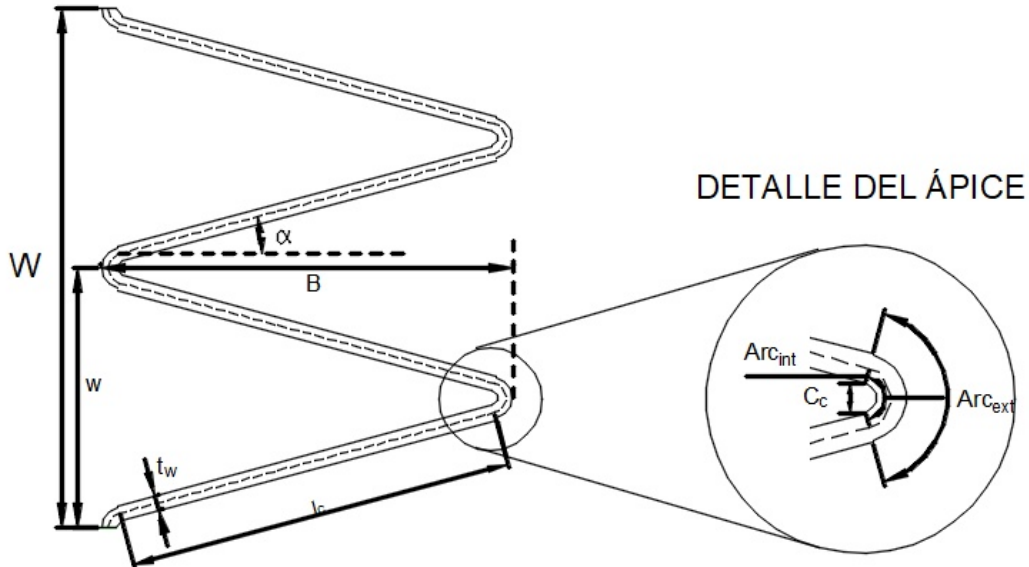
**PROGRAMA DE POSGRADO:**  
**DOCTORADO EN CIENCIAS Y TECNOLOGÍA DEL AGUA**

“Análisis del comportamiento hidráulico del vertedor tipo laberinto mediante Dinámica de Fluidos Computacional (CFD)”



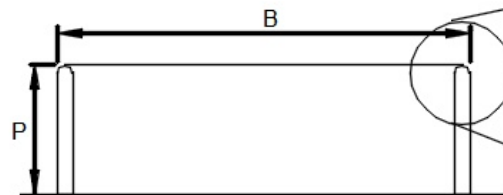
**Figura 6.16.** Diagrama de flujo para el procedimiento de diseño.

VISTA PLANTA

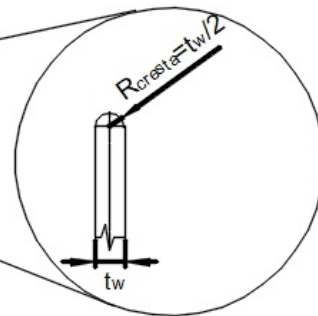


DETALLE DEL ÁPICE

VISTA PERFIL



DETALLE DE LA CRESTA



**Figura 6.17.** Parámetros geométricos del vertedor tipo laberinto de ápice circular.

No sólo es importante tener la capacidad de diseñar un vertedor tipo laberinto a partir de las condiciones hidráulicas requeridas, también es importante calcular la carga y descarga para un vertedor ya existente a partir de sus dimensiones geométricas; tal procedimiento se describe en la figura (6.18), a partir de sus dimensiones geométricas conocidas se calculan los parámetros y relaciones geométricos del vertedor y la curva carga-descarga es generada.

Los efectos de sumergencia del vertedor se puede determinar resolviendo para el gasto de diseño o la carga total de sumergencia aguas arriba ( $H^*$ ) por iteración (Tullis *et al.* 2007). La relación

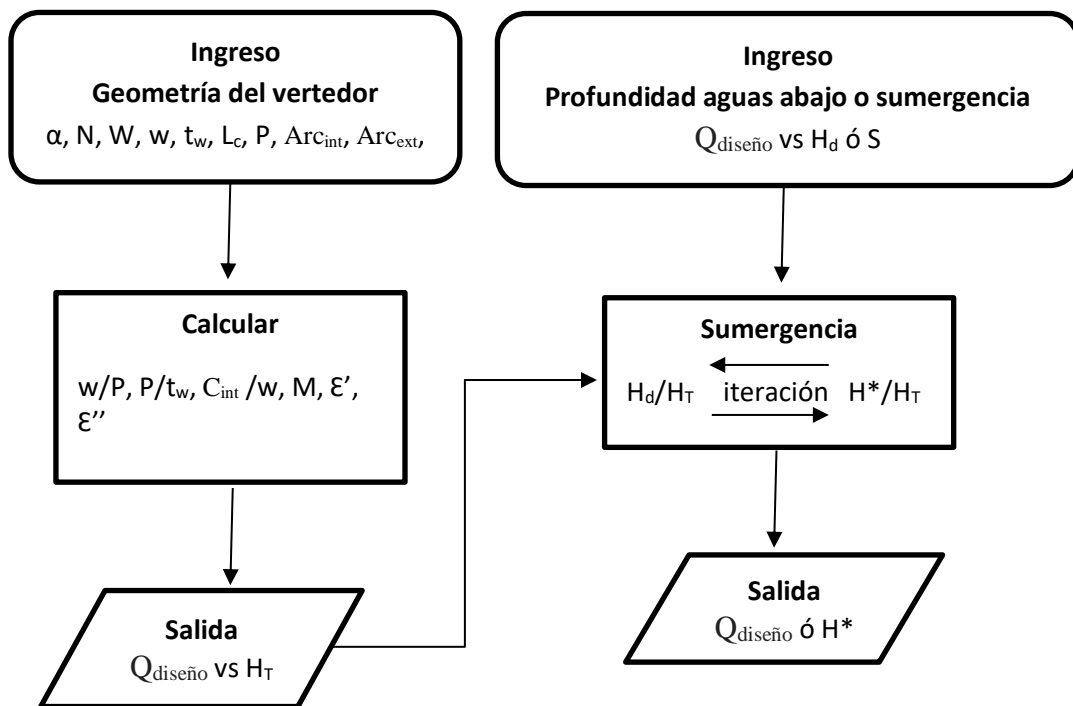


**PROGRAMA DE POSGRADO:**  
**DOCTORADO EN CIENCIAS Y TECNOLOGÍA DEL AGUA**

**“Análisis del comportamiento hidráulico del vertedor tipo laberinto mediante Dinámica de Fluidos Computacional (CFD)”**

adimensional de carga sumergida, basada en Tullis et al. (2007), se presenta en la figura (2.9), que incluye  $H^*$  y niveles de sumersión aguas abajo.

.El método de diseño, los gráficos y cuadros de diseño se limitan a las geometrías y las condiciones hidráulicas probadas en este estudio. Sin embargo, estos resultados se pueden aplicar a otras geometrías de vertedor tipo laberinto y condiciones de flujo de manera conservadora. Durante el diseño del vertedor se recomienda realizar la modelación física junto con la modelación numérica para validar el funcionamiento hidráulico del vertedor tipo laberinto.



**Figura 6.17.** Procedimiento para el análisis de vertedores tipo laberinto (Crookston, 2010).

**PROGRAMA DE POSGRADO:**  
**DOCTORADO EN CIENCIAS Y TECNOLOGÍA DEL AGUA****“Análisis del comportamiento hidráulico del vertedor tipo laberinto mediante Dinámica de Fluidos Computacional (CFD)”****CONCLUSIONES**

El vertedor tipo laberinto es una alternativa viable para la rehabilitación de presas, donde la reducción de la vida útil de la infraestructura, preocupaciones sobre la seguridad de presas, limitaciones del bordo libre y el incremento del gasto máximo exige mayor capacidad de descarga. La forma más común de describir su funcionamiento es mediante su coeficiente de descarga, éste es afectado por varios factores que se pueden agrupar en tres: geométricos, condiciones del flujo y condiciones de aireación de la lámina vertiente.

Una vez validado el CFD como herramienta para analizar hidráulicamente un vertedor tipo laberinto, se logró mejor el comportamiento hidráulico del vertedor y se desarrolló un método de diseño considerando el comportamiento del flujo de descarga y las características geométricas y relaciones adimensionales del vertedor tipo laberinto.

A partir de un modelo físico y de los resultados experimentales presentados por Crookston (2010), fue posible evaluar un modelo conceptual haciendo uso de la herramienta del CFD, en particular con el programa ANSYS-FLUENT 14.5. Los resultados numéricos muestran la concordancia con los resultados experimentales, presentando 5% de error máximo del coeficiente de descarga.

En el software ANSYS-FLUENT 14.5, se realizaron modelaciones numéricas de vertedores tipo laberinto con diferentes perfiles de cresta y formas de ápices, concluyendo que un vertedor tipo laberinto con ápice circular y perfil de cresta de medio redondeo posee mayor capacidad de descarga, traducido en el coeficiente de descarga, que el resto de las combinaciones geométricas (figuras 5.4 y 5.5).

Los resultados del coeficiente de descarga (figura 6.1), del vertedor propuesto, son presentados en función de  $H_T/P$  para  $6^\circ \leq \alpha \leq 20^\circ$ ; los vertedores de mayor ángulo muestran mayor capacidad de descarga que los de menor ángulo, para todos los casos, la reducción del valor del coeficiente de descarga se encuentra a partir de  $H_T/P \geq 1.5$  siendo más drástico para ángulos de  $6^\circ$  y  $8^\circ$  y menos drástico para  $20^\circ$ . Se compararon los coeficientes de descarga de vertedores de ápice circular con los de ápice trapezoidal, los resultados indican que el aumento de la eficiencia proporcionado por un vertedor de ápice circular en relación con uno de ápice trapezoidal es más significativa a partir de valores de  $H_T/P \approx 0.1$  (figura 6.2) cuando el vertedor alcanza su máximo valor de  $C_d$ .

**PROGRAMA DE POSGRADO:**  
**DOCTORADO EN CIENCIAS Y TECNOLOGÍA DEL AGUA****“Análisis del comportamiento hidráulico del vertedor tipo laberinto mediante Dinámica de Fluidos Computacional (CFD)”**

Para seleccionar el ángulo apropiado de la pared lateral ( $\alpha$ ) se presenta como herramienta de diseño la eficiencia del ciclo del vertedor (figura 6.4). Los resultados indican que los valores máximos de eficiencia se producen para valores pequeños de  $H_T/P$ , la eficiencia del ciclo del vertedor es mayor para valores decrecientes del ángulo  $\alpha$  producido por el aumento de la longitud de la cresta del ciclo. También se ha observado que existe una reducción significativa de la eficiencia para los vertedores de  $6^\circ$  a  $10^\circ$ , después de haber alcanzado su valor máximo de eficiencia.

En cuanto a las condiciones de aireación que se presenta debajo de la lámina vertiente, éste es influenciado, entre factores hidráulicos, por la geometría del vertedor. Se ha identificado cuatro tipos de aireación: flujo adherido a la pared, flujo aireado, flujo parcialmente aireado y ahogado (figura 6.6); los resultados muestran que una lámina adherida a la pared posee mayor capacidad de descarga que las demás condiciones de aireación, los vertedores cuyo ángulo  $\alpha$  es de  $15^\circ$  a  $20^\circ$  tienen mayor rango de flujo adherido a la pared en contraparte a la condición de flujo aireado que es presentado brevemente, para aquellos vertedores cuyo ángulo varía de  $6^\circ$  a  $10^\circ$  existe una disminución abrupta de los valores del coeficiente de descarga durante la condición de flujo aireado.

El modelo computacional permitió identificar regiones de inestabilidad del flujo durante la descarga (figura 6.8), se encontró la presencia de flujo turbulento generado por líneas de corrientes helicoidales paralelas a la pared del vertedor hacia aguas abajo. De acuerdo con los resultados, la inestabilidad es presentada en vertedores de  $12^\circ$  a  $20^\circ$  (en menor grado para el vertedor de  $12^\circ$ ), en condición de flujo parcialmente aireado y ahogado, a excepción del vertedor de  $20^\circ$  donde la inestabilidad se presenta en las cuatro condiciones de aireación. Al realizar el diseño del vertedor tipo laberinto se recomienda evitar los rangos de inestabilidad del flujo, ya que su ocurrencia puede ocasionar efectos dañinos e indeseables para el vertedor.

La reducción del coeficiente de descarga en vertedores tipo laberinto, es también atribuible a las colisiones de láminas vertientes localizado entre las paredes laterales del vertedor. De acuerdo con los resultados numéricos, la interferencia de las láminas vertientes genera la presencia de fenómenos tales como: ahogamiento local en los ápices aguas arriba, salto hidráulico y flujo turbulento dependiendo de la carga hidráulica, la longitud de la cresta y de las condiciones de aireación. Fue posible caracterizar y cuantificar la longitud de la cresta del vertedor que es afectado por la interferencia de las láminas vertientes ( $B_{int}$ ), en relación con la distancia entre los ápices aguas arriba y abajo ( $B$ ) (figura 6.15), los resultados constatan que la longitud de  $B_{int}$  alcanza como máximo el

**PROGRAMA DE POSGRADO:**  
**DOCTORADO EN CIENCIAS Y TECNOLOGÍA DEL AGUA****“Análisis del comportamiento hidráulico del vertedor tipo laberinto mediante Dinámica de Fluidos Computacional (CFD)”**

60% de la longitud de  $B$  cuando se presenta cargas elevadas ( $H_T/P \leq 0.8$ ). En condición de ahogamiento se ha observado, que en vertedores cuyo ángulo de pared lateral varía de  $12^\circ$  a  $20^\circ$ , la longitud de interferencia de la lámina vertiente se reduce comparado con los vertedores de menor ángulo (figura 6.14), éste fenómeno puede relación con la inestabilidad del flujo de descarga.

Se presenta en el cuadro (6.3) un procedimiento de diseño del vertedor tipo laberinto. La sección superior (i) corresponde a los datos de entrada, que incluye las condiciones hidráulicas (gasto de diseño, carga total aguas arriba y aguas abajo del vertedor) y geometría del vertedor (altura y ancho del vertedor). La sección (ii) permite definir el número de ciclos y el ángulo  $\alpha$  óptimos para que el vertedor sea hidráulicamente eficiente y su construcción sea costeable. La sección (iii) contiene las variables calculadas (eficiencia, parámetros y relaciones geométricas) con base en los parámetros definidos en las secciones anteriores, finalmente se incluye la sumergencia del vertedor tipo laberinto, según lo presentado por Tullis *et al.* (2007). También se introducen los pasos necesarios para calcular la carga y descarga a partir de las dimensiones geométricas de un vertedor ya existente.

Aunque los métodos y herramientas presentados en este estudio son recomendados para su uso en el diseño y análisis de vertedores tipo laberinto, se aconseja realizar la modelación física junto con la modelación numérica para validar el funcionamiento hidráulico del vertedor tipo laberinto.

**RECOMENDACIONES PARA FUTUROS ESTUDIOS**

Complementando a la investigación realizada, es necesario mencionar trabajos futuros que aportaran a la mejora del funcionamiento del vertedor tipo laberinto.

- Analizar el comportamiento del vertedor con valores de  $H_T/P > 0.8$ , es importante para la determinación de la carga máxima con que el vertedor pueda trabajar como tal sin que afecte a la seguridad de la obra civil.
- La investigación está centrada en vertedores ubicados dentro de un canal, sin embargo, por aproximación del flujo, el comportamiento de un vertedor localizado en un reservorio es diferente, por lo cual será necesario realizar dicho estudio con el vertedor propuesto en ésta investigación.
- Se ha concluido que un vertedor con ápice circular mejora el coeficiente de descarga al evitar la colisión perpendicular de las líneas de corriente con la estructura. Es posible que el funcionamiento del vertedor tipo laberinto sea mejorado cuando éste trabaje con ciclos ovalados; no sólo se evitaría el choque perpendicular entre la pared del vertedor y las líneas de corriente, también se lograría incrementar la longitud del vertedor.

**PROGRAMA DE POSGRADO:**  
**DOCTORADO EN CIENCIAS Y TECNOLOGÍA DEL AGUA**

“Análisis del comportamiento hidráulico del vertedor tipo laberinto mediante Dinámica de Fluidos Computacional (CFD)”

**REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

- Aydin, I., Altan-Sakarya, A. B., & Sisman, C. (2011). Discharge formula for rectangular sharp-crested weirs. *Flow Measurement and Instrumentation*, 22(2), 144-151
- American Society for Testing and Materials (ASTM) (1993). *Standard method for open-channel flow measurement of water with thin-plate weirs*. ASTM D5242, West Conshohocken, Pa.
- Aris, R. (1962). *Vectors, Tensors and the basic Equations of Fluid Mechanics*. Dover Publications.
- Arreguín Cortés, F. I. (2005). *Cavitación y aireación en obras de excedencia* (No. 620.1064 A7).
- Balairón, L. (2011). Modelación matemática en el ámbito de la dinámica fluvial *II Jornada de Ingeniería del Agua*. Barcelona, España.
- Balairón, L., López, D., Morán Moya, R., Ramos, T., & Toledo Municio, M. Á. (2014). Avances en investigación aplicada mediante modelación física y numérica en el diseño de la ingeniería de presas. *Ingeniería del Agua*, 18(1), 55-69.
- Bautista-Capetillo, C., Robles, O., Júnez-Ferreira, H., & Playán, E. (2013). Discharge coefficient analysis for triangular sharp-crested weirs using low-speed photographic technique. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, 140(3), 06013005.
- Bouhadji, L. (2002). Three dimensional numerical simulation of turbulent flow over spillways. *Asl-Aqflow Inc., Sidney, British Columbia, Canada*.
- Bos, M. G., Replogle, J. A., & Clemmens, A. J. (1986). *Flow measuring flumes for open channel systems*; International institute for land reclamation and improvement, Wageningen, The Netherlands, p. 40.
- Brinker, D. (2005). Boyd lake spillway – An innovative approach to using a labyrinth weir. *Proc. of the 2005 Dam Safety Conference, ASDSO*.
- British Standards Institution (BSI) (1995). *Thin-plate weirs and venture flumes in methods of measurement of liquid flow in open channel. Part 4A*. BSI 3680, London.
- Chandler, K., Gill, D., Maher, B., Macnish, S., & Roads, G. (2003, October). Coping with probable maximum flood-an alliance project delivery for Wivenhoe Dam. In *Proceedings of the 43rd ANCOLD conference, Hobart, Tasmania* (pp. 332-349).
- Chanel, P.G. (2008). *An evaluation of computational fluid dynamics for spillways modeling*. Thesis (MSC), University of Manitoba, Canada, pp. 11-23.
- Chanel, P. G., & Doering, J. C. (2007). An evaluation of Computational Fluid Dynamics for spillway modelling. *16th Australian Fluid Mechanics Conference*, (pp. 1201-1206). Gold Coast, Australia.
- Chanel, P. G., & Doering, J. C. (2008). Assessment of spillway modeling using computational fluid dynamics. *Canadian Journal of Civil Engineering*, 35(12), 1481-1485.

**PROGRAMA DE POSGRADO:**  
**DOCTORADO EN CIENCIAS Y TECNOLOGÍA DEL AGUA****“Análisis del comportamiento hidráulico del vertedor tipo laberinto mediante Dinámica de Fluidos Computacional (CFD)”**

- Cordero Page, D., García, V., & Nonot, C. (2007). Aliviaderos en laberinto. Presa de María Cristina. *Ingeniería Civil*, 146, 15-18.
- Courant, R., Isaacson, E., & Rees, M. (1952). On the solution of nonlinear hyperbolic differential equations by finite differences. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 5(3), 243-255.
- Crookston, B. M. (2010). *Labyrinth weirs*. Ph.D. Dissertation. Utah State University, Logan, Utah.
- Crookston, B. M., Paxson, G. S., & Savage, B. M. (2012, February). Hydraulic performance of labyrinth weirs for high headwater ratios. In *The 4th IAHR International Symposium on Hydraulic Structures, Porto, Portugal* (pp. 1-8).
- Crookston, B. M., & Tullis, B. P. (2012). Labyrinth weirs: Nappe interference and local submergence. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, 138(8), 757-765.
- Darvas, L. A. (1971). Discussion of performance and design of labyrinth weirs, by Hay and Taylor. *American Society of Civil Engineering, Journal of Hydraulic Engineering*, 97(80), 1246-1251.
- Delgado, G. (2009). *Obtención de los coeficientes de descarga de aliviaderos de laberinto según especificaciones de forma*. Tesis Mag. en Ingeniería. Caracas. Universidad Central de Venezuela, Fac. Ing. 5p, 101p.
- El-Hady, R. M. A. (2011). 2D-3D modeling of flow over sharp-crested weirs. *Journal of Applied Sciences Research*, 7, 2495-2505.
- Emiroglu, M. E., Kaya, N., and Agaccioglu, H. (2009). Discharge capacity of labyrinth side weir located on a straight channel. *Journal of irrigation and drainage engineering*, 136(1), 37-46.
- Falvey, H. T. (2003). *Hydraulic design of labyrinth weirs*. Reston, VA: ASCE Press (American Society of Civil Engineers).
- Fernández, J. M. (2012). *Técnicas numéricas en Ingeniería de Fluidos: Introducción a la Dinámica de Fluidos Computacional (CFD) por el Método de Volumen Finito*; Reverté, Barcelona; pp. 98-294.
- Flores, V. J.; López, C. I.; Mejía, S. E.; Montero, C. J. (2014). Evaluación del desempeño climático de un invernadero Baticenital del centro de México mediante Dinámica de Fluidos Computacional (CFD). *Agrociencia*, 48, 131-146.
- Gentilini, B. (1940). Stramazzi con cresta a planta obliqua ea zig-zag. *Memorie e Studi dell Istituto di Idraulica e Costruzioni Idrauliche del Regil Politecnico di Milano*, 48.
- Gentry, R. A., Martin, R. E., & Daly, B. J. (1966). An Eulerian differencing method for unsteady compressible flow problems. *Journal of computational Physics*, 1(1), 87-118.
- Granell, C., & Toledo, M. A. (2010). Los aliviaderos tipo laberinto. Un nuevo enfoque para su cálculo hidráulico. In *Congreso Internacional de Rehabilitación de Presas* (pp. 28-30).

**PROGRAMA DE POSGRADO:**  
**DOCTORADO EN CIENCIAS Y TECNOLOGÍA DEL AGUA****“Análisis del comportamiento hidráulico del vertedor tipo laberinto mediante Dinámica de Fluidos Computacional (CFD)”**

- Granell Ninot, C., Toledo Municio, M. Á., & Marinas, A. (2013). *Aliviaderos tipo laberinto y en tecla de piano*. España.
- Hay, N., & Taylor, G. (1970). Performance and design of labyrinth weirs. *Journal of the Hydraulics Division*, 96(11), 2337-2357
- Hinchliff, D., and Houston, K. (1984). Hydraulic design and application of labyrinth spillways. *Proc. of 4th Annual USCOLD Lecture*.
- Hirt, C. W., and Nichols, B. D. (1981). Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries. *Journal of computational physics*, 39(1), 201-225.
- Ho, D. K. H., Boyes, K. M., and Donohoo, S. M. (2001, December). Investigation of spillway behavior under increased maximum flood by computational fluid dynamics technique. In *14th Australasian Fluid Mechanics Conference*, Adelaide University, Adelaide, Australia.
- Ho, D.K.H., Boyes, K., Donohoo, S., and Cooper, B. (2003). Numerical Flow Analysis for Spillways. *Proc. 43rd ANCOLD Conference*, Hobart, Tasmania, 24-29 October.
- Ho, D. K. H., Cooper, B. W., Riddette, K. M., & Donohoo, S. M. (2006). Application of numerical modelling to spillways in Australia. *Dams and Reservoirs, Societies and environment in the 21st century-Berga et al*, 7.
- Ho, D. K. H., & Riddette, K. M. (2010). Application of computational fluid dynamics to evaluate hydraulic performance of spillways in Australia. *Australian Journal of Civil Engineering*, 6(1), 81-104.
- Houston, K. (1982). *Hydraulic model study of Ute Dam labyrinth spillway*. Report No. GR-82-7, U.S. Bureau of Reclamation, Denver.
- Houston, K. (1983). *Hydraulic model study of Hyrum Dam auxiliary labyrinth spillway*. Report No. GR-82-13, U.S. Bureau of Reclamation, Denver, Colorado.
- Indelkofer, H., & Rouve, G. (1975). Discharge over polygonal weirs. *Journal of the Hydraulics Division*, 101(ASCE 11178 Proc Paper).
- International Organization for Standardization (ISO) (1980). *Water flow measurement in open channels using weirs and venturi flumes. Part 1: Thin plate weirs*. ISO 1438/1-1980(E).
- Johnson, M. C. (1996). *Discharge coefficient scale effects analysis for weirs* (Doctoral dissertation, Utah State University. Department of Civil and Environmental Engineering).
- Johnson, M. C., & Savage, B. M. (2006). Physical and numerical comparison of flow over ogee spillway in the presence of tailwater. *Journal of hydraulic engineering*, 132(12), 1353-1357.
- Jones, W. P., & Launder, B. E. (1972). The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence. *International journal of heat and mass transfer*, 15(2), 301-314.

**PROGRAMA DE POSGRADO:**  
**DOCTORADO EN CIENCIAS Y TECNOLOGÍA DEL AGUA****“Análisis del comportamiento hidráulico del vertedor tipo laberinto mediante Dinámica de Fluidos Computacional (CFD)”**

- Kozák, M., & Sváb, J. (1961). Tort alaprojzú bukók laboratóriumi vizsgálata. *Hidrológiai Közlöny*, 5.
- Lauder, B. E., & Sharma, B. I. (1974). Application of the energy-dissipation model of turbulence to the calculation of flow near a spinning disc. *Letters in heat and mass transfer*, 1(2), 131-137.
- Lauder, B.E. y D.B. Spalding. (1974). The Numerical Computation of Turbulence Flow, *Comp. Meth. In Appl. Mech. And Engineering*, 3, 269-289.
- Lux III, F. (1984). Discharge characteristics of labyrinth weirs. In *Water for Resource Development* (pp. 385-389). ASCE.
- Lux, F., III (1989). Design and application of labyrinth weirs. *Design of hydraulic structures 89*, M. Alberson and R. Kia, eds., Balkema, Rotterdam, Netherlands, 205-215.
- Lux, F., III, and Hinchliff, D. (1985). Design and construction of labyrinth spillways. *15th Congress ICOLD, Vol. IV, Q59-R15*, ICOLD, París, 249-274.
- Magalhães, A., and Lorena, M. (1989). *Hydraulic design of labyrinth weirs*. Report No. 736, National Laboratory of Civil Engineering, Lisboa, Portugal.
- Mateos, C. (2000). La modelación física en las obras hidráulicas. *Ingeniería del agua*, 2000, vol. 7, núm. 1.
- Matthews, G. D. (1963). On the influence of curvature, surface tension and viscosity on flow over round-crested weirs. *Proceedings of the institution of civil engineers*, 25(4), 511-524.
- Melo, J., Ramos, C., and Magalhães, A. (2002). Descarregadores com soleira em labirinto de um ciclo em canais convergentes determinação da capacidade de vazão. In *Proc. 6º Congresso da Água*. Lisboa, Portugal.
- Morales, V., Tokyay, T. E., and Garcia, M. (2012). Numerical modeling of ogee crest spillway and tainter gate structure of a diversion dam on Canar River, Ecuador. In *XIX International Conference on Water Resources, University of Illinois at Urbana-Champaign*.
- Olsen, N. R., & Kjellesvig, H. M. (2010). Three-dimensional numerical flow modelling for estimation of spillway capacity. *Journal of Hydraulic Research*, 36(5), 775-784.
- Osuna A., (2000). Determinación del desagüe en un vertedor oblicuo. *Revista de Obras Públicas*. Año 147 (3.402).
- Patankar, S. (1980). *Numerical heat transfer and fluid flow*. Ed. Hemisphere.
- Paxson, G., & Savage, B. (2006). Labyrinth spillways: comparison of two popular USA design methods and consideration of non-standard approach conditions and geometries. In *International Junior Researcher and Engineer Workshop on Hydraulic Structures, Report CH61/06, Brisbane, Australia*.
- Reda, M. A. (2011). 2D-3D modeling of flow over sharp-crested weir. *Journal of Applied Sciences Research*, 7(12), 2495-2505.



**PROGRAMA DE POSGRADO:**  
**DOCTORADO EN CIENCIAS Y TECNOLOGÍA DEL AGUA****“Análisis del comportamiento hidráulico del vertedor tipo laberinto mediante Dinámica de Fluidos Computacional (CFD)”**

- Rouve, G., and Indlekofer, H. (1974). Abfluss über geradlinige wehre mit halbkreisförmigem überfallprofil. *Der Bauingenieur*, 49(7), 250-256.
- San Mauro, J., Salazar, F., Toledo Municio, M. A., Caballero, F. J., Ponce Farfán, C., & Ramos, T. (2016). Modelación física y numérica de aliviaderos en laberinto con fondo poliédrico. *Ingeniería del agua*, 20(3), 127-138.
- Sánchez, J. M. C., & Elsitdié, L. G. C. (2011). Consideraciones del mallado aplicadas al cálculo de flujos bifásicos con las técnicas de dinámica de fluidos computacional. *Jornadas de introducción a la investigación de la UPCT*, (4), 33-35.
- Santos, J. R., Valero, C., & Mendoza, K. (2015). Análisis experimental de coeficientes de descarga en vertederos trapezoidales de pared delgada—Parte I. *Yachana Revista Científica*, 4(2).
- Sartor, L. (2011). *Estudo sobre o comportamento Hidráulico de Vertedouros Labirinto*. Tese Mestre em Eng. Recur. Híd e Amb. Curitiba. Universidade Federal do Paraná, Departamento de Hidráulica e Saneamento. 97p.
- Savage, B. M., and Johnson, M. C. (2001). Flow over ogee spillway: Physical and numerical model case study. *Journal of hydraulic engineering*, 127(8), 640-649.
- Savage, B. M., Johnson, M. C., & Geldmacher, R. (2001). Comparison of physical versus Numerical Modeling of Flow over Spillways. In *ASDSO 2001 Annual Conference Proceedings*.
- Savage, B. M., Johnson, M. C., & Towler, B. (2009). Hydrodynamic forces on a spillway: can we calculate them? *Proceedings of the 2009 Annual Conference, Association of State Dam Safety Officials (ASDSO)*. Hollywood, FL, USA.
- Shih, T. H., Liou, W. W., Shabbir, A., Yang, Z., & Zhu, J. (1995). A new k- $\epsilon$  eddy viscosity model for high reynolds number turbulent flows. *Computers & Fluids*, 24(3), 227-238.
- Sotelo, G. 1997. *Hidráulica general*. Edit. Limusa-Noriega, México, 1997, p. 241.
- Spalding, D. B. (1972). A Novel Finite difference Formulation for Differential Expressions Involving Both First and Second Derivates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 4, pp. 551-559.
- Taylor, G. (1968). *The performance of labyrinth weirs*. Ph.D. thesis, University of Nottingham, Nottingham, England.
- Streeter, V. L., Wylie, E. B., Bedford, K. W., & Saldarriaga, J. G. (1988). *Mecánica de los fluidos* (No. QA901. S87 1971.). McGraw-Hill.
- Tullis, J. P., Amanian, N., and Waldron, D. (1995). Design of labyrinth spillways. *Journal of hydraulic engineering*, 121(3), 247-255.
- Tullis, B., and Young, J. (2005). Lake Brazos Dam model study of the existing spillway structure and a new labyrinth weir spillway structure. *Utah Water Research Laboratory, Logan, Utah*.

**PROGRAMA DE POSGRADO:**  
**DOCTORADO EN CIENCIAS Y TECNOLOGÍA DEL AGUA**

**“Análisis del comportamiento hidráulico del vertedor tipo laberinto mediante Dinámica de Fluidos Computacional (CFD)”**

- Tullis, B. P., Young, J. C., & Chandler, M. A. (2007). Head-discharge relationships for submerged labyrinth weirs. *Journal of Hydraulic Engineering*, 133(3), 248-254.
- Tullis, B., and Crookston, B. M. (2008). Lake Townsend Dam spillway hydraulic model study report. *Utah Water Research Laboratory, Logan, Utah*.
- United States Bureau of Reclamation (USBR). (2001). *Water measurement manual*, Denver, Colorado
- US Army Corps of Engineers Waterways Experiment Station (USACE-WES). (1952). Revised in subsequent years. *Corps of Engineers Hydraulic Design Criteria*.
- Villemonte, J. R. (1947). Submerged weir discharge studies. *Engineering news record*, 866, 54-57.
- Waldron, D. (1994). *Design of labyrinth spillways* (Doctoral dissertation, MS thesis, Utah State University, Logan, Utah).
- Willmore, C. (2004). *Hydraulic characteristics of labyrinth weirs*. M.S. report, Utah State University, Logan, Utah.
- White, F.M. (1979). *Mecánica de Fluidos*. Ed. McGraw Hill.
- Yang, J., & Hemstrom, B. (1998). CFD-a useful tool in spillway capacity determination. *WIT Transactions on Ecology and the Environment*, 26.
- Zamora, B., Vicente, P. G., & Sánchez, A. (2008). Notas sobre simulación numérica de flujos de fluidos. *Servicio de Publicaciones UPCT*.
- Zuhair al zubaidy, Riyadh. (2013) Numerical Simulation of Two-Phase Flow. En: *International Journal of Structural and Civil Engineering Research*. Vol 2, No 3; 13p

**PROGRAMA DE POSGRADO:**  
**DOCTORADO EN CIENCIAS Y TECNOLOGÍA DEL AGUA**

**“Análisis del comportamiento hidráulico del vertedor tipo laberinto mediante Dinámica de Fluidos Computacional (CFD)”**

# ANEXO

**PROGRAMA DE POSGRADO:  
DOCTORADO EN CIENCIAS Y TECNOLOGÍA DEL AGUA**

“Análisis del comportamiento hidráulico del vertedor tipo laberinto mediante Dinámica de Fluidos Computacional (CFD)”

**ANEXO I**

**CÓDIGO EN MATLAB PARA EL DISEÑO DEL VERTEDOR TIPO LABERINTO**

```
clear
clc

disp('-----')
disp('          DISEÑO DEL VERTEDOR TIPO LABERINTO          ')
disp('          INSTITUTO MEXICANO DE TECNOLOGÍA DEL AGUA          ')
disp('          DOCTORADO EN CIENCIA Y TECNOLOGÍA DEL AGUA          ')
disp('          BLOQUE I          ')
disp('          DATOS DE INICIO          ')
disp('-----')

Q_diseño=input('Gasto diseño:Qdiseño (m^3/s)=');
W=input('Ancho Canal:W (m)=');
P=input('Altura Vertedor:P (m)=');
HT=input('Carga Aguas Arriba:HT(m)=');
Hd=input('Carga Aguas Abajo:Hd(m)=');

disp('-----')
disp('          BLOQUE II          ')
disp('          DEFINICION DE ALFA Y EL NUMERO DE CICLOS          ')
disp('-----')
% RELACION DE CARGA DE AGUA-ALTURA
% Nota: 0.05<=HT/P<=0.8
%
R_HTP=HT/P;

% ANGULO DEL MURO LATERAL
% Nota: 6°<=alfa<=20°
%
fprintf('Relación carga-altura del vertedor: HT/P = %0.3f \n',R_HTP);
alfa=input('Ángulo pared: alfa(°)=');

% INESTABILIDAD
%
disp('-----C O N D I C I Ó N D E I N E S T A B I L I D A D -----')
')
if R_HTP<0.05 || R_HTP>0.8 || alfa<6 || alfa>20
    disp('E R R O R')
    if R_HTP<0.05 || R_HTP>0.8
        disp('CAMBIAR EL VALOR DE HT')
    elseif alfa<6 || alfa>20
        disp('CAMBIAR EL VALOR DE ALFA')
    end
    return
elseif R_HTP<0.4 && alfa<=20 || R_HTP<0.5 && alfa<=20 || R_HTP<0.6 &&
alfa<15 || R_HTP<=0.8 && alfa<12
    disp('EL FLUJO ES ESTABLE')
else
    disp('EL FLUJO ES INESTABLE')
```

**PROGRAMA DE POSGRADO:  
 DOCTORADO EN CIENCIAS Y TECNOLOGÍA DEL AGUA**

**“Análisis del comportamiento hidráulico del vertedor tipo laberinto mediante Dinámica de Fluidos Computacional (CFD)”**

```

return
end
% COEFICIENTE DE DESCARGA
%
% Coeficientes
a=42.99+48.93*cos(alfa*0.1926)-
24.14*sin(alfa*0.1926)+7.606*cos(2*alfa*0.1926)-15.95*sin(2*alfa*0.1926);
b=-61.88-65.87*cos(alfa*0.2241)-4.273*sin(alfa*0.2241)-
22.5*cos(2*alfa*0.2241)+5.11*sin(2*alfa*0.2241);
c=47.39+36.05*cos(alfa*0.2408)+14.27*sin(alfa*0.2408)+13.57*cos(2*alfa*0.
2408)+3.893*sin(2*alfa*0.2408);
d=-20.19-11.21*cos(alfa*0.2396)-4.43*sin(alfa*0.2396)-
4.327*cos(2*alfa*0.2396)-1.013*sin(2*alfa*0.2396);
e=3.853+2.084*cos(alfa*0.2076)-
0.7578*sin(alfa*0.2076)+0.5083*cos(2*alfa*0.2076)-
0.7128*sin(2*alfa*0.2076);
f=-5.158e-5*alfa^4+2.591e-3*alfa^3-4.62e-2*alfa^2+0.3487*alfa-0.3085;

Cd(alfa)=a*R_HTP^5+b*R_HTP^4+c*R_HTP^3+d*R_HTP^2+e*R_HTP+f;
fprintf('Coeficiente de descarga del vertedor tipo laberinto: Cd(alfa) =
%0.3f \n',Cd(alfa));

% ANCHO DEL CICLO
%
w=3*P; % en m

% NUMERO DE CICLOS
%
N=round(W/w);
fprintf('Numero de ciclos: N = %0.3f \n',N);

% NUEVO VALOR DEL ANCHO DEL CICLO
%
wN=W/N;
fprintf('Ancho del ciclo:w = %0.3f m\n',wN);

% RELACION ANCHO DEL CICLO
% Nota: 2<=R_wP<=4
%
R_wP=wN/P;
fprintf('Relacion ancho del ciclo-altura del vertedor: w/P = %0.3f
\n',R_wP);

% ¿CAMBIAR NUMERO DE CICLOS?
%
disp('----- ¿C A M B I A R   N Ú M E R O   D E   C I C L O S? -----
')
if R_wP>4

while R_wP>4
    disp('AUMENTAR CICLOS')
    disp('Nota: Múltiplo de 0.5')

```

**PROGRAMA DE POSGRADO:**  
**DOCTORADO EN CIENCIAS Y TECNOLOGÍA DEL AGUA**

**“Análisis del comportamiento hidráulico del vertedor tipo laberinto mediante Dinámica de Fluidos Computacional (CFD)”**

```

N=input('Nuevo número de ciclos=')
wN=W/N;
R_wP=wN/P;
end
wN=W/N;
fprintf('Ancho del ciclo:w = %0.3f m\n',wN);
R_wP=wN/P;
fprintf('Relacion ancho del ciclo-altura del vertedor: w/P = %0.3f
\n',R_wP);
elseif R_wP<2

while R_wP<2
disp('DISMINUIR CICLOS')
disp('Nota: Multiplo de 0.5')
N=input('Nuevo número de ciclos=')
wN=W/N;
R_wP=wN/P;
end
wN=W/N;
fprintf('Ancho del ciclo:w = %0.3f m\n',wN);
R_wP=wN/P;
fprintf('Relacion ancho del ciclo-altura del vertedor: w/P = %0.3f
\n',R_wP);
else
disp('MANTENER EL NÚMERO DE CICLOS')
end
% CONDICIONES DE AIREACION
%
disp('-----C O N D I C I Ó N D E A I R E A C I Ó N -----')
if alfa==6 && R_HTP<0.165 || alfa<=8 && R_HTP<0.2 || alfa<=10 &&
R_HTP<0.265 || alfa<=12 && R_HTP<0.3 || alfa<=15 && R_HTP<0.325 ||
alfa<=20 && R_HTP<0.45
disp('FLUJO ADHERIDO')
elseif alfa==6 && R_HTP<0.27 || alfa<=8 && R_HTP<0.35 || alfa<=10 &&
R_HTP<0.35 || alfa<=12 && R_HTP<0.41 || alfa<=15 && R_HTP<0.4 || alfa<=20
&& R_HTP<0.5
disp('FLUJO AIREADO')
elseif alfa==6 && R_HTP<0.487 || alfa<=8 && R_HTP<0.5 || alfa<=10 &&
R_HTP<0.54 || alfa<=12 && R_HTP<0.55 || alfa<=15 && R_HTP<0.6 || alfa<=20
&& R_HTP<0.6
disp('FLUJO PARCIALMENTE AIREADO')
elseif alfa==6 && R_HTP>=0.487 || alfa<=8 && R_HTP>=0.5 || alfa<=10 &&
R_HTP>=0.54 || alfa<=12 && R_HTP>=0.55 || alfa<=15 && R_HTP>=0.6 ||
alfa<=20 && R_HTP>=0.6
disp('FLUJO AHOGADO')
else
disp('E R R O R')
end

disp('-----')
disp(' BLOQUE III ')
disp(' CÁLCULO DE VARIABLES GEOMÉTRICAS, EFICIENCIA DEL CICLO Y DEL
VERTEDOR ')

```

**PROGRAMA DE POSGRADO:**  
**DOCTORADO EN CIENCIAS Y TECNOLOGÍA DEL AGUA**

**“Análisis del comportamiento hidráulico del vertedor tipo laberinto mediante Dinámica de Fluidos Computacional (CFD)”**

```

disp('-----')
% LONGITUD TOTAL
%
Lc=1.5*Q_diseño/(Cd(alfa)*HT^1.5*(2*9.81)^0.5);
fprintf('Longitud total: Lc = %0.3f m\n',Lc);

% ESPESOR DE LA PARED
%
tw=P/8;
fprintf('Espesor de pared: tw = %0.3f m\n',tw);

% CUERDA INTERNA DEL APICE
%
C_int=tw;
fprintf('Cuerda interna del ápice: C_int = %0.3f m\n',C_int);

% ARCO INTERNO DEL APICE
%
arc_int=tw*pi()*(90-alfa)/(180*cos(alfa*pi()/180));
fprintf('Arco interno del ápice: Arc_int = %0.3f m\n',arc_int);

% ARCO EXTERNO DEL APICE
%
arc_ext=tw*pi()*(2*cos(alfa*pi()/180+1))*(90-
alfa)/(180*cos(alfa*pi()/180));
fprintf('Arco Externo externo del ápice: Arc_ext = %0.3f m\n',arc_ext);

% LONGITUD DEL MURO LATERAL
%
lc=Lc/(2*N)-(arc_int+arc_ext)/2;
fprintf('Longitud del muro lateral: lc = %0.3f m\n',lc);

% LONGITUD ENTRE APICES
%
B=lc*cos(alfa*pi()/180)+2*tw+tw*(1-
sin(alfa*pi()/180)*(1+cos(alfa*pi()/180)))/cos(alfa*pi()/180);
fprintf('Longitud entre ápices: B = %0.3f m\n',B);

% LONGITUD DE INTERFERENCIA DE LAMINAS
%
% Coeficientes
m=1.284e-4*alfa^4-6.583e-3*alfa^3+0.1148*alfa^2-0.7643*alfa+1.978;
n=-1.095e-4*alfa^4+5.648e-3*alfa^3-0.0999*alfa^2+0.7216*alfa-1.781;
o=6.004e-6*alfa^4-3.349e-4*alfa^3+0.0063*alfa^2-0.0455*alfa+0.1101;

B_int=B*(m*R_HTP^2+n*R_HTP+o);
fprintf('Longitud de interferencia de láminas: B_int = %0.3f
m\n',B_int);

% RELACION DE MAGNIFICACION
%

```

**PROGRAMA DE POSGRADO:**  
**DOCTORADO EN CIENCIAS Y TECNOLOGÍA DEL AGUA**

**“Análisis del comportamiento hidráulico del vertedor tipo laberinto mediante Dinámica de Fluidos Computacional (CFD)”**

```

M=Lc/ (w*N) ;

% EFICIENCIA DEL CICLO
%
efic_C=Cd(alfa)*lc/w;
fprintf('Eficiencia del ciclo: E" = %0.3f \n',efic_C);

% COEFICIENTE DE DESCARGA DEL VERTEDOR LINEAL
%
Cd(90)=1/(-8.609+22.65*R_HTP+1.812/R_HTP)+0.6375;

% EFICIENCIA DEL VERTEDOR
%
efic_V=Cd(alfa)/Cd(90)*Lc/W;
fprintf('Eficiencia del vertedor: E´ = %0.3f \n',efic_V);

disp('-----')
disp('                Bloque IV                ')
disp('      A H O G A M I E N T O   (Tullis et al., 2007)   ')
disp('-----')
% Relación cargas Aguas abajo/aguas arriba sin ahogamiento
%
Hd_HT=Hd/HT;
fprintf('Relación cargas Aguas abajo/aguas arriba sin ahogamiento: Hd/HT=
%0.3f \n',Hd_HT);

% Carga total aguas arriba ahogada
%
if Hd_HT<0
    disp('E R R O R')
elseif Hd_HT<=1.53
    H_=HT*(0.332*Hd_HT^4+0.2008*Hd_HT^2+1);
    fprintf('Carga total aguas arriba ahogada: H*= %0.3f m\n',H_);
elseif Hd_HT<=3.5
    H_=HT*(0.9379*Hd_HT+0.2174);
    fprintf('Carga total aguas arriba ahogada: H*= %0.3f m\n',H_);
elseif Hd_HT>3.5
    H_=Hd;
    fprintf('Carga total aguas arriba ahogada: H*= %0.3f m\n',H_);
    disp('E R R O R')
end

% Nivel de ahogamiento
%
S=Hd/H_;
fprintf('Nivel de ahogamiento:S = %0.3f \n',S);

% Coeficiente de descarga del vertedor ahogado
Cd_ahog=Cd(alfa)*(HT/H_)^1.5;
fprintf('Coeficiente de descarga del vertedor ahogado: Cd_ahog = %0.3f
\n',Cd_ahog);

```



# Hydraulic analysis of a compound weir (triangular-rectangular) simulated with Computational Fluid Dynamics (CFD)

Erick Mattos<sup>1</sup>, Jorge Flores-Velázquez<sup>2\*</sup>, Waldo Ojeda<sup>2</sup>, Mauro Íñiguez<sup>2</sup>, Carlos Díaz<sup>3</sup> and Humberto Salinas<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Postgraduate in Science and Technology of Water. Mexican Institute of Water Technology, Avenue Cuauhnáhuac No. 8532, Colony Progreso, Jiutepec, State of Morelos, Mexico. C.P. 62550; e\_mattos\_@outlook.com

<sup>2</sup> Coordination of Irrigation and Drainage. Mexican Institute of Water Technology, Avenue Cuauhnáhuac No. 8532, Colony Progreso, Jiutepec, State of Morelos, Mexico. C.P. 62550; jorge\_flores@tlaloc.imta.mx, wojeda@tlaloc.imta.mx, mic@tlaloc.imta.mx

<sup>3</sup> Inter-American Insititute of Water Sciences and Tecnology, Autonomous University of the State of Mexico, Autonomous University of the State of Mexico, Road Toluca Atlacomulco km 14.5, Unit San Cayetano, C.P. 50200, Toluca, State of Mexico, Mexico; cdiaz@uaemex.mx, hsalinas@uaemex.mx

\* Corresponding author: jorge\_flores@tlaloc.imta.mx; Tel+52(777) 329-3600.

Received: date; Accepted: date; Published: date

**Abstract:** The purpose of making efficient delivery of water to users in irrigational areas required accuracy dispositive to measure flow rates; among the devices used for this purpose, exist triangular and rectangular geometry weirs, for flow rates ranges between  $30 \text{ l s}^{-1}$  and  $200 \text{ l s}^{-1}$  respectively. Both weirs are commonly used individually depending flow rate. However, the variation of flows in the execution of an agricultural year can be a factor of error in the volumetric delivery. ANSYS Fluent was the software to simulate flow fluids in triangular and rectangular weirs. After that was built a numerical compound weir in order to analyze the hydraulics behavior under specific conditions. The aim of this study was to analyze the hydraulic characteristics such as, geometric and flow parameters of a compound weir, evaluated with laboratory observations, analytical equations and CFD simulation. The CFD simulations showed strong statistical agreement between numerical and experimental values. Up to 0.74% error was obtained between experimental and simulation flow. Difference in pressures and velocities during the discharge. A depression located in the free surface of the triangular zone and a nappe thicker than the rest of the crest of the weir, it was also possible to find the effect of the length of the rectangular section in the discharge coefficient.

**Keywords:** Weir; Computational Fluid Dynamics (CFD), numerical simulation; gauging; discharge coefficient

## 1. Introduction

The effect on the conservational and efficient use of water resources now has an impact on improving water management. One of the components of integrated water management is the ability to accurately measure and control water flow at specific points in a basin or in a distribution system, such as: channel bifurcations, control structures, and water delivery points. An efficient water measuring system allows accurate accounting of water use, and the supply of water at optimal rates to areas of demand [1] (p. 17). Several types of structures can be used for flow gauging: weirs, Parshall gauges, gates, orifices, among others [2] (pp. 71-95).

Weirs are elevated barriers located perpendicular to the direction of water movement so that water rises above the obstruction through an opening on a regular basis [3]. The geometric parameters defining the hydraulic behavior of weirs are the length of the ridge and the shape of the

flow control section [4,5]. Thin-walled weirs are studied using the principles of classical physics with experimental results to understand flow characteristics and determine the coefficient of discharge ( $C_d$ ) under different configurations; this coefficient integrates the effects not considered in the derivation of equations used to estimate discharge, such as viscosity, capillarity, surface tension, velocity distribution and aerodynamic curvature attributable to weir contraction [6,7].

Design Specifications and proper installation of weirs have been documented by the British Standards Institute [8], the International Standardization Organization [9], the American Society for Testing Materials [10] and the United States Bureau of Reclamation [5]. Normally, the measurement accuracy of the flow rate depends of geometry of weir; in areas with unevenness, triangular weirs are recommended for flow rates lower than  $30 \text{ l s}^{-1}$  for its greater precision for small discharges, and for higher flow rates rectangular weirs are used [11] (p. 253).

Shen [12] (pp. 7-15) described the procedure for designing sharp-crest triangular weirs supported by experimental results to determine the coefficient of discharge reported in the literature. El-Alfy [13] experimentally evaluated the effect of the vertical flow curvature on the coefficient of discharge ( $C_d$ ), in triangular weirs, indicating that it is inversely proportional to the angle of the weir notch ( $\theta$ ) and directly proportional to the relative load ( $h/P$ ). Bagheri and Heidarpour [14] obtained a discharge coefficient equation for thin-walled rectangular weirs at the top and bottom of the sheet profiles using the free vortex theory. Bautista *et al.* [3] used a low speed photographic technique to characterize the upper and lower profiles of the flow draft on a triangular weir. Chen *et al.* [15] analyzed the effects of variation of the slope coefficient on the discharge coefficient for rectangular weirs short-crest. Fu *et al.* [16] proposed an equation to determine the discharge coefficient in structures of the orifice-weir type. Tian *et al.* [17] investigated the flow pattern and discharge coefficient at finite crest length combined with parallel walls with flared entry (FGPs) on the crest of the weir.

It has been reported that the use of compound weirs combining triangular and rectangular shapes for flow measurement [18]. Abdel-Azim *et al.* [19] proposed a structure composed of an upper rectangular weir with a lower gate in order to avoid the accumulation of sediments upstream of the structure. Another type of compound weir consists of a rectangular notch with a triangular notch in the center of the rectangular crest; the triangular weir could accurately measure the normal range of flows less than  $30 \text{ l s}^{-1}$ , but larger flows can also be measured by operating the rectangular weir [5]. In irrigation channels with variability of discharge, the use of compound weirs is recommended to avoid the use of separate structures, which can represent the variability of flow with greater precision; to meet this need, weir structures described in this document play a key role in irrigation zones.

Numerical simulation techniques have been used to solve Fluid Mechanics problems, particularly with the use of general solution tools generically called Computational Fluid Dynamics (CFD). Advances in computer storage and processing capacity allowed the process of creating and fitting a CFD model to evolve and facilitate the analysis of results, both in time and cost. In particular, CFD techniques numerically solve the governing equations of the flow, such as the Navier-Stokes equations, and offer the possibility of hydraulically evaluating a weir under different geometries and hydraulic conditions; once validated and evaluated, CFD allows the extraction of additional information, such as: forces, velocity fields and pressures. Several studies have shown the advantages of CFD techniques Ho *et al.* [20, 21] compared numerical results from a Creager crest weir and reported results very similar to experimental studies using physical models. Reda [22] reported a maximum deviation of  $\pm 3\%$  when comparing the coefficient of discharge of a thin-walled rectangular weir obtained numerically with CFD versus, those calculated with the general weir equation. Zuhair [23] compared the CFD results, using the VOF (Volume Of Fluid) model, with the experimental data of a prototype of the Mandali weir, the results indicate that the flow profile obtained with CFD fits

with correlation close to 1 to the experimental results; therefore the CFD methodology constitutes a tool for the solution of Fluid Mechanics problems.

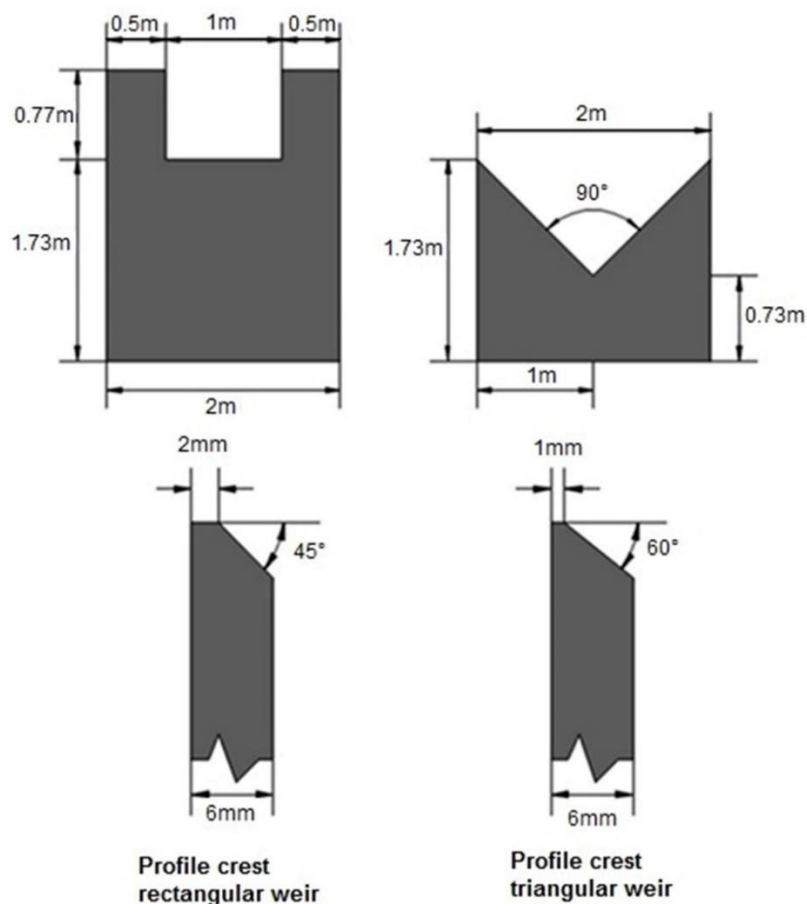
Representation of physics free surface phenomena, in the experimental or analytical models, represent one of the most difficulties in this area. CFD simulation can be an excellent option in order to investigate modeling on weirs and simulate numerical flow and tracking in detail of the free surface. In analyzing this problem, the use of CFD has been reported, in particular the computational platform ANSYS-FLUENT, known for its ability to accurately track the free surface using the Volume Of Fluid (VOF) method [24].

The aim of this work was to build and evaluate a numerical model of a compound weir using Computational Fluid Dynamics (CFD); the numerical simulation of compound weirs will facilitate the understanding of its hydraulic behavior, which depends on the geometric characteristics of the weir, its hydraulics conditions and the estimated discharge coefficient.

## 2. Materials and methods

### 2.1. Reference Prototype model

Experimental data and prototype models used are reported by Sotelo [11] (p.272), to using rectangular and triangular weir thin-walled, and Jan et al. [25] in compound weirs. Figure 1 shows the geometric dimensions of the rectangular and triangular weirs, both weirs are independent in a channel with a hydraulic load of 0.27 m for the rectangular weir, and 0.50 m for the triangular weir. Both weirs are sharp-crest for the operation, and for the simulation standard wall value were used [2].



**Figure 1.** Dimensions of the rectangular and triangular prototype weir. [11,2].

## 2.2. Analytic Weir equations

Experimental and analytical studies were performance on the flow behavior upstream and downstream of the weir, for instance, upstream near the weir there is a speed varied movement and present a backwater of depression originating the transformation of potential energy into kinetic energy, there is a zone of stagnation of the water called dead water. Upstream of the weir, there is a gradually-varied flows; this area is up to a distance of  $4h$ ,  $h$  being the static charge on the crest of the weir [11] (pp. 241-276).

Equation 1 shows the general form that allows obtaining the fluid flow through a weir [26] (p. 41).

$$Q = k h^n \quad (1)$$

Where:  $Q$  = flow [ $m^3 s^{-1}$ ],  $k$  = coefficient depending on the dimensions and shape of the weir ( $[m^{1.5} s^{-1}]$  for a rectangular weir,  $[m^{0.5} s^{-1}]$  for a triangular weir) and  $n$  = dimensionless number depending on the shape of the weir; for a rectangular and triangular weir  $n$  is equal to 1.5 and 2.5, respectively [26] (p. 41)

For Henderson [27] (pp. 269-277) the discharge equation for a rectangular weir can be simplified as (Eq. 2):

$$Q = \frac{2}{3} C_d (2g)^{0.5} b h^{1.5} \quad (2)$$

Where:  $C_d$  is the coefficient of discharge [dimensionless],  $b$  the length of the weir crest [m],  $g$  the acceleration of gravity [ $m s^{-2}$ ] and  $h$  is the static load on the weir crest [m]. The coefficient of discharge depends on the flow characteristics and geometry of the channel and weir [28].

The triangular section weirs are recommended for the gauging of flow rates less than  $30 l s^{-1}$  and loads from 6 cm to 60 cm; their precision is better than that of a rectangular weir for small flows. For larger discharges a rectangular weir is recommended, because the triangular weir is more sensitive to any change in roughness of the plate and also because it requires greater accuracy in the measurement of loads. The flow equation for the triangular weir is Eq. 3 [11] (p. 251):

$$Q = \frac{8}{15} C_d (2g)^{0.5} \tan \theta / 2 h^{2.5} \quad (3)$$

Where  $\theta$  is the angle of the notch of the triangular section [ $^\circ$ ].

The discharge coefficients are calculated with equation 4 for the rectangular weir and equation 5 for the case of a triangular weir whose notch angle,  $\theta$ , is  $90^\circ$  [11] (pp. 246, 252).

$$C_d = \left[ 0.6075 - 0.045 \frac{(B-b)}{B} + \frac{0.0041}{h} \right] \left[ 1 + 0.55 \left( \frac{b}{B} \right)^2 \left( \frac{h}{h+P} \right)^2 \right] \quad (4)$$

$$C_d = \left( 0.5812 + \frac{0.00375}{h} \right) \left\{ \left[ 1 + \left[ \frac{h^3}{B(h+P)} \right]^2 \right] \right\} \quad (5)$$

Where:  $B$  is channel width [m],  $b$  the length of the rectangular weir [m],  $P$  the height of the weir [m],  $h$  the static load on the weir [m] and  $C_d$  the coefficient of discharge [dimensionless].

Figure 2 show the compound weirs with rectangular and triangular sections. The discharge equation can be derived using the linear combination method, according to Jan *et al.* [25], and is expressed with the Eq. 6:

$$Q = \frac{8}{15} C_{dt} (2g)^{0.5} \tan \theta / 2 (h_2^{2.5} - h_1^{2.5}) + \frac{2}{3} C_{dr} (2g)^{0.5} (2b_1) h_1^{1.5} \quad (6)$$

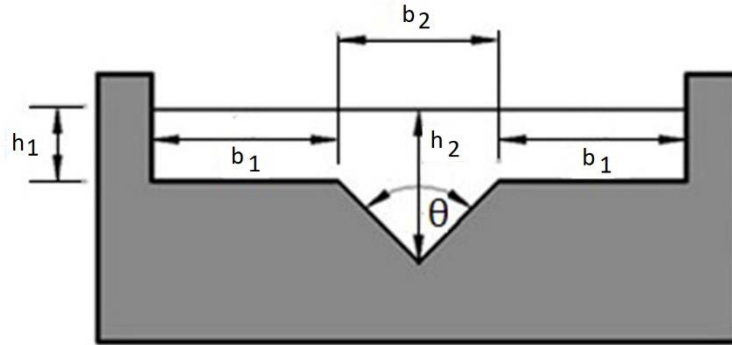


Figure 2. Models characteristics in a (A) Triangular weir and extend (B) compound weir.

The compound weir Equation (Eq. 6) contain two basic terms; first one is the discharge of the triangular section  $\left[ \frac{8}{15} C_{dt} (2g)^{0.5} \tan \theta / 2 (h_2^{2.5} - h_1^{2.5}) \right]$ , and second one correspond to the discharge of the rectangular section  $\left[ \frac{2}{3} C_{dr} (2g)^{0.5} (2b_1) h_1^{1.5} \right]$ ,  $C_{dt}$  is the coefficient of discharge of the triangular section [dimensionless],  $C_{dr}$  is the coefficient of discharge of the rectangular section [dimensionless],  $b_1$  is the width of the rectangular weir [m].  $h_1$  and  $h_2$  the static load on the rectangular and triangular section [m] respectively.

The value of  $C_{dt}$  can be estimated using the empirical relationship [25] Eq. 7:

$$C_{dt} = 0.6085 - 0.0525\theta + 0.02135\theta^2 \quad (7)$$

The value of  $C_{dr}$  depends on load  $h_1$  [m], crest height  $P$  [m], length of rectangular section  $b$  [m] and width of channel  $B$  [m], it is described as Eq. 8 [25]:

$$C_{dr} = \frac{0.611 + 2.23 \left( \frac{B}{2b_1} - 1 \right)^{0.7}}{1 + 3.8 \left( \frac{B}{2b_1} - 1 \right)^{0.7}} + \frac{0.075 + 0.011 \left( \frac{B}{2b_1} - 1 \right)^{1.46}}{1 + 4.8 \left( \frac{B}{2b_1} - 1 \right)^{1.46}} \frac{h_1}{P} \quad (8)$$

It should be clarified that the  $C_d$  values of equations 4 and 5 are different from  $C_{dr}$  and  $C_{dt}$  of equations 7 and 8, the latter correspond to a compound weir of rectangular and triangular sections.

The results and experimental data reported by Sotelo [11] (p.272) for the rectangular and triangular weirs are summarized in Table 1.

Table 1. Results and experimental data of the rectangular and triangular weirs reported by Sotelo [11] (page 272).

Weir	Hydraulic load h (m)	Coefficient of discharge $C_d$	Flow rates Q (ls <sup>-1</sup> )
Rectangular	0.27	0.602	249
Triangular	0.50	0.590	246

On the other hand, for the weir with combined triangular-rectangular section Jan *et al.* [25] reported experimental results of discharge for three cases of weirs of different width of the rectangular section ( $b_1$ ) and different flow rates ( $Q$ ); Table 2 show the experimental conditions and the results obtained.

**Table 2.** Experimental conditions and results of the compound weir reported by Jan *et al.* [25].

$\theta$ (°)	Channel width (m)	$b_1$ (m)	$b_2$ (m)	$h_1$ (m)	$h_2$ (m)	$C_{dr}$	$C_{dt}$	Analytical flow rates $Q$ (l s <sup>-1</sup> )	Experimental flow rates $Q$ (l s <sup>-1</sup> )
90	1.49	0.25	0.20	0.013	0.113	0.590	0.579	7.13	8.06
90	1.49	0.25	0.20	0.031	0.131	0.591	0.579	13.02	14.36
90	1.49	0.25	0.20	0.036	0.136	0.591	0.579	14.95	16.33
90	1.49	0.40	0.20	0.022	0.122	0.594	0.579	11.59	13.35
90	1.49	0.40	0.20	0.041	0.141	0.595	0.579	21.41	23.35
90	1.49	0.40	0.20	0.069	0.169	0.597	0.579	39.90	45.50
90	1.49	0.50	0.20	0.01	0.110	0.595	0.579	7.23	8.06
90	1.49	0.50	0.20	0.023	0.123	0.597	0.579	13.30	14.36
90	1.49	0.50	0.20	0.027	0.127	0.598	0.579	15.53	16.33

### 2.3. Computational Fluid Dynamics (CFD) modeling

ANSYS WORKBENCH V14.5 was used to perform the simulations. CFD is a numerical tool that predicts the behavior of a fluid by solving the general transport equations, also called Navier-Stokes (NS) equations. Because there is no analytical solution, CFD uses several numerical methods, ANSYS WORKBENCH uses the Finite Volume Method (FVM), which divides the domain into a finite number of cells over which discrete conservation of the variable is imposed.

#### 2.3.1. General Equations and sub models

Equation 9 is the differential form of the mass equation balance for incompressible flow (constant density), where  $\frac{\partial U_i}{\partial x_i}$  represents the velocity variation.

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \quad (9)$$

Regarding the incompressible fluid, the momentum differential equation is shown as (Eq. 10):

$$\frac{\partial(\rho U)}{\partial t} + \nabla(\rho U U) = \nabla(\mu \nabla U) - \nabla p + \rho f \quad (10)$$

$\rho$  [kg m<sup>-3</sup>] is the density of the fluid,  $U$  [m s<sup>-1</sup>] is the velocity field,  $f$  [N kg<sup>-1</sup>] are the forces of the body per unit mass,  $p$  [N m<sup>-2</sup>] is dynamic pressure,  $\mu$  [kg m<sup>-1</sup> s<sup>-1</sup>] dynamic viscosity (0.001 kg m<sup>-1</sup> s<sup>-1</sup> for 20 °C).

The Volume Of Fluid (VOF) model is a surface tracking technique by defining calculation cells that can be empty, partially filled, or full of fluid. It was reported by Hirt and Nichols [29] and is based on a concept that the volume occupied by one material cannot be occupied by the other. For each additional phase added to the model, a new variable is introduced: the volume fraction of the

phase in the computational cell. In each control volume, the volume fractions of all phases conforms the unit. The volume fraction of the fluid  $q^{\text{th}}$  in the cell is denoted as  $\alpha_q$ , then the following three conditions are possible: if  $\alpha_q = 0$  the cell is empty of fluid  $q^{\text{th}}$ , if  $\alpha_q = 1$  the cell is full of fluid  $q^{\text{th}}$  and if  $0 < \alpha_q < 1$  the cell contains the interface between the fluid  $q^{\text{th}}$  and the rest of the fluids.

The follow-up of the interface between phases is carried out by the solution of the continuity equation, equation 11, for the volume fraction of one (or more) of the phases. For the  $q^{\text{th}}$  phase this equation has the following form [29]:

$$\frac{1}{\rho_q} \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\alpha_q \rho_q) + \nabla \cdot (\alpha_q \rho_q \mathbf{v}_q) \right] = S_{\alpha_q} + \sum_{p=1}^n (\dot{\mathbf{m}}_{pq} - \dot{\mathbf{m}}_{qp}) \quad (11)$$

Where:  $\rho_q$  is the density of the phase  $q$  [ $\text{kg m}^{-3}$ ],  $\mathbf{v}_q$  is the velocity of the phase  $q$  [ $\text{m s}^{-1}$ ],  $S_{\alpha_q}$  is the term source of the equation [ $\text{kg m}^{-2} \text{s}^{-2}$ ],  $\dot{\mathbf{m}}_{pq}$  the mass transfer from phase  $p$  to phase  $q$  [ $\text{kg s}^{-1}$ ] and  $\dot{\mathbf{m}}_{qp}$  the mass transfer from phase  $q$  to phase  $p$  [ $\text{kg s}^{-1}$ ].

The turbulence model K- $\epsilon$  is a semi-empirical model based on the transport equations for turbulent energy (K) and for the dispersion of turbulent kinetic energy ( $\epsilon$ ). In obtaining this model, it is assumed that the turbulent flow is fully developed and that the effects of molecular viscosity are neglected [30], parameters  $k$  [ $\text{m}^2 \text{s}^{-2}$ ] and  $\epsilon$  [ $\text{m}^2 \text{s}^{-3}$ ] are obtained from the following equations:

Turbulent kinetic energy (K) (Eq. 12):

$$\frac{\partial(\rho K)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U_j K)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\partial \mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial K}{\partial x_j} \right] + P_k - \rho \epsilon + P_{kb} \quad (12)$$

Dispersion of turbulent kinetic energy ( $\epsilon$ ) (Eq. 13):

$$\frac{\partial(\rho \epsilon)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U_j \epsilon)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\partial \mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right] + \frac{\epsilon}{K} (C_{1\epsilon} P_k + C_{2\epsilon} \rho \epsilon + C_{1\epsilon} P_{\epsilon b}) \quad (13)$$

$\mu_t$  is the turbulent viscosity [ $\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-1}$ ] and it is shown as (Eq. 14):

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{K^2}{\epsilon} \quad (14)$$

Where  $C_\mu$ ,  $C_{1\epsilon}$ ,  $C_{2\epsilon}$ ,  $\sigma_k$  and  $\sigma_\epsilon$  are constant, values used by default [31]

$P_{kb}$  and  $P_{\epsilon b}$  represents the influence of floatability force.  $P_k$  is the turbulent generation due to the viscous force [ $\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-3}$ ], as shown below (Eq. 15):

$$P_k = \mu_t \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \left( \mu_t \frac{\partial U_k}{\partial x_{kk}} + \rho K \right) \quad (15)$$

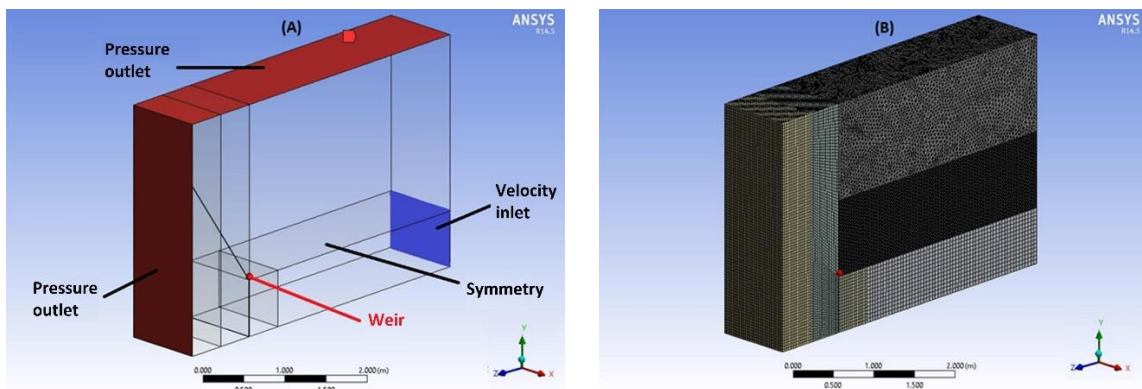
The values of the coefficients  $C_\mu$ ,  $C_{1\epsilon}$ ,  $C_{2\epsilon}$ ,  $\sigma_k$  and  $\sigma_\epsilon$  were adjusted by Launder & Spalding, [31], which are shown as follows:  $C_\mu = 0.09$ ,  $C_{1\epsilon} = 1.44$ ,  $C_{2\epsilon} = 1.92$ ,  $\sigma_\epsilon = 1.3$ ,  $\sigma_k = 1.0$ .

### 2.3.2. Numerical CFD simulation

Numerical simulation and solution using CFD contemplates three basic steps: i) Preprocess, ii) Process and iii) Post-process. This a sequential activities, quality and results depend of each one its activities. In this case were:

The first step consists of digital generation as a solid of the construction of the physical model under study (Figure 3A). Geometry module was used to performance the numerical model. The characteristics of numerical model are based in a prototype triangular, rectangular and compound model. Jan et al. [28] and Sotelo [11] do not mention the slope of the channel on which the tests were carried out; it was assumed that the slope is totally horizontal and the flow gradually varied, so that the discharge coefficient is not affected by the slope of the channel.

After the generation of geometry, the domain is divided into a sufficient number of cells or elements that do not overlap and cover all the geometry, where general conservation equations were applied. Meshing module, was used to generate mesh in the model, the type of mesh defines not only the quality of the results but also the degree of detail of the results and the computational calculation time. For spatial discretization, it was decided to employ a predominantly hexahedral mesh (Figure 3-B); among the advantages of hexahedral meshing is the reduction of the number of domain elements and the improvement of the convergence of the solution [32].



**Figure 3.** (A) Boundary conditions, and (B) Mesh characteristics.

Boundary conditions of the computational model were established (Table 3). In order to analyze compound weirs, computational model is a three-dimensional geometry. Boundary condition were defined according the condition. The condition of symmetry is considered in the perpendicular side planes to the axis of the weir. Inlet condition is the water inlet flow and the position is 2 times the width of the channel [33] (p. 40), to get that the hydraulic load is not affected by this condition. The flow is imposed in the upstream approach conditions, the most common entry condition, in free flow channels, is the average velocity of the flow (Velocity inlet), obtained from the continuity equation. In the vertical plane downstream of the weir is assigned as the free exit of the flow to the atmosphere, the exit condition is the atmospheric pressure (Pressure outlet). The walls of the channel and the weir are considered as stationary and non-slip walls with roughness equal to  $1.5 \cdot 10^{-6}$  meters (Figure 3-A).

The basis of an adjusted and adequate development to the physical conditions of a computational model is the numerical scheme that approximately solves the equations that describe the flow. Because it is a two-phase (water-air) and free surface flow, it is assigned to the multiphase VOF model and the turbulence K- $\epsilon$  model because it is the most complete simple method with the lowest computational cost to simulate turbulence demonstrating its advantage in confined and internal flows [34] (p. 294) and in free surface flows [35-38].



The pressure-velocity coupling the SIMPLE algorithm was used (Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations), it approaches convergence through a series of intermediate fields of pressure and velocity which satisfies continuity [34] (p. 184). The use of the "Upwind" spatial discretization system ensures stable schemes but its first-order characteristic makes it sensitive to numerical diffusion errors. Such errors can be minimized using higher order discretization schemes [34] (p. 98).

**Table 3.** Boundary conditions (Figure 3).

Boundary conditions	
<b>Input</b>	Velocity inlet (upstream).
	Atmospheric pressure (upper area of the channel).
<b>Output</b>	Atmospheric pressure (downstream).
<b>Solid</b>	Weir.
	Side walls and channel platform.
<b>Symmetry</b>	Side boundary and perpendicular plane to the axis of the weir.

Several simulations were carried out on in order to evaluate the model according previous results reported with the bibliography. Statistical methods were used to compare simulated results with experimental and analytical results. As an indicator of the quality of measurement of numerical results, the relative percentage error was used, which indicates how far from the experimental value is from the numerical estimation with CFD and it is defined as:

$$\text{relative percentage error} = \frac{\text{Simulated} - \text{experimental}}{\text{experimental}} * 100 \quad (16)$$

Table 4 shows simulation scenarios according to experimental conditions.

**Table 4.** Simulation scenarios [11 (p. 272), 28].

Weir	Experimental conditions					
	Channel width (m)	Width of rectangular section <sub>b1</sub> (m)	Width of triangular section <sub>b2</sub> (m)	Notch angle $\theta$ (°)	Load h (m)	Flow Q (ls <sup>-1</sup> )
Rectangular	2.00	1.00	-	-	0.27	249.00
Triangular	2.00	-	2.00	90	0.50	246.00
		0.25	0.20	90	0.113	8.06
		0.25	0.20	90	0.131	14.36
		0.25	0.20	90	0.136	16.33
		0.40	0.20	90	0.122	13.35
Compound	1.49	0.40	0.20	90	0.141	23.35
		0.40	0.20	90	0.169	45.50
		0.50	0.20	90	0.110	8.06
		0.50	0.20	90	0.123	14.36
		0.50	0.20	90	0.127	16.33

Results are analyzed and they are exposed in a qualitatively (maps, distributions, vectors) and quantitatively (graphs, integrals, values, averages) way.

### 2.3.3. Mesh Characteristic and quality

Simulations with different mesh densities were performed for each type of weir. The independence of the results of the mesh was obtained by reducing the number of elements by means of trial and error, to obtain an adequate convergence of the calculations.

Flores et al. [39] mention parameters to evaluate the quality of the mesh. The *orthogonal quality* can have values that vary from zero to one, an excellent quality mesh has values close to one. The *aspect ratio* measures the narrowness of the cell; for a mesh with geometric equilateral shapes it will be of good quality if this parameter will be equal to one, while a mesh with irregular shapes will be of good quality if this parameter is greater than one. The skewness that can have values that vary from one to zero, a mesh of excellent quality has values of this parameter close to zero. The results obtained indicate that the quality of the mesh is statistically acceptable. Table 5 shows the values of the parameters used to evaluate the mesh quality.

**Table 5.** Evaluation of mesh quality.

Weir	Number of elements	Quality parameters			
		Aspect Ratio	Orthogonal Quality	Skewness	
Rectangular	863721	2.80	0.90	0.18	
Triangular	681542	3.53	0.92	0.19	
	b1=0.25 m	579361	5.75	0.92	0.18
Compound	b1=0.40 m	797409	5.74	0.92	0.18
	b1=0.50 m	939347	5.70	0.92	0.18

## 3. Results and discussion

### 3.1. Evaluation of the numerical model

Table 6 reports the simulation parameters and shows the statistical comparison of the experimental results reported by Sotelo [11] (p. 272) with those simulated with CFD. The discharge coefficients of the rectangular weir and the triangular weir were obtained from equations 4 and 5, respectively.

**Table 6.** Hydraulic variables and relative percentage errors between experimental and numerical values of the rectangular and triangular weirs.

Weir	Method	Load h (m)	Notch angle $\theta$ (°)	Discharge coefficient $C_d$	Flow rates Q (ls <sup>-1</sup> )
Rectangular	Experimental	0.270	-	0.6017	249
	CFD	0.271	-	0.6016	251
	Relative error (%)	0.37	-	-0.01	0.66
Triangular	Experimental	0.500	90	0.5902	246
	CFD	0.499	90	0.5902	245
	Relative error (%)	-0.2	-	0.00	-0.30

According to the results, the CFD model simulates both weirs very well. Although, the CFD model predicted in the best way the discharge flow in a triangular weir than in the case of the

rectangular weir, the relative error of the triangular weir is slightly less than the case of the rectangular weir. The use of the triangular weir is recommended for flow rates lower than  $30 \text{ l s}^{-1}$ , however, Sotelo [11] (p. 253) also documents that its accuracy is greater than a rectangular weir even for flow rates of 30 to  $300 \text{ l s}^{-1}$ .

Once the CFD model was evaluated, nine scenarios were simulated for the combined weir, which are statistically compared with the experimental results reported by Jan *et al.* [25]. The discharge coefficients,  $C_{dt}$  and  $C_{dr}$ , of the triangular and rectangular sections of the compound weir are calculated with equations 7 and 8. Table 7 reports the flow rates obtained numerically for the three sections of compound weirs.

**Table 7.** Coefficients of discharge and numerical flow rates in compound weirs obtained by means of the CFD tool.

Notch angle $\theta$ ( $^\circ$ )	Rectangular section width $b_1$ (m)	Triangular section width $b_2$ (m)	Load on rectangular section CFD $h_1$ (m)	Load on triangular section CFD $h_2$ (m)	Discharge coefficient in rectangular section $C_{dr}$	Discharge coefficient in triangular section $C_{dt}$	CFD Flow rates $Q$ ( $\text{l s}^{-1}$ )
90	0.25	0.20	0.014	0.114	0.590	0.579	8.08
90	0.25	0.20	0.033	0.133	0.591	0.579	14.31
90	0.25	0.20	0.040	0.140	0.591	0.579	16.31
90	0.40	0.20	0.028	0.128	0.594	0.579	13.27
90	0.40	0.20	0.042	0.142	0.594	0.579	23.24
90	0.40	0.20	0.079	0.179	0.596	0.579	45.30
90	0.50	0.20	0.010	0.110	0.595	0.579	8.11
90	0.50	0.20	0.025	0.125	0.596	0.579	14.47
90	0.50	0.20	0.029	0.129	0.597	0.579	16.33

The relative errors, calculated with equation 16, are presented in Table 8; the analytical flow rates (obtained with equation 6) and the numerical flow rates (obtained in CFD) are compared against the experimental flow rates.

**Table 8.** Relative errors of analytical and numerical flow rates versus experimental flow rates.

Rectangular section width $b_1$ (m)	Experimental flow rates $Q$ ( $\text{l s}^{-1}$ )	Analytical flow rates $Q$ ( $\text{l s}^{-1}$ )	CFD flow rates $Q$ ( $\text{l s}^{-1}$ )	Analytical relative error vs Experimental relative error (%)	Relative error CFD vs Experimental error (%)
0.25	8.06	7.13	8.08	-11.49	0.21
0.25	14.36	13.02	14.31	-9.33	-0.35
0.25	16.33	14.95	16.31	-8.47	-0.14
0.40	13.35	11.59	13.27	-13.21	-0.59
0.40	23.35	21.41	23.24	-8.30	-0.46
0.40	45.50	39.90	45.30	-12.30	-0.44
0.50	8.06	7.23	8.11	-10.28	0.65
0.50	14.36	13.30	14.47	-7.41	0.74
0.50	16.33	15.53	16.33	-4.93	0.00

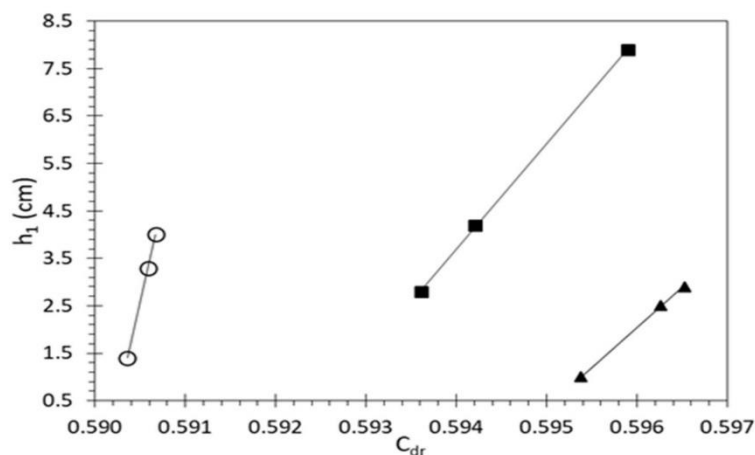
Results showed that the flow rates obtained through the CFD tool better predict the discharge than the analytical flow rates. Analytically there is inaccuracy of the discharge measurement during the transition between geometric sections. Lee *et al.* [40] mentioned that the discharge discontinuity during the transition is associated with changes in mass and momentum; these are effects of variables, of conservation equations, which are not considered in the theoretical equations for the measurement of flow rates, as are the effects of viscosity and velocity distribution in proximity to the weir.

To improve the fit of the analytical model, Jan *et al.* [41] proposed an adjustment factor  $\alpha$ , which multiplies the analytically calculated flow rates to estimate the discharge flow.  $\alpha$  is defined as the average of the ratio of experimental flow rates to the analytical flow rates ( $\alpha$  was not considered in the results of table 8). The adjustment value was  $\alpha=1.11$ , which indicates that the analytical method is undervalued with respect to the experimental results.

The difficulty of describing the flow in the transition zone between the triangular and rectangular section is well known. CFD must assume hypotheses to simulate and test sub-models to describe the flow, such as turbulence and phase change. Flow rates are very similar in several scenarios. Under these conditions, CFD simulations will allowed to know in detail the behavior of the flow in critical sections of the weir.

### 3.2. Effect of rectangular section width on the coefficient of discharge

The results showed the effect of the width of the rectangular section on the discharge coefficient. Figure 4 show that the coefficient of discharge,  $C_{dr}$ , increases with the increase in hydraulic load  $[h]$ , and the width of the rectangular section  $[b_1]$ . As the flow of the weir increases, the variation of the discharge coefficient is lower in the rectangular section  $b_1=0.25\text{m}$  in relation to the other two weirs,  $b_1=0.40\text{m}$  and  $b_1=0.50\text{m}$ , as a consequence of the increase in the length of the weir.



**Figure 4.** Coefficient of discharge for different hydraulic loads ( $h$ ) and weir width ( $b_1$ ).

○  $b_1=0.25\text{m}$ , ■  $b_1=0.40\text{m}$ , ▲  $b_1=0.50\text{m}$ .

### 3.3. Nappe characteristics

In the compound weir there are two nappes (Figure 5) as a consequence of the pressure difference that exists during the discharge in the triangular and rectangular sections (Figure 6). On

the other hand with the triangular section, that was contracted and with greater hydraulic load, the rectangular section presents subatmospheric pressures and lower discharge speed while in the triangular section there are pressures greater than the atmosphere and higher discharge velocity together with a nappe thicker than that of the rectangular section (Figure 5). The discharge velocity of the triangular section generates a depression in the free surface of the triangular zone of the compound weir (Figure 7).

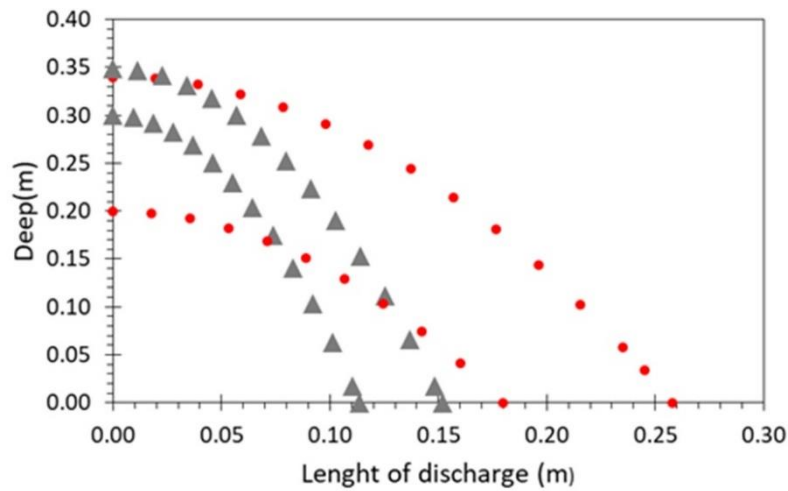


Figure 5. Monitoring of the particle during discharge.

▲ X=0.3 m, ● X=0.6 m.  $b_1=0.40\text{m}$ ,  $Q= 45.30\text{ l s}^{-1}$

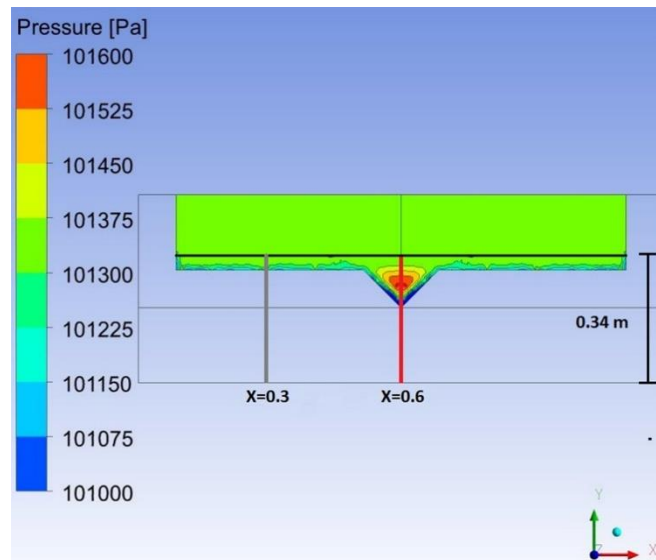
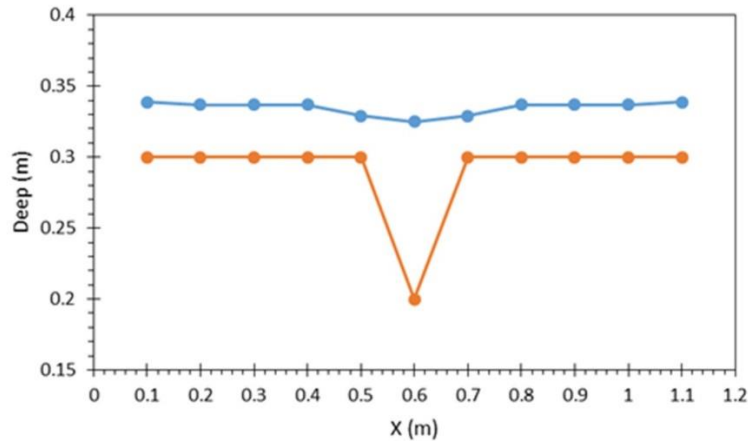


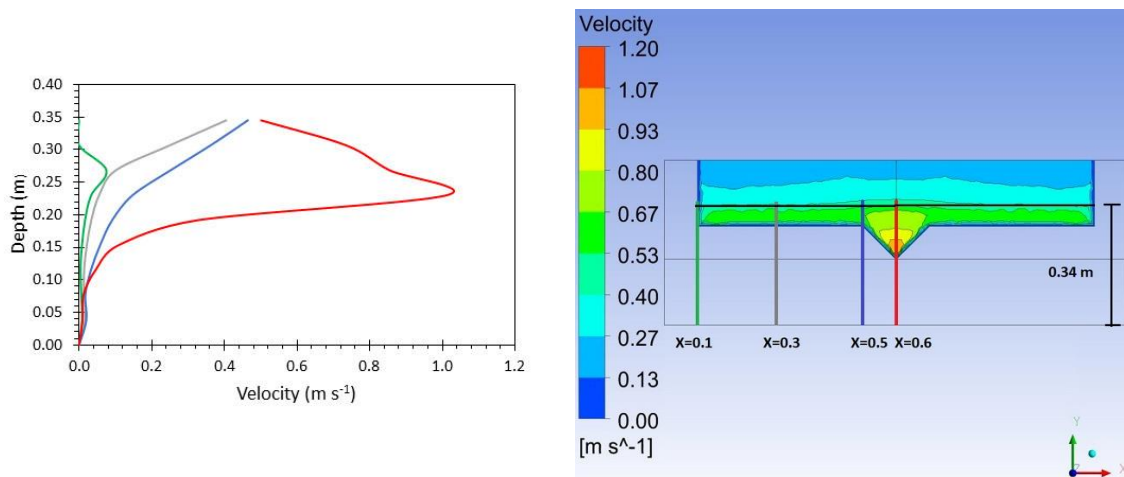
Figure 6. Field of pressures.  $b_1=0.40\text{m}$ ,  $Q= 45.30\text{ l s}^{-1}$ . X in meters.

— x=0.3, — x=0.6, — free surface.



**Figure 7.** Profile of the free surface during discharge. Free surface —, weir edge —.  $b_1=0.40\text{m}$ ,  $Q= 45.30 \text{ l s}^{-1}$ .

In the lower area of the triangular section, there is a region where the speed is greater with respect to the rest of the section (Figures 8). The length of the discharge sheet in that area is greater in relation to the rest of the discharge areas from the weir; during the transition from the triangular to the rectangular section, called the mixing zone by Lee *et al.* [40], there are velocity gradients that decrease with the increase of the hydraulic load on the weir.



**Figure 8.** Velocity profiles. Plane XY,  $Z=1.50\text{m}$ .  $b_1=0.40\text{m}$ ,  $Q= 45.30 \text{ l s}^{-1}$ . X in meters.

—  $x=0.1$ , —  $x=0.3$ , —  $x=0.5$ , —  $x=0.6$ , — free surface.

#### 4. Conclusions

The experimental and analytical studies reported in the bibliography allowed to reproduce numerically, by CFD simulations, the hydraulic behavior of compound (rectangular-triangular) sharp-crest weirs. Beginning from objective of this work and results, flow rates obtained numerically are statistically agreement with the experimental flow rates. The experimentation and the modeling with CFD are complementary strategies, that allow understand and analyze details of the operation of compound weirs.

There are an Analytical error up to 13.21% obtaining by discharge flow. Numerically the error reduced until 0.74%. The relation of the length of the rectangular section with the discharge coefficient has been found. Regarding weir design, simulation results show that the value and the variation of

the discharge coefficient increase with the increase in the width of the rectangular section ( $b_1$ ). It was also possible to characterize nappe. CFD allowed identify sub-atmospheric pressure in the rectangular region, while in the triangular zone the pressure is higher than atmospheric. During discharge, a thick nappe was observed in the area dominated by the triangular section and a depression in the surface free. According to the results obtained, it is possible to assume that the analytical error in the estimation of the discharge flow is due to the variation of the discharge velocity in the transition from the triangular section to the rectangular section.

## Nomenclature

$B$	channel width.
$b$	weir width.
$b_1$	width of the rectangular section the compound weir.
$b_2$	width of the triangular section the compound weir.
$C_d$	coefficient of discharge.
$C_{dr}$	coefficient of discharge of the section rectangular the compound weir.
$C_{dt}$	coefficient of discharge of the section triangular the compound weir.
$C_\mu, C_{1\varepsilon}, C_{2\varepsilon}$	constants of turbulent model K- $\varepsilon$ .
$\mathbf{f}$	forces of the body per unit mass.
$g$	acceleration of gravity.
$h$	static load on the weir.
$h_1$	static load on the section rectangular the compound weir.
$h_2$	static load on the section triangular the compound weir.
$K$	turbulent kinetic energy.
$k$	coefficient depending on the dimensions and shape of the weir.
$n$	dimensionless number depending on the shape of the weir.
$\dot{m}_{pq}$	mass transfer from phase p to phase q.
$\dot{m}_{qp}$	the mass transfer from phase q to phase p.
$P$	height of the weir.
$P_K$	turbulent generation due to the viscous force.
$P_{kb}, P_{\varepsilon b}$	nfluence of floatability force
$p$	dynamic pressure.
$Q$	discharge over weir.
$q^{\text{th}}$	phase q.
$S_{\alpha q}$	term source.
$\mathbf{U}$	velocity field.
$\alpha_q$	volume fraction of the phase q.
$\varepsilon$	dispersion of turbulent kinetic energy.
$\theta$	notch angle of the triangular weir.
$\mu$	dynamic viscosity.
$\mu_t$	turbulent viscosity.
$\rho$	density of the fluid.
$\rho_q$	density of the phase q.
$\sigma_k, \sigma_\varepsilon$	constants of turbulent model K- $\varepsilon$ .

**Author contribution:** All the authors contributed to the conception, development and writing of the article.

**Funding:** This research no external funding.

**Conflicts of interest:** The authors declare no conflict of interest.

## References

1. Clemmens, A. J.; Wahl, T. L.; Bos, M. G.; Replogle, J. A. *Water measurement with flumes and weirs* (No. 58). International Institute for Land Reclamation and Improvement/ILRI., 2001; p. 17.
2. Skertchly, M. L. 1988. *Manual de diseño de estructuras de aforo*; Morelos, México, 1988; pp. 71-95.
3. Bautista C; Robles, O.; JÚnez, F. H.; Playán, E. Discharge coefficient analysis for triangular sharp-crested weirs using low-speed photographic technique. *J. Irrig. Drain. Eng.* **2013**, *140*, 06013005
4. Emiroglu, M. E.; Kaya, N.; Agaccioglu, H. Discharge capacity of labyrinth side weir located on a straight channel. *J. Irrig. Drain. Eng.* **2010**, *136*, 37–46.
5. United States Department of the Interior, Bureau of Reclamation (USBR). *Water measurement manual*, 3rd Ed., Denver, 1997.
6. Aydin, I.; Altan-Sakarya, A. B.; Sisman, C. Discharge formula for rectangular sharp-crested weirs. *Flow Meas. Instrum.* **2011**, *22*, pp 144–151.
7. El-Hady, R. M. A. 2D-3D modeling of flow over sharp-crested weirs. *J. Appl. Sci. Res.* **2011**, *7*, 2495–2505.
8. British Standards Institution (BSI). *Thin-plate weirs and venture flumes in methods of measurement of liquid flow in open channel. Part 4A*. BSI 3680, London, 1965.
9. International Organization for Standardization (ISO). *Water flow measurement in open channels using weirs and venturi flumes. Part 1: Thin plate weirs*. ISO 1438/1-1980(E), 1980.
10. American Society for Testing and Materials (ASTM). *Standard method for open-channel flow measurement of water with thin-plate weirs*. ASTM D5242, West Conshohocken, Pa., 1993
11. Sotelo, G. 1997. *Hidráulica general*; Edit. Limusa-Noriega, México, 1997; pp 241-276.
12. Shen, J. 1981. *Discharge characteristics of triangular-notch thin-plate weirs*. *Studies of flow of water over weirs and dams*, Geological Survey Water-Supply Paper 1617-B, United States Dept. of the Interior, Washington, DC, 1981; pp. 7-15.
13. El-Alfy, K. S. Effect of vertical curvature of flow at weir crest on discharge coefficient. In The 9th International Water Technology Conference, iwtc9, Sharm El-Sheikh, Egypt, 2005.
14. Bagheri, S.; Heidarpour, M. Flow over rectangular sharp crested weirs. *Irrig. Sci.* **2010**, *28*, 173–179.
15. Chen, Y.; Fu, Z.; Chen, Q.; Cui, Z. Discharge Coefficient of Rectangular Short-Crested Weir with Varying Slope Coefficients. *Water* **2018**, *10*, 204.
16. Fu, Z. F.; Cui, Z.; Dai, W. H.; Chen, Y. J. Discharge Coefficient of Combined Orifice-Weir Flow. *Water* **2018**, *10*, 699.
17. Tian, Z.; Wang, W.; Bai, R.; Li, N. Effect of Flaring Gate Piers on Discharge Coefficient for Finite Crest-Length Weirs. *Water* **2018**, *10*, 1349.
18. Zahiri, A.; Tang, X.; Azamathulla, H. Md. Mathematical modeling of flow discharge over compound sharp-crested weirs. *J. Hydr. Res.* **2014**, *8*, 194-193.
19. Abdel-Azim, M. N.; Al-Brahim, A. M.; Alhamid, A. A. Combined-free flow over weirs and below gates. *J. Hydr. Res.* **2002**, *40*, 359–365.
20. Ho, D.K.; Boyes, K.M.; and Donohoo, S.M. Investigation of Spillway Behavior under Increased Maximum Flood by Computational Fluid Dynamics Technique. Proc. 14th Australasian Fluid Mechanics Conference, Adelaide University, Adelaide, Australia. December 2001, 10-14.
21. Ho, D.K.; Boyes, K.M.; Donohoo, S.M.; Cooper, B. Numerical Flow Analysis for Spillways. Proc. 43rd ANCOLD Conference, Hobart, Tasmania, October 2003, 24-29.
22. Reda, M. A. 2011. 2D-3D modeling of flow over sharp-crested weir. *J. App. Sci. Res.* **2011**, *7*, 2495-2505.
23. Zuhair Al Zubaidy, R. Numerical Simulation of Two-Phase Flow. *Inter. J. of Struct. Civ. Eng. Res.* **2013**, *2*, 13.
24. Duró, G.; Dios, M. D.; López, A.; Liscia, S. O.; Angulo, M. A. Comparación de simulaciones en CFD y modelación física de una central hidrocombinada. In XXIV Congreso Latinoamericano de Hidráulica, San José de Costa Rica, Costa Rica, 9 al 12 de septiembre de 2012.
25. Jan, C. D.; Chang, C. J.; Lee, M. H. Discussion of Design and calibration of a compound sharp-crested weir by J. Martinez, J. Reza, MT Morillas, and JG Lopez. *J. Hydr. Eng.* **2006**, *132*, 868-871.



26. Bos M.G. *Discharge measurement structures*, 3rd revised edition; International institute for land reclamation and improvement, Wageningen, The Netherlands, 1989; p. 41.
27. Henderson F.M. *Open-channel flow*. MacMillan Publishing Co., Inc, New York, 1964; pp 269-277.
28. Kumar, S.; Ahmad, Z.; Mansoor, T. A new approach to improve the discharging capacity of sharp-crested triangular plan form weirs. *Flow Meas. Instrum.* **2011**, *22*, 175- 180.
29. Hirt, C.W.; Nichols, B.D. Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries. *J. Comp. Physics* **1981**, *39*, 201-225.
30. Jones, W.P.; Launder B.E. The Prediction of Laminarization with a Two-Equation Model of Turbulence. *International Journal of Heat Mass Transfer* **1972**, *15*, 301 – 314.
31. Launder, B.E.; Spalding, D. B. The Numerical Computation of Turbulence Flow. *Comp. Meth. In Appl. Mech. And Engineering* **1974**, *3*, 269-289.
32. Sánchez, J. M. C., & Elsitdié, L. G. C. (2011). Consideraciones del mallado aplicadas al cálculo de flujos bifásicos con las técnicas de dinámica de fluidos computacional. *J. Introd. Inv. UPCT.* **2011**, *4*, 33-35.
33. Bos, M. G., Replogle, J. A., & Clemmens, A. J. *Flow measuring flumes for open channel systems*; International institute for land reclamation and improvement, Wageningen, The Netherlands, 1986; p. 40.
34. Fernández, J. M *Técnicas numéricas en Ingeniería de Fluidos: Introducción a la Dinámica de Fluidos Computacional (CFD) por el Método de Volumen Finito*; Reverté, Barcelona, 2012; pp. 98-294.
35. Chanel, P. G.; Doering, J. L. Assessment of spillway modelling using Computational Fluid Dynamics. *Can. J. Civ. Eng.* **2008**, *35*, 1481-1485.
36. Olsen, N. R.; Nils R. B.; Kjellesvig H. M. Three-dimensional numerical flow modeling for estimation of spillway capacity. *J. Hydr. Res.* **1998**, *36*, 775-784.
37. San Mauro, J.; Salazar, F.; Toledo Municio, M. A.; Caballero, F. J.; Ponce Farfán, C.; Ramos, T. Modelación física y numérica de aliviaderos en laberinto con fondo poliédrico. *Ing. del agua* **2016**, *20*, 127-138.
38. Jiang, L.; Diao, M.; Sun, H.; Ren, Y. Numerical Modeling of Flow Over a Rectangular Broad-Crested Weir with a Sloped Upstream Face. *Water* **2018**, *10*, 1663.
39. Flores, V. J.; López, C. I.; Mejía, S. E.; Montero, C. J. Evaluación del desempeño climático de un invernadero Batocenital del centro de México mediante Dinámica de Fluidos Computacional (CFD). *Agrociencia* **2014**, *48*, 131-146.
40. Lee, J.T.; Chan, H.C.; Huang, C.K.; Leu, J.M. Experiments on hydraulic relations for flow over a compound sharp-crested weir. *Inter. J. Phys. Sci.* **2012**, *7*, 2229 - 2237.
41. Jan, C. D.; Chang, C. J.; Kuo, F. H. Experiments on discharge equations of compound broad-crested weirs. *J. Irrig. Drain. Eng.*, **2009**, *135*, 511-515.



© 2019 by the authors. Submitted for possible open access publication under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>).

# Optimización del coeficiente de descarga del vertedor tipo laberinto a partir de cambios geométricos

Erick Mattos<sup>1</sup>, Jorge Flores-Velázquez<sup>2\*</sup>, Waldo Ojeda<sup>2</sup>, Mauro Íñiguez<sup>2</sup>, Carlos Díaz<sup>3</sup> and Humberto Salinas<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Posgrado en Ciencias y Tecnología del Agua. Instituto Mexicano de Tecnología del Agua, Paseo Cuauhnáhuac No. 8532, Col. Progreso, Jiutepec, Morelos, México. C.P. 62550; e\_mattos\_@outlook.com

<sup>2</sup> Coordinación de Riego y Drenaje. Instituto Mexicano de Tecnología del Agua, Paseo Cuauhnáhuac No. 8532, Col. Progreso, Jiutepec, Morelos, México. C.P. 62550; jorge\_flores@tlaloc.imta.mx, wojeda@tlaloc.imta.mx, mic@tlaloc.imta.mx

<sup>3</sup> Instituto Interamericano de Ciencias y Tecnología del Agua, Facultad de Ingeniería, Universidad Autónoma del Estado de México, Carretera Toluca Atlacomulco km 14.5, Unidad San Cayetano, C.P. 50200, Toluca, Estado de México, México; cdiaz@uaemex.mx, hsalinas@uaemex.mx

\* Correspondencia: jorge\_flores@tlaloc.imta.mx; Tel+52(777) 329-3600.

Recibido: Aceptado: Publicado: fecha

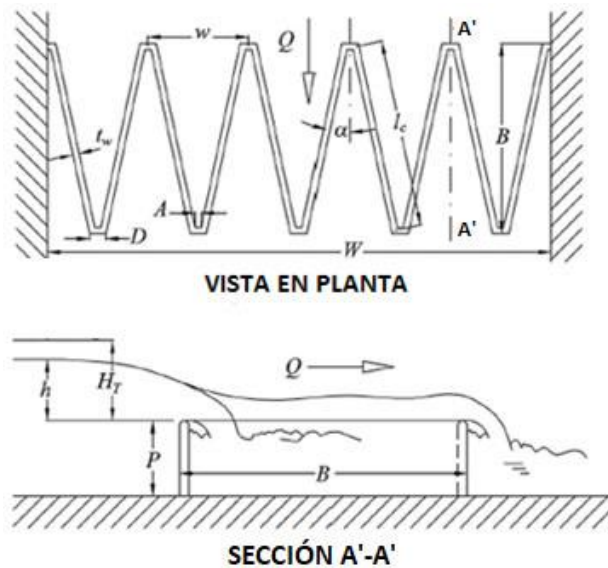
**Resúmen:** Los vertedores tipo laberinto son estructuras que por su particular geometría permiten aumentar la capacidad de descarga comparados con los vertedores lineales; son una opción favorable para la rehabilitación de presas y para controlar el nivel de agua aguas arriba. Existen variedad de geometrías de vertedores tipo laberinto como los trapezoidales, triangulares o tecla de piano así como diferentes tipos de perfiles de cresta; estos cambios geométricos afectan en su eficiencia hidráulica. Para atender este problema el objetivo de este estudio es la optimización del funcionamiento hidráulico del vertedor tipo laberinto realizando cambios en la geometría de su ápice y cresta vertedora aplicando la Dinámica de Fluidos Computacional (CFD); los estudios experimentales reportados en la bibliografía permitieron evaluar en CFD los coeficientes de descarga, los resultados preliminares indican que CFD puede predecir con precisión, se obtuvo congruencia entre los valores numéricos con los experimentales con un coeficiente de determinación igual a 0.984. Se realizaron pruebas con dos tipos de ápices (trapezoidal y circular) y cuatro tipos perfiles de cresta (cresta viva, medio redondeo, cuarto redondeo y tipo WES); los resultados muestran que los vertedores con ápice circular son más eficientes que los de ápice trapezoidal, tienen mayor coeficiente de descarga, en promedio 4.7%. Entre los cuatro tipos de perfiles de cresta el de medio redondeo y el tipo WES tienen mayor coeficiente de descarga y valores similares, pero por proceso constructivo se recomienda usar el de medio redondeo. Para grandes cargas hidráulicas ( $H_T/P > 0.5$ ) todos los perfiles presentaron presiones subatmosféricas en las paredes laterales del vertedor; para  $H_T/P \approx 0.8$  el de medio redondeo obtuvo mayor presión negativa (-1500 Pa) mientras que el de cresta viva logró incrementar la presión en 76% (-350 Pa), pero con mayor área de presión negativa, mientras que el perfil WES redujo el área de presión negativa en casi 50%.

**Keywords:** Vertedor tipo laberinto, Dinámica de Fluidos Computacional (CFD); coeficiente de descarga.

## 1. Introducción

Los vertedores son barreras elevadas localizadas perpendicularmente a la dirección del movimiento del agua con el objeto de que el flujo se eleve por encima de la obstrucción a través de una abertura de forma regular (Bautista *et al.*, 2013). Los parámetros geométricos que definen el comportamiento hidráulico de vertedores son la longitud de la cresta y la forma de la sección de control (Emiroglu *et al.*, 2009; USBR, 2001).

Existe diversidad de vertedores, principalmente del tipo lineal, sin embargo, los vertedores tipo laberinto son una opción viable con respecto a los vertedores tradicionales en términos de la carga hidráulica para un gasto de diseño en un mismo ancho de canal. La particularidad del vertedor tipo laberinto reside en la forma plegada de su cresta, vista en planta, esto se realiza para incrementar la longitud del vertedor en relación con el ancho del canal con el fin de aumentar la capacidad de descarga con respecto a la de un vertedor recto convencional ubicado en el mismo espacio y para igual carga hidráulica. Debido a su eficiencia hidráulica, los vertedores tipo laberinto son opciones favorables para aumentar la capacidad de descarga (rehabilitación de presas) y regular aguas arriba la elevación del agua (inundaciones). En la figura 1 se muestra los parámetros geométricos que intervienen en el diseño de un vertedor tipo laberinto, dónde:  $W$  es el ancho del canal [m],  $w$  el ancho del ciclo del vertedor [m],  $t_w$  es el ancho de la pared del vertedor [m],  $D$  es la longitud externa del ápice [m],  $A$  es la longitud interna del ápice [m],  $l_c$  es la longitud de la pared lateral del ciclo [m],  $\alpha$  es el ángulo de la pared lateral del ciclo con respecto a la dirección del flujo [°],  $B$  es la longitud entre ápices [m],  $P$  es la altura del vertedor [m],  $h$  es la carga piezométrica [m],  $H_T$  es la carga total [m] y  $Q$  es el gasto de diseño [m<sup>3</sup> s<sup>-1</sup>].



**Figura 1.** Parámetros geométricos de un vertedor tipo laberinto.

En la figura 1 se presenta los parámetros geométricos de un vertedor tipo laberinto,

### 1.1 Característica del flujo de descarga

La geometría del vertedor tipo laberinto ocasiona un patrón de descarga tridimensional. Para pequeñas descargas la lámina vertiente se mantiene adherida a la pared del vertedor, conforme incrementa la carga hidráulica sobre el vertedor la lámina vertiente se separa de la pared del vertedor y se genera fenómenos como el ahogamiento local en los ápices aguas arriba del vertedor y colisión entre láminas vertientes de los muros laterales que confluyen en el mismo ápice (figura 2); tales fenómenos provocan la reducción del coeficiente de descarga, cuantificada por Crookston y Tullis (2012a). Para ciertas condiciones de flujo y geometrías, la lámina vertiente se vuelve inestable, ocasionando vibraciones en la estructura (Crookton y Tullis, 2012b) y líneas de corrientes helicoidales paralelas a la pared del vertedor.



**Figura 2.** Ahogamiento local e interferencia de láminas vertientes. (Crookston, 2010)

### 1.2 Estudios previos

Hay y Taylor (1970) presentaron una guía de diseño basado en las investigaciones de Taylor (1968) para vertedores triangulares y trapezoidales tipo laberinto para la relación  $h/P < 0.6$ . La Oficina de Recuperación de los Estados Unidos (USBR por sus siglas en inglés) condujo el modelo de estudio para el diseño de la presa Ute (Houston, 1982); encontraron discrepancias entre los resultados experimentales y las recomendaciones por Hay y Taylor (1970) atribuido a la diferencia de definición de la carga aguas arriba ya los datos geométricos limitados. En los modelos físicos de estudio de las presas de Ute y Hyrum, Hinchliff y Houston (1984) desarrollaron nuevas guías de diseño; proporcionaron información valiosa sobre la orientación y colocación del vertedor en reservorios y canales. Basado en los modelos físicos de Avon y Woronora, Darvas (1971) introdujo un coeficiente de descarga dimensional, los resultados se presenta como una familia de curvas que relaciona el coeficiente de descarga con la relación  $L_{ciclo}/w$ , donde  $L_{ciclo}$  es la longitud de un ciclo [m]. Sin embargo, Magalhães y Lorena (1989) desarrollaron curvas similares a las de Darvas (1971), excepto que sus resultados son aplicados para un vertedor de perfil tipo WES ó ogee truncada.

Lux y Hinchliff (1985) y Lux (1984, 1989) presentaron un coeficiente de descarga que incluye la relación  $w/P$  y una constante  $k$  según sea la forma del ciclo del vertedor (0.18 para un ciclo triangular, 0.1 para un ciclo trapezoidal) para estimar la descarga un vertedor de un solo ciclo.

Tullis *et al.* (1995) desarrollaron un método de diseño basado en la ecuación general de vertedores, introdujeron la longitud efectiva,  $L_e$ , como la longitud característica del vertedor (ec. 1) e intentaron tomar en cuenta la influencia del ápice en la eficiencia de descarga. Sus estudios se realizaron para vertedores trapezoidales tipo laberinto y con perfil de creta de cuarto redondeo.

$$C_d = \frac{3Q}{2\sqrt{2g}H_T^{1.5}L_e} \quad (1)$$

Dónde:  $C_d$  es el coeficiente de descarga [adimensional],  $Q$  es el gasto de diseño [ $m^3s^{-1}$ ],  $g$  es la aceleración de la gravedad [ $m s^{-2}$ ],  $H_T$  es la carga total aguas arriba [m] y  $L_e$  es la longitud característica [m] definida como:

$$L_e = 2N(A + L) \quad (2)$$

Dónde:  $N$  es el número de ciclos [adimensional],  $A$  es la longitud interna del ápice [m] y  $L$  es la longitud total del vertedor referenciado en el cetro del ancho de la pared del vertedor [m].

Falvey (2003) revisó todas las investigaciones realizadas hasta el momento y agregó nuevas interpretaciones para el diseño del vertedor tipo laberinto. Melo *et al.* (2002) expandió el trabajo de Magalhães y Lorena (1989) y agregó un parámetro de ajuste para verificar la influencia de las paredes convergentes de un canal en vertedores tipo laberinto de un solo ciclo. Tullis *et al.* (2007) desarrollaron una relación adimensional de cargas de sumergencia para vertedores tipo laberinto con un promedio de error predictivo de 0.9%. Lopes *et al.* (2006, 2008), Wormleaton *et al.* (1998) y Emiroglu (2009) realizaron investigaciones sobre la disipación de energía, características del flujo aguas abajo y la aireación. Crookston y Tullis (2012a) realizaron investigaciones sobre la aireación de la lámina vertiente, inestabilidad del flujo y vibración en el vertedor, además de proponer una guía de diseño.

En investigaciones recientes se ha utilizado modelos numéricos para evaluar y validar el uso de la Dinámica de Fluidos computacional (CFD) como herramienta de diseño y de análisis. Las técnicas de CFD resuelven numéricamente las ecuaciones que gobiernan el flujo, como las ecuaciones de Navier-Stokes, y ofrecen la posibilidad de evaluar hidráulicamente un vertedor bajo diferentes geometrías y condiciones hidráulicas; una vez evaluado y validado, CFD permite la extracción de información como: campos de velocidad y presión. Algunos investigadores han demostrado las ventajas de las técnicas de CFD para el análisis de vertedores tipo laberinto como: Savage *et al.* (2004) Paxon y Savage (2006), Crookston *et al.* (2012).

### 1.3 Influencia del ápice y del perfil de cresta en el funcionamiento hidráulico del vertedor

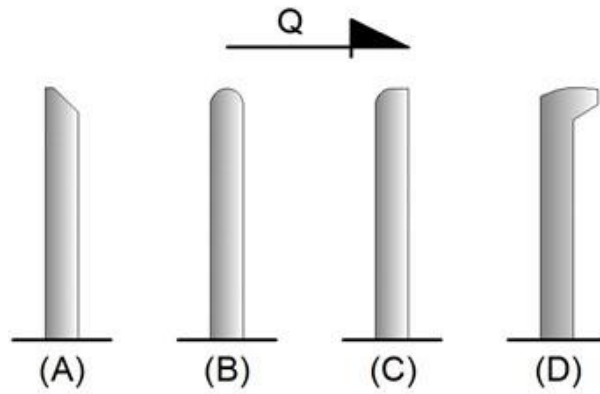
Una de la forma más común de describir el funcionamiento de los vertedores es mediante el coeficiente de descarga, y en base a esto se han realizado comparaciones y estimaciones de parámetros geométricos

La geometría del vertedor y en particular la forma de la cresta influye en el coeficiente de descarga de cualquier tipo de vertedor. El perfil implementado en la cresta tiene por objeto en facilitar la descarga del flujo, pero este podría tener efectos en la lámina vertiente, como la cavitación y la oscilación del flujo. La cavitación es un fenómeno que consiste en la formación de cavidades de vapor de agua dentro del flujo cuando se presentan presiones negativas iguales o menores a la presión de vaporización del flujo (-2,447 Pa a 20 °C para el caso del agua), las cuales al implotar pueden causar daños al concreto de la obra hidráulica, en especial a los vertedores de las presas (Arreguín, 2005).

Existe diversidad de perfiles de cresta que se ha utilizado en vertedores como: cresta viva, medio redondeo, cuarto redondeo y tipo WES (figura 3),

El perfil de cuarto redondeo presenta mejor condición de descarga que el perfil de cresta viva; sin embargo, ambos tienen los mismos inconvenientes: erosión en la cresta y problemas de cavitación durante la descarga.

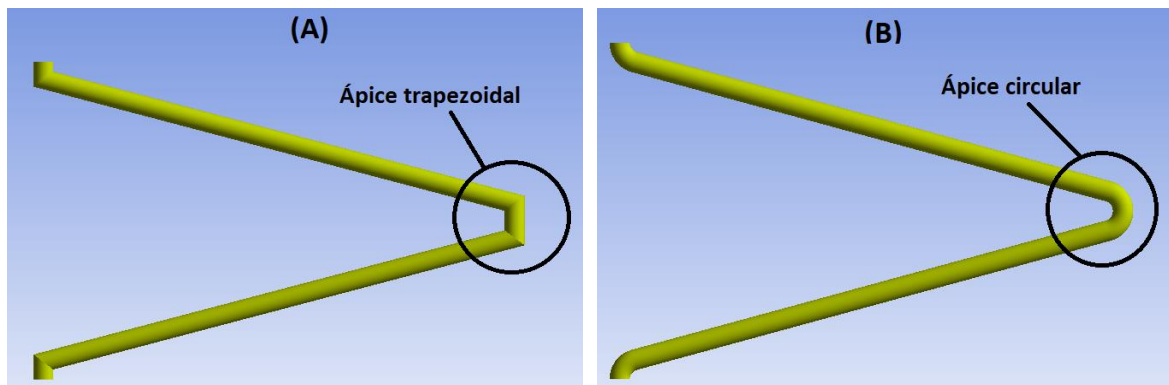
La forma del perfil tipo WES, en relación con los otros perfiles, disminuye la presencia de presiones negativas en las paredes aguas abajo del vertedor y evita que la lámina vertiente se adhiera a la pared del vertedor.



**Figura 3.** Perfiles de cresta: (A) Cresta viva, (B) Medio redondeo, (C) Cuarto redondeo, (D) Tipo WES

Formas de crestas semicirculares han demostrado ser más eficientes (Willmore, 2004), permitiendo que la lámina vertiente se mantenga adherida a la pared del vertedor para pequeñas cargas, lo que resulta la presencia de presiones subatmosféricas entre la pared y la lámina vertiente.

La forma del ápice también puede influir significativamente en la eficiencia del vertedor tipo laberinto, Crookston (2010) menciona que un vertedor con ápice circular puede mejorar su eficiencia hidráulica. En la figura 4 se muestra las formas de ápice considerados en este estudio.



**Figura 4.** Formas de ápices. (A) Trapezoidal, (B) Circular.

El objetivo de este estudio es evaluar y mejorar el funcionamiento hidráulico del vertedor tipo laberinto realizando cambios en la geometría del vertedor, en particular en el perfil de la cresta y en la forma del ápice. Este estudio se apoyó en la modelación numérica en CFD para el estudio del funcionamiento hidráulico del vertedor.

## 2. Materiales y método

### 2.1 Descripción del modelo físico

Se basó en un modelo físico, reportado por Crookston *et al.* (2012a), para evaluar un modelo computacional en CFD, el prototipo experimental consiste de un vertedor trapezoidal tipo laberinto de dos ciclos dentro de un canal y cuyo perfil de cresta es del tipo cuarto redondeo. Las características geométricas del vertedor tipo laberinto se resumen en la tabla 1.

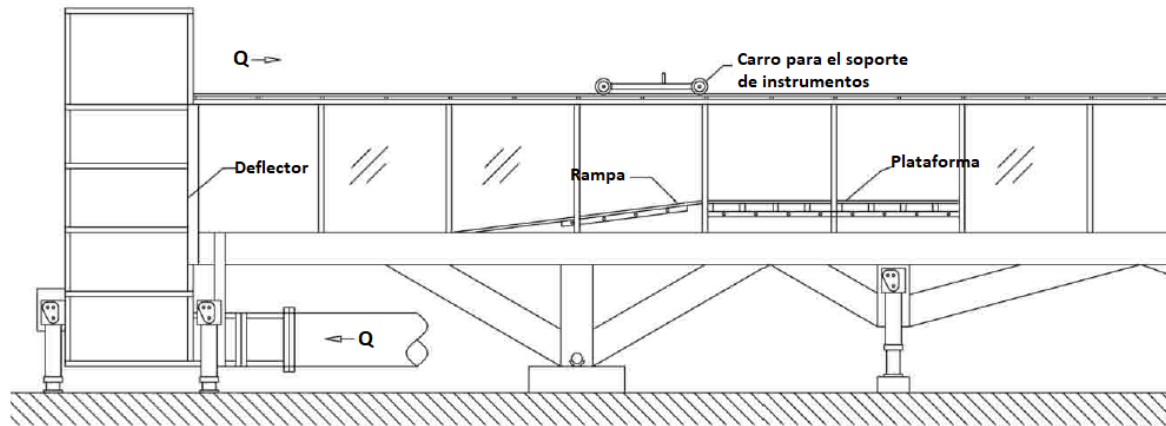
**Tabla 1.** Características geométricas del vertedor tipo laberinto evaluado en CFD.

Características geométricas						
$\alpha$ (°)	N	L (m)	A (m)	w (m)	P (m)	W (m)
15	2	4	0.038	0.617	0.305	1.235

La modelación física, fue realizada por Crookston (2010) en el Laboratorio de Investigación del Agua de Utah (UWRL, por sus siglas en inglés) localizado en el campus de la universidad estatal de Utah. Los vertedores trapezoidales tipo laberinto fueron fabricados con polietileno de alta densidad y probados dentro de un canal rectangular (1.23 x 14.60 x 1.00 m). Basado en los estudios de Johnson (1996), Crookston (2010) consideró despreciable la influencia de las paredes acrílicas del canal en el comportamiento hidráulico de la descarga sobre el vertedor.

Como instrumentos de medición se utilizó una placa de orificio en la tubería de suministro del canal para la medición del caudal, transductores de presión diferencial y un registrador de datos.

El canal está equipado con un deflector aguas arriba (para estabilizar el flujo y mantenerlo en condición uniforme), un carro para el soporte de instrumentos y un tanque de amortiguación. El vertedores tipo laberinto fue instalado sobre una plataforma horizontal de polietileno de alta densidad de 2.44 metros de largo; una rampa de 7° fue instalada a aguas arriba de la plataforma para permitir una transición suave entre el piso del canal y la plataforma (figura 5); Willmore (2004) probó que los efectos de las rampas aguas arriba de un vertedor tipo laberinto no tienen efectos perceptibles sobre el rendimiento hidráulico. La pendiente del canal es ajustable, para el caso de estudio la pendiente del canal fue cero y el flujo gradualmente variado, de modo que el coeficiente de descarga no es afectado por la pendiente del canal.



**Figura 5.** Esquema del canal rectangular empleado por Crookston (2010).

Los datos experimentales fueron obtenidos en condiciones de estado estacionario. Las mediciones del gasto  $Q$  fueron registradas de 5 a 7 minutos con el registrador de datos para determinar el gasto medio, y los tirantes hidráulicos fueron medidos en el tanque de amortiguación equipado con un limnómetro de precisión  $\pm 0.15$  mm.

Los resultados experimentales del coeficiente de descarga, obtenidas a partir de las pruebas en laboratorio, son presentados de forma gráfica como función de la relación  $H/P$  (figura 6).

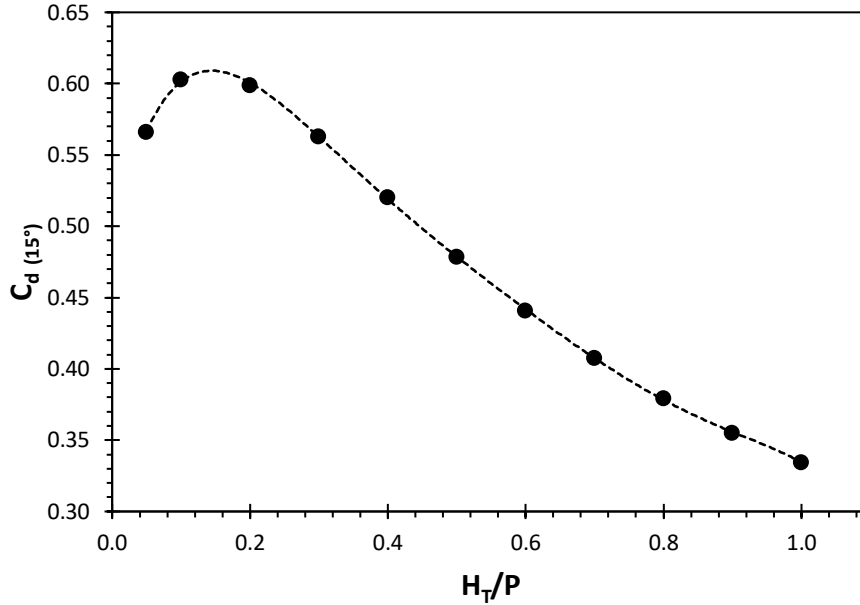


Figura 6. Coeficientes de descarga del vertedor trapezoidal tipo laberinto  $\alpha=15^\circ$ . Crookston (2012a).

### 2.3. Método de solución numérica

El programa ANSYS WORKBENCH versión 14.5 se utilizó para realizar las simulaciones. CFD es una herramienta numérica que predice el comportamiento de un fluido al resolver las ecuaciones generales de transporte, también llamadas ecuaciones de Navier-Stokes (NS). Debido a que no hay una solución analítica, CFD usa varios métodos numéricos, ANSYS WORKBENCH usa el Método de Volumen Finito (FVM por sus siglas en inglés), que divide el dominio en un número finito de celdas sobre las cuales se impone la conservación discreta de la variable.

#### 2.3.1. Ecuaciones de gobierno y sub modelos

La ecuación 3 es la forma diferencial de la ecuación de masa para un flujo incompresible (densidad constante, donde  $\frac{\partial U_i}{\partial x_i}$  representa la variación de velocidad).

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3)$$

Considerando el fluido incompresible, la ecuación diferencial del momento se presenta como la ecuación 4.

$$\frac{\partial(\rho U)}{\partial t} + \nabla(\rho U U) = \nabla(\mu \nabla U) - \nabla p + \rho f \quad (4)$$

$\rho$  [ $\text{kg m}^{-3}$ ] es la densidad del fluido,  $U$  [ $\text{m s}^{-1}$ ] es el campo de velocidad,  $f$  [ $\text{N kg}^{-1}$ ] son las fuerzas del cuerpo po unidad de masa,  $p$  [ $\text{N m}^{-2}$ ] es la presión dinámica,  $\mu$  [ $\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-1}$ ] es la viscosidad dinámica ( $0.001 \text{ kg m}^{-1} \text{s}^{-1}$  para  $20^\circ\text{C}$ ).

El modelo Volumen de Fluido (VOF) es una técnica de seguimiento de superficie mediante la definición de celdas de cálculo que puede estar vacía, parcialmente llena, o llena del fluido. Fue reportado por Hirt y Nichols (1981) y se basa en un concepto de que el volumen ocupado por un



material no puede ser ocupado por el otro. Para cada fase adicional que se agrega al modelo, se introduce una nueva variable: la fracción de volumen de la fase en la celda computacional. En cada volumen de control, las fracciones en volumen de todas las fases suman la unidad. La fracción de volumen del fluido  $q^{th}$  en la celda se denota como  $\alpha_q$ , entonces las tres condiciones siguientes son posibles: en caso de que  $\alpha_q = 0$  la celda está vacía del fluido  $q^{th}$ , si  $\alpha_q = 1$  la celda está llena del fluido  $q^{th}$  y si  $0 < \alpha_q < 1$  la celda contiene la interfaz entre el fluido  $q^{th}$  y el resto de fluidos.

El seguimiento de la interfaz entre las fases se lleva a cabo por la solución de la ecuación de continuidad, ecuación 5, para la fracción de volumen de una (o más) de las fases. Para la fase de  $q^{th}$  esta ecuación tiene la siguiente forma (Hirt y Nichols, 1981):

$$\frac{1}{\rho_q} \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\alpha_q \rho_q) + \nabla \cdot (\alpha_q \rho_q \mathbf{v}_q) \right] = S_{\alpha_q} + \sum_{p=1}^n (\dot{m}_{pq} - \dot{m}_{qp}) \quad (5)$$

Donde:  $\rho_q$  es la densidad de la fase  $q$  [ $\text{kg m}^{-3}$ ],  $\mathbf{v}_q$  es la velocidad de la fase  $q$  [ $\text{m s}^{-1}$ ],  $S_{\alpha_q}$  es el término fuente de la ecuación [ $\text{kg m}^{-2} \text{s}^{-2}$ ],  $\dot{m}_{pq}$  es la transferencia de masa que pasa de la fase  $p$  a la fase  $q$  [ $\text{kg s}^{-1}$ ] and  $\dot{m}_{qp}$  es la transferencia de masa que pasa de la fase  $q$  a la fase  $p$  [ $\text{kg s}^{-1}$ ].

El modelo de turbulencia  $k$ - $\epsilon$  es un modelo semi-empírico basado en las ecuaciones de transporte para la energía cinética turbulenta ( $K$ ) y para la disipación de la energía cinética turbulenta ( $\epsilon$ ). En la obtención de este modelo, se asume que el flujo turbulento está completamente desarrollado y los efectos de la viscosidad molecular son despreciables (Jones y Launder, 1972), los parámetros  $K$  [ $\text{m}^2 \text{s}^{-2}$ ] y  $\epsilon$  [ $\text{m}^2 \text{s}^{-3}$ ] se obtienen de las ecuaciones siguientes:

Energía cinética turbulenta ( $K$ ) (ec. 6):

$$\frac{\partial(\rho K)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U_j K)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\partial \mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial K}{\partial x_j} \right] + P_k - \rho \epsilon + P_{kb} \quad (6)$$

Disipación de la energía cinética turbulenta ( $\epsilon$ ) (ec. 7):

$$\frac{\partial(\rho \epsilon)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U_j \epsilon)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\partial \mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right] + \frac{\epsilon}{K} (C_{1\epsilon} P_k + C_{2\epsilon} \rho \epsilon + C_{1\epsilon} P_{\epsilon b}) \quad (7)$$

$\mu_t$  es la viscosidad turbulenta [ $\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-1}$ ] y se presenta como (ec. 8):

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{K^2}{\epsilon} \quad (8)$$

Donde  $C_\mu$ ,  $C_{1\epsilon}$ ,  $C_{2\epsilon}$ ,  $\sigma_k$  y  $\sigma_\epsilon$  son constantes.

$P_{kb}$  y  $P_{\epsilon b}$  representan la influencia de las fuerzas de flotabilidad.  $P_k$  es la generación turbulenta debido a las fuerzas viscosas [ $\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-3}$ ], se presenta como la ecuación 9.

$$P_k = \mu_t \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \left( \mu_t \frac{\partial U_k}{\partial x_{kk}} + \rho K \right) \quad (9)$$

Los valores de los coeficientes  $C_\mu$ ,  $C_{1\varepsilon}$ ,  $C_{2\varepsilon}$ ,  $\sigma_k$  y  $\sigma_\varepsilon$  fueron ajustados por Launder y Spalding (1974), los cuales se presentan a como:  $C_\mu = 0.09$ ,  $C_{1\varepsilon} = 1.44$ ,  $C_{2\varepsilon} = 1.92$ ,  $\sigma_\varepsilon = 1.3$ ,  $\sigma_k = 1.0$ .

### 2.3.2. Simulación numérica CFD

El modelado numérico se realizó con el programa ANSYS-FLUENT 14.5. El proceso de solución utilizando CFD contempla tres pasos básicos: **i)** Pre-proceso, se construye la geometría del modelo computacional; **ii)** Proceso, el conjunto de condiciones de contorno y los sub-modelos son simulados; **iii)** Post-proceso, los resultados son visualizados en mapas o de forma escalar.

El primer paso consiste en la generación digital como un sólido de la construcción del modelo físico en estudio (figura 7A). El módulo Geometry se utilizó para realizar el modelo numérico. Las características del modelo numérico están basadas en el prototipo reportado por Crookston (2012).

Después de la generación de la geometría, el dominio se divide en un número suficiente de celdas o elementos que no se superponen y cubren toda la geometría, donde las ecuaciones generales de conservación son aplicadas. El módulo Meshing fue usado para generar la malla en el modelo, el tipo de malla define no solo la calidad de los resultados, sino también el grado de detalle de los resultados y el tiempo de cálculo computacional. Para la discretización espacial, se decidió emplear una malla predominantemente hexaédrica; entre las ventajas de la malla hexaédrica es la reducción del número de elementos del dominio y la mejora de la convergencia de la solución (Sánchez y Elsitdié, 2011), cerca de la pared del vertedor la malla es refinada donde la turbulencia es disipada (figura 7B).

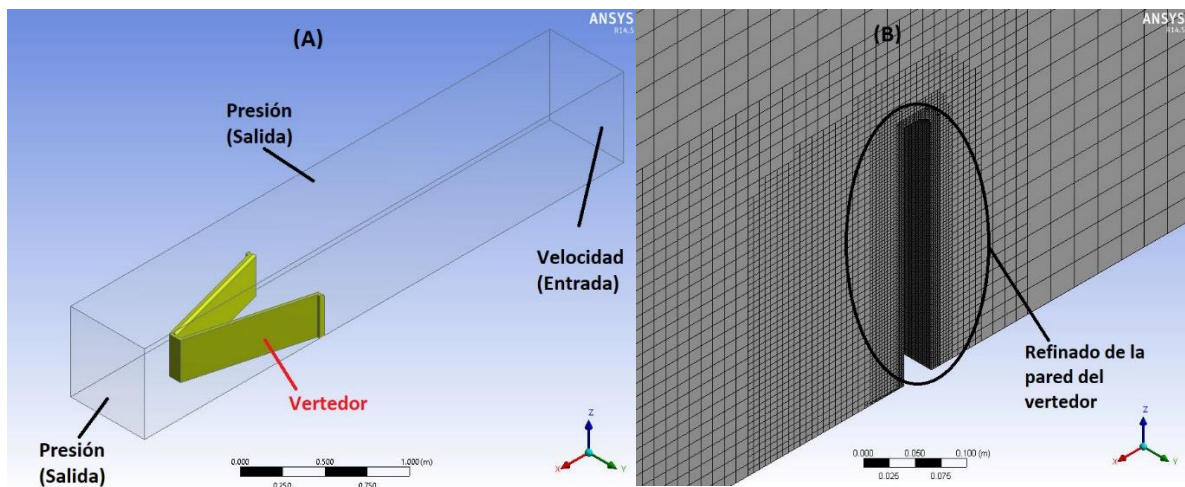


Figure 7. (A) Vertedor y condiciones de frontera, (B) Refinado de la malla cerca de la pared del vertedor.

Las condiciones iniciales y de frontera del modelo computacional son establecidas. En el análisis del vertedor, el problema fue definido como una geometría tridimensional. La condición de simetría es considerada en el plano lateral perpendicular del dominio computacional. La entrada del flujo se encuentra a una distancia suficiente del vertedor, mínimo 2 veces el ancho del canal (Bos *et al.*, 1986), de modo que la carga hidráulica no se vea afectada por esta condición. El flujo es impuesto en las condiciones de aproximación aguas arriba; la condición de entrada más común, en canales abiertos, es la velocidad promedio del flujo, obtenida a partir de la ecuación de la continuidad. En el plano vertical aguas abajo del vertedor se asigna como salida libre del flujo a la atmósfera, la condición de salida es la presión atmosférica. Las paredes del canal y del vertedor son consideradas como estacionarias y antideslizantes con rugosidad de  $1.6 \cdot 10^{-9}$  m (rugosidad absoluta del polietileno de alta densidad) (figura 5A).

**Tabla 2.** Condiciones de frontera.

<b>Condiciones de frontera</b>	
<b>Entrada</b>	Velocidad (aguas arriba). Presión atmosférica (área superior del canal).
<b>Salida</b>	Presión atmosférica (aguas abajo).
<b>Sólido</b>	Vertedor. Paredes laterales y plataforma del canal.
<b>Simetría</b>	Plano lateral y perpendicular al eje del vertedor.

La base de un desarrollo adecuado y ajustado a las condiciones físicas de un modelo computacional es el esquema numérico que resuelva de forma aproximada las ecuaciones que describen el flujo. Debido a que es un flujo bifásico (agua-aire) y de superficie libre, se le asigna el modelo de multifase VOF y el modelo de turbulencia k-ε por ser el método simple más completo de menor costo computacional para simular la turbulencia demostrando su ventaja en flujos confinados e internos (Fernández, 2012) y en flujos a superficie libre (Chanel y Doering, 2008; Olsen *et al.*, 1998; San Mauro *et al.*, 2016; Jiang *et al.*, 2018).

El acoplamiento de presión-velocidad se realizó con el algoritmo SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure Linkek Equations), se aproxima a la convergencia a través de una serie de campos intermedios de presión y velocidad que va satisfaciendo la continuidad (Fernández, 2012). El uso del sistema de discretización espacial "Upwind" asegura esquemas estables pero su característica de primer orden lo hace sensible a errores de difusión numérica; dichos errores pueden minimizarse empleando esquemas de discretización de orden superior (Fernández, 2012).

Se realizaron 45 escenarios de simulaciones; en la Tabla 3 se muestran los distintos escenarios de simulación llevados a cabo. Como indicador de medición de calidad entre los resultados numéricos y los experimentales se utilizó el coeficiente de determinación de Pearson,  $R^2$ , que nos permite determinar las dispersiones que existe entre los resultados numéricos con los experimentales;  $R^2$  es adimensional y puede tomar valores de 0 a 1, el ajuste es bueno si  $R^2$  es cercano a 1 y se expresa con la ecuación 10.

$$R^2 = \frac{\sigma_{num,exp}^2}{\sigma_{num}^2 \sigma_{exp}^2} \quad (10)$$

Dónde:  $\sigma_{num,exp}$  es la covarianza de los resultados numéricos y experimentales,  $\sigma_{exp}^2$  es la varianza de los resultados experimentales y  $\sigma_{num}^2$  es la varianza de los resultados numéricos.

Flores *et al.* (2014) mencionan parámetros para evaluar la calidad de la malla. La calidad ortogonal (Orthogonal quality) puede tener valores que varían de cero a uno, una malla de excelente calidad tiene valores cercanos a uno. La relación de aspecto (Aspect ratio) mide la estrechez de la celda; para una malla con formas equiláteras geométricas será de buena calidad si este parámetro será igual a uno, mientras que una malla con formas irregulares será de buena calidad si este parámetro es mayor que uno. La oblicuidad de las celdas (Skewness) que puede tener valores que varían de uno a cero, una malla de excelente calidad tiene valores de este parámetro cercanos a cero. Los resultados obtenidos indican que la calidad de la malla es estadísticamente aceptable. La tabla 4 muestra los valores de los parámetros utilizados para evaluar la calidad de la malla.

Tabla 3. Escenarios de simulación.

Escenario	$\alpha$ (°)	P (cm)	L <sub>ciclo</sub> (cm)	w/P	N	Gasto (l s <sup>-1</sup> )	Perfil de cresta	Tipo de ápice
1	15	30.48	200.00	2.008	2	0.01895	CR	Trapezoidal
2,11,16,21	15	30.48	200.00	2.008	2	0.05324	CR, MR, CV, WES	Trapezoidal
3	15	30.48	200.00	2.008	2	0.09194	CR	Trapezoidal
4,12,17,22	15	30.48	200.00	2.008	2	0.13078	CR, MR, CV, WES	Trapezoidal
5	15	30.48	200.00	2.008	2	0.16812	CR	Trapezoidal
6,13,18,23	15	30.48	200.00	2.008	2	0.20356	CR, MR, CV, WES	Trapezoidal
7	15	30.48	200.00	2.008	2	0.23728	CR	Trapezoidal
8,14,19,24	15	30.48	200.00	2.008	2	0.26969	CR, MR, CV, WES	Trapezoidal
9	15	30.48	200.00	2.008	2	0.30128	CR	Trapezoidal
10,15,20,25	15	30.48	200.00	2.008	2	0.33253	CR, MR, CV, WES	Trapezoidal
26,31,36,41	15	30.48	200.00	2.008	2	0.05324	CR, MR, CV, WES	Circular
27,32,37,42	15	30.48	200.00	2.008	2	0.13078	CR, MR, CV, WES	Circular
28,33,38,43	15	30.48	200.00	2.008	2	0.20356	CR, MR, CV, WES	Circular
29,34,39,44	15	30.48	200.00	2.008	2	0.26969	CR, MR, CV, WES	Circular
30,35,40,45	15	30.48	200.00	2.008	2	0.33253	CR, MR, CV, WES	Circular

CR= Cuarto redondeo. CV= Cresta viva.

MR= Medio redondeo. W = Cresta tipo WES

Tabla 4. Evaluación de la calidad de malla.

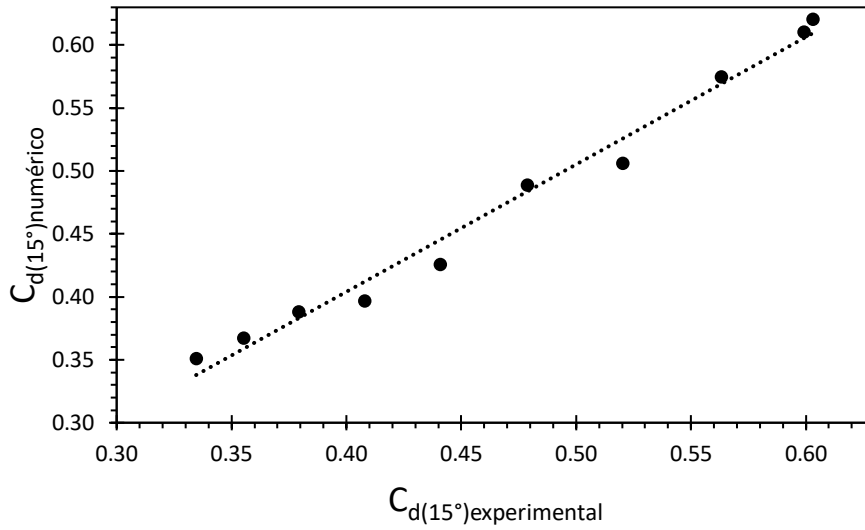
Escenario	Nro. de elementos	Parámetros de calidad		
		Aspect Ratio	Orthogonal Quality	Skewness
1-10	607,334	4.06	0.814	0.185
11-15	607,095	4.09	0.811	0.188
16-20	627,712	3.998	0.817	0.182
21-25	617,748	4.043	0.811	0.188
26-30	606083	4.076	0.813	0.186
31-35	1'108,612	3.573	0.816	0.184
36-40	624,946	4.016	0.814	0.186
41-45	619,166	4.058	0.811	0.188

### 3. Resultados y discusión

#### 3.1. Evaluación del modelo numérico

La evaluación del modelo computacional está basada en el modelo físico reportado por Crookston *et al.* (2012a), los resultados numéricos para obtener el coeficiente de descarga corresponden a 10 diferentes simulaciones, escenarios 1-10. Al igual que Crookston *et al.* (2012a), se utilizó la ecuación 1 para obtener el valor del coeficiente de descarga. En la figura 8 son comparados los coeficientes de descarga obtenidos numéricamente contra los resultados experimentales; se

obtuvo un coeficiente de determinación  $R^2= 0.984$ , lo que indica que los resultados obtenidos numéricamente son aceptables en relación con los resultados experimentales.



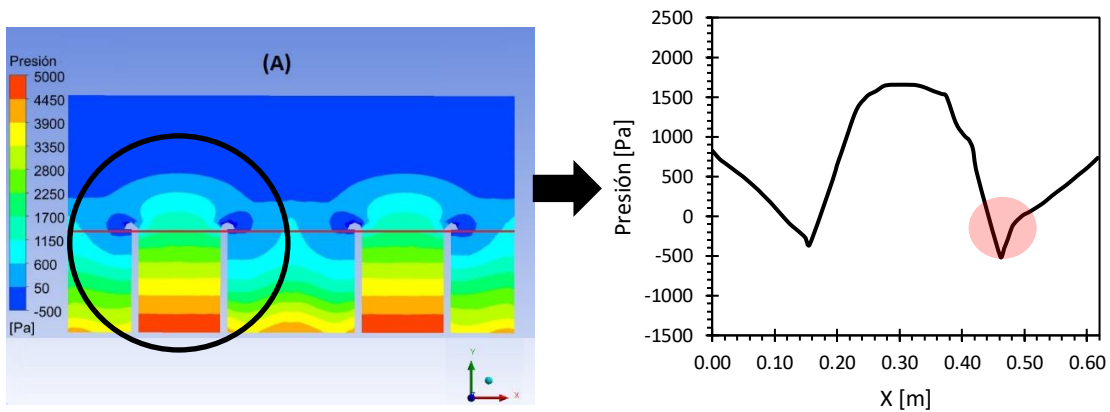
**Figure 8.** Comparación de los coeficientes de descarga obtenidos numéricamente contra los resultados experimentales.

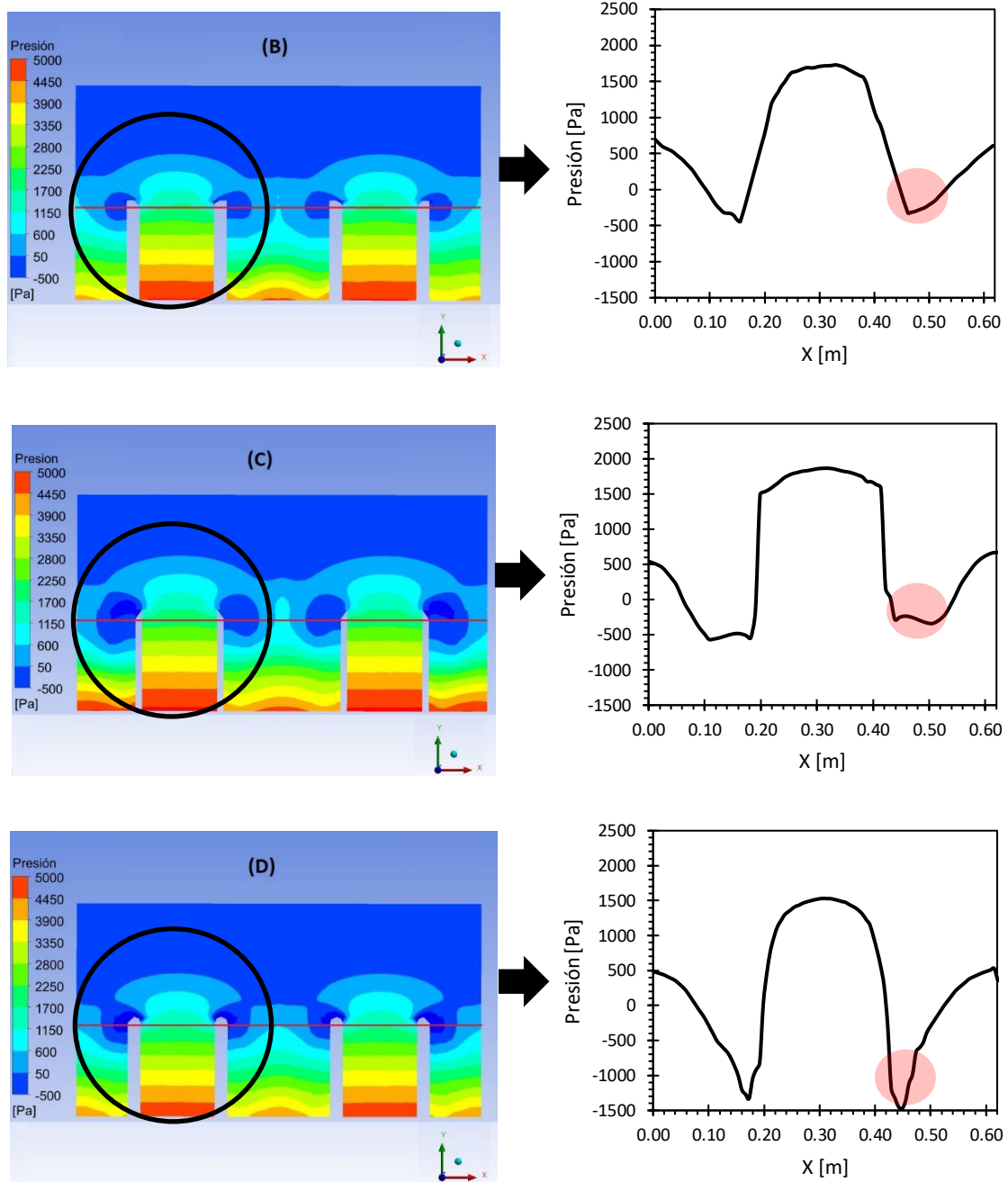
3.2. Efecto de la variación geométrica del perfil y del ápice del vertedor tipo laberinto en el coeficiente de descarga

El efecto de la variación geométrica del perfil de la cresta vertedora no sólo se refleja en el coeficiente de descarga del vertedor, también en la magnitud y el tamaño de área de las presiones que se presentan en las paredes laterales del vertedor tipo laberinto.

Las presiones en las paredes del vertedor tipo laberinto disminuyen cuando el gasto sobre el vertedor incrementa o se produce el fenómeno de ahogamiento. En los escenarios 10, 15, 20 y 25 las presiones fueron caracterizadas y medidas a 26 cm del fondo del canal (figura 9) para un solo ciclo del vertedor ( $w=0.6$  m).

Los resultados presentados en la figura 9 muestran presiones negativas o subatmosféricas en las paredes laterales del vertedor; entre los perfiles analizados el de medio redondeo presenta mayor presión negativa (-1500 Pa) mientras que el perfil de cresta viva incrementó la presión en 76% (-350 Pa), sin embargo, el perfil de cresta viva presenta mayor área de presión negativa y el perfil tipo WES disminuye el área de presión negativa en casi 50%.





**Figura 9.** Distribución de presiones en las paredes laterales aguas abajo del vertedor tipo laberinto. Escenarios: 10, 15, 20, 25. **(A)** WES **(B)** Cuarto redondeo **(C)** Cresta viva **(D)** Medio redondeo.

Los resultados del coeficiente de descarga de los vertedores tipo laberinto de ápice trapezoidal y circular son presentados en forma gráfica en función de la relación  $H_T/P$  en las figura 10 y 11 respectivamente.

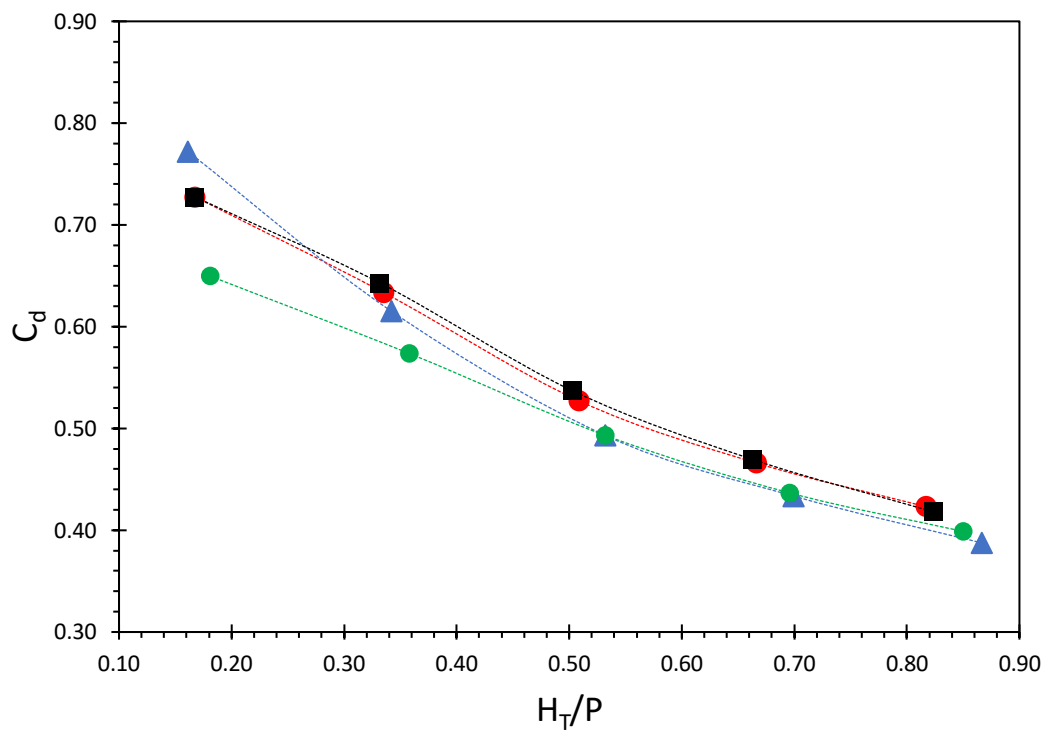


Figura 10. Comparación del coeficiente de descarga en vertedores tipo laberinto de ápice trapezoidal.

Medio redondeo ■, WES ●, cuarto redondeo ●, cresta viva ▲

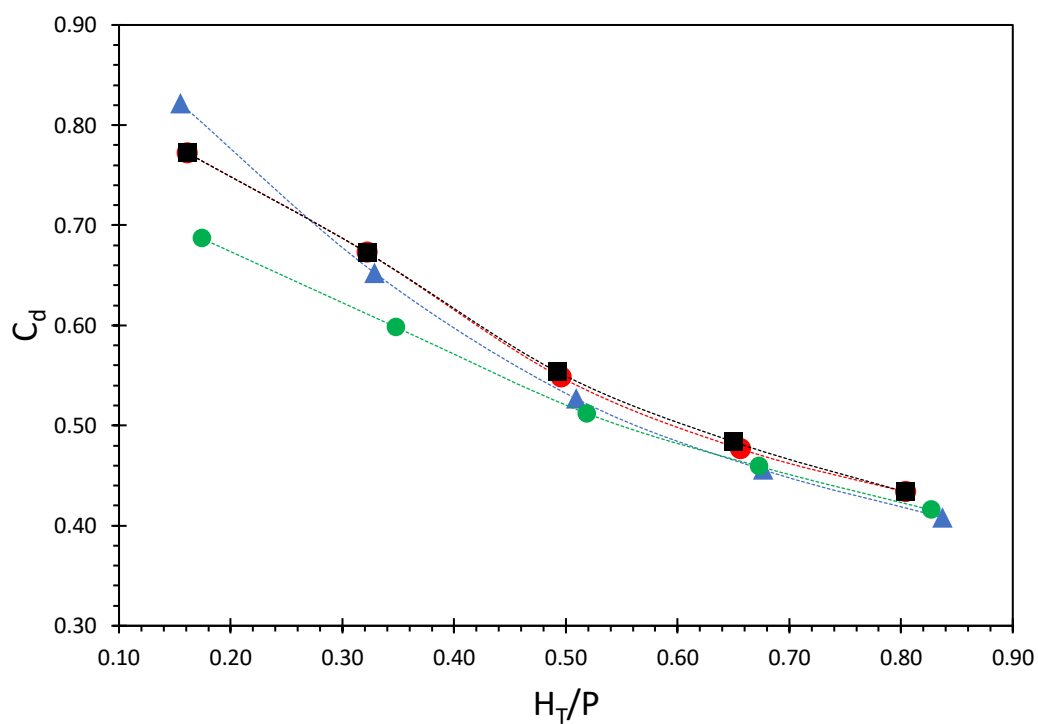


Figura 11. Comparación del coeficiente de descarga en vertedores tipo laberinto de ápice circular.

Medio redondeo ■, WES ●, cuarto redondeo ●, cresta viva ▲

Como se observa en las figuras 10 y 11, los vertedores con forma de cresta de cuarto redondeo presentan menor eficiencia que el resto de los perfiles; sin embargo, el perfil de cresta viva tiene similar comportamiento a partir de valores de  $H_T/P > 0.5$ . Entre los vertedores de ápice trapezoidal y circular, son los de ápice circular que poseen mayor coeficiente de descarga, en promedio 4.72%, y por lo tanto mayor eficiencia en el funcionamiento del vertedor; los perfiles tipo WES y medio redondeo tienen igual comportamiento y mayor eficiencia que los demás perfiles, pero el perfil de medio redondeo, desde el punto de vista constructivo presenta mayor facilidad.

En vertedores tipo laberinto de ápice trapezoidal, la dirección perpendicular del flujo con respecto al ápice aguas arriba provoca la reducción de la velocidad de descarga e incremento de la carga hidráulica junto con mayor ensanchamiento de la lámina vertiente. Un vertedor de ápice circular presenta una transición suave en la sección del ápice permitiendo mejorar hidráulicamente el funcionamiento del vertedor tipo laberinto.

#### 4. Conclusiones

Los estudios experimentales reportados en la bibliografía permitieron evaluar numéricamente en CFD los coeficientes de descarga de vertedores tipo laberinto. De acuerdo a los resultados numéricos los coeficientes de descarga calculados son aceptables, en relación a las obtenidas experimentalmente, se obtuvo un coeficiente de determinación igual a 0.984.

La variación geométrica del vertedor tipo laberinto permitió determinar que un vertedor con ápice circular posee mayor coeficiente de descarga que el vertedor de ápice trapezoidal, incrementando en promedio 4.7%. En vertedores trapezoidales tipo laberinto, las líneas de corriente llegan con dirección perpendicular con respecto al ápice del vertedor en aguas arriba, la colisión entre el flujo y el ápice reduce la velocidad de descarga, éste fenómeno incrementa la altura de la carga hidráulica y consecuentemente la reducción del coeficiente de descarga del vertedor.

Para elevadas cargas, los cuatro perfiles de cresta analizados presentaron presiones subatmosféricas en las paredes laterales del vertedor; de todas el de medio redondeo presentó mayor presión negativa (-1500 Pa) mientras que el de cresta viva incremento la presión en 76% (-350 Pa), sin embargo, posee mayor área de presión negativa, el perfil tipo WES logró disminuir el área de presión negativa en casi 50%. El perfil medio redondeo y el tipo WES presentan mayor coeficiente de descarga; tienen valores similares de coeficiente de descarga, sin embargo, por facilidad constructiva es recomendable utilizar el perfil de medio redondeo

#### Nomenclatura

A	longitud interna del ápice.
B	longitud entre ápices.
$C_d$	coeficiente de descarga.
$C_{\mu}, C_{1\epsilon}, C_{2\epsilon}$	constantes del modelo turbulento K- $\epsilon$ .
D	longitud externa del ápice.
<b>f</b>	fuerzas del cuerpo por unidad de masa.
g	aceleración de la gravedad.
$H_T$	carga total.
h	carga piezométrica.
K	energía cinética turbulenta.
L	longitud total.
$L_e$	longitud característica.
$l_c$	longitud de la pared lateral del ciclo.



$\dot{m}_{pq}$	transferencia de masa de la fase p a la fase q.
$\dot{m}_{qp}$	transferencia de masa de la fase q a la fase p.
N	número de ciclos.
P	altura del vertedor.
$P_K$	generación turbulenta debido a las fuerzas viscosas.
$P_{kb}, P_{\epsilon b}$	fuerzas de flotabilidad.
p	presión dinámica.
Q	gasto de diseño.
$q^{th}$	fase q.
$R^2$	coeficiente de determinación de Pearson.
$S_{\alpha q}$	término fuente.
$t_w$	ancho de la pared del vertedor.
U	campo de velocidad.
$v_q$	velocidad de la fase q.
W	ancho del canal.
w	ancho de un ciclo.
$\alpha$	ángulo de la pared lateral.
$\alpha_q$	fracción de volumen de la fase q.
$\epsilon$	disipación de la energía cinética turbulenta.
$\mu$	viscosidad dinámica.
$\mu_t$	viscosidad turbulenta.
$\rho$	densidad del fluido.
$\rho_q$	densidad de la fase q.
$\sigma_k, \sigma_\epsilon$	constantes del modelo turbulento K- $\epsilon$ .
$\sigma_{num,exp}$	covarianza de los resultados numéricos y experimentales.
$\sigma^2_{exp}$	varianza de los resultados experimentales.
$\sigma^2_{num}$	varianza de los resultados numéricos.

## Referencias

42. Arreguín Cortés, F. I. (2005). *Cavitación y aireación en obras de excedencia* (No. 620.1064 A7).
43. Bautista, C.; Robles, O.; JÚnez, F. H.; Playán, E. (2013). Discharge coefficient analysis for triangular sharp-crested weirs using low-speed photographic technique. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, 140, 06013005.
44. Bos, M. G., Replogle, J. A., & Clemmens, A. J. (1986). *Flow measuring flumes for open channel systems*; International institute for land reclamation and improvement, Wageningen, The Netherlands, p. 40.
45. Chanel, P. G., & Doering, J. C. (2008). Assessment of spillway modeling using computational fluid dynamics. *Canadian Journal of Civil Engineering*, 35(12), 1481-1485.
46. Crookston, B. M. (2010). *Labyrinth weirs*. Ph.D. Dissertation. Utah State University, Logan, Utah.
47. Crookston, B. M., & Tullis, B. P. (2012a). Hydraulic design and analysis of labyrinth weirs. I: Discharge relationships. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, 139(5), 363-370.
48. Crookston, B. M., & Tullis, B. P. (2012b). Labyrinth weirs: Nappe interference and local submergence. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, 138(8), 757-765.
49. Crookston, B. M., Paxson, G. S., & Savage, B. M. (2012). Hydraulic performance of labyrinth weirs for high headwater ratios. In *The 4th IAHR International Symposium on Hydraulic Structures, Porto, Portugal* (pp. 1-8).

50. Darvas, L. A. (1971). Discussion of performance and design of labyrinth weirs, by Hay and Taylor. *American Society of Civil Engineering, Journal of Hydraulic Engineering*, 97(80), 1246-1251.
51. Emiroglu, M. E., Kaya, N., & Agaccioglu, H. (2009). Discharge capacity of labyrinth side weir located on a straight channel. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, 136(1), 37-46.
52. Falvey, H. T. (2003). *Hydraulic design of labyrinth weirs*. Reston, VA: ASCE Press (American Society of Civil Engineers).
53. Fernández, J. M. (2012). *Técnicas numéricas en Ingeniería de Fluidos: Introducción a la Dinámica de Fluidos Computacional (CFD) por el Método de Volumen Finito*; Reverté, Barcelona, pp. 98-294.
54. Flores, V. J.; López, C. I.; Mejía, S. E.; Montero, C. J. (2014). Evaluación del desempeño climático de un invernadero Baticenital del centro de México mediante Dinámica de Fluidos Computacional (CFD). *Agrociencia*, 48, 131-146.
55. Hay, N., & Taylor, G. (1970). Performance and design of labyrinth weirs. *Journal of the Hydraulics Division*, 96(11), 2337-2357.
56. Hinchliff, D., and Houston, K. (1984). Hydraulic design and application of labyrinth spillways. *Proc. of 4th Annual USCOLD Lecture*.
57. Hirt, C. W., and Nichols, B. D. (1981). Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries. *Journal of computational physics*, 39(1), 201-225.
58. Houston, K. (1982). *Hydraulic model study of Ute Dam labyrinth spillway*. Report No. GR-82-7, U.S. Bureau of Reclamation, Denver.
59. Jiang, L.; Diao, M.; Sun, H.; Ren, Y. (2018). Numerical Modeling of Flow Over a Rectangular Broad-Crested Weir with a Sloped Upstream Face. *Water*, 10, 1663.
60. Johnson, M. C. (1996). *Discharge coefficient scale effects analysis for weirs* (Doctoral dissertation, Utah State University. Department of Civil and Environmental Engineering).
61. Jones, W. P., & Launder, B. E. (1972). The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence. *International journal of heat and mass transfer*, 15(2), 301-314.
62. Launder, B.E. y D.B. Spalding. (1974). The Numerical Computation of Turbulence Flow, *Comp. Meth. In Appl. Mech. And Engineering*, 3, 269-289.
63. Lopes, R., Matos, J., & Melo, J. (2006, December). Discharge capacity and residual energy of labyrinth weirs. In *Proc. of the Int. Junior Researcher and Engineer Workshop on Hydraulic Structures (IJREWHWS '06)* (pp. 47-55).
64. Lopes, R., Melo, J. F., & Matos, J. (2008). Characteristic depths and energy dissipation downstream of a labyrinth weir. In *Hydraulic Structures* (pp. 51-58). PLUS-Pisa University Press.
65. Lux III, F. (1984). Discharge characteristics of labyrinth weirs. In *Water for Resource Development* (pp. 385-389). ASCE.
66. Lux, F., III (1989). Design and application of labyrinth weirs. *Design of hydraulic structures* 89, M. Alberson and R. Kia, eds., Balkema, Rotterdam, Netherlands, 205-215.
67. Lux, F., III, and Hinchliff, D. (1985). Design and construction of labyrinth spillways. *15th Congress ICOLD, Vol. IV, Q59-R15, ICOLD, Paris*, 249-274.
68. Magalhães, A., and Lorena, M. (1989). *Hydraulic design of labyrinth weirs*. Report No. 736, National Laboratory of Civil Engineering, Lisboa, Portugal.
69. Melo, J., Ramos, C., and Magalhães, A. (2002). Descarregadores com soleira em labirinto de um ciclo em canais convergentes determinação da capacidade de vazão. In *Proc. 6º Congresso da Água*. Lisboa, Portugal.
70. Olsen, N. R.; Nils R. B.; Kjellesvig H. M. (1998). Three-dimensional numerical flow modeling for estimation of spillway capacity. *J. Hydr. Res.* 36, 775-784.
71. Paxson, G., & Savage, B. (2006). Labyrinth spillways: comparison of two popular USA design methods and consideration of non-standard approach conditions and geometries. In *International Junior Researcher and Engineer Workshop on Hydraulic Structures, Report CH61/06, Brisbane, Australia*.
72. San Mauro, J., Salazar, F., Toledo Municio, M. A., Caballero, F. J., Ponce Farfán, C., & Ramos, T. (2016). Modelación física y numérica de aliviaderos en laberinto con fondo poliédrico. *Ingeniería del agua*, 20(3), 127-138.

73. Sánchez, J. M. C., & Elsitdié, L. G. C. (2011). Consideraciones del mallado aplicadas al cálculo de flujos bifásicos con las técnicas de dinámica de fluidos computacional. *Jornadas de introducción a la investigación de la UPCT*, (4), 33-35.
74. Savage, B., Frizell, K., & Crowder, J. (2004). Brains versus brawn: the changing world of hydraulic model studies. In *Proceedings of the 2004 annual conference, Association of State Dam Safety Officials (ASDSO), Phoenix, USA*.
75. Taylor, G. (1968). *The performance of labyrinth weirs*. Ph.D. thesis, University of Nottingham, Nottingham, England.
76. Tullis, J. P., Amanian, N., and Waldron, D. (1995). Design of labyrinth spillways. *Journal of hydraulic engineering*, 121(3), 247-255.
77. Tullis, B. P., Young, J. C., & Chandler, M. A. (2007). Head-discharge relationships for submerged labyrinth weirs. *Journal of Hydraulic Engineering*, 133(3), 248-254.
78. United States Bureau of Reclamation (USBR). (2001). *Water measurement manual*, Denver, Colorado.
79. Willmore, C. (2004). *Hydraulic characteristics of labyrinth weirs*. M.S. report, Utah State University, Logan, Utah.
80. Wormleaton, P. R., & Soufiani, E. (1998). Aeration performance of triangular planform labyrinth weirs. *Journal of environmental engineering*, 124(8), 709-719.