



IMTA
INSTITUTO MEXICANO
DE TECNOLOGÍA
DEL AGUA

SEMARNAT
SECRETARÍA DE
MEDIO AMBIENTE
Y RECURSOS NATURALES



Instituto Mexicano de Tecnología del Agua Coordinación de Riego y Drenaje



Medición de Flujo de Agua

José J. Ramírez Luna
Ulises Dehesa Carraco
Pablo Camacho Peralta

Diciembre 2016

IMTA
Coordinación de Riego y Drenaje

Medición del flujo de agua

José Javier Ramírez Luna, Ulises Dehesa Carrasco
y Pablo Camacho Peral

México 2016

631.587 Ramírez Luna, José Javier; Dehesa Carrasco, Ulises; Camacho Peral, Pablo

R52 *Medición del flujo de agua* / José Javier Ramírez Luna; Ulises Dehesa Carrasco; Pablo Camacho Peral. - - Jiutepec, Mor. : Instituto Mexicano de Tecnología del Agua © 2016.

174 pp.

ISBN 978-607-9368-75-3

1. Medición de canales 2. Modelos matemáticos 3. Aplicación en campo

Autores:

José Javier Ramírez Luna

Ulises Dehesa Carrasco

Pablo Camacho Peral

Responsable de la edición:

Rebeca Gerardo Tavira

Coordinación editorial:

Fátima Sánchez Bonilla

Primera edición: 2016

D.R. © Instituto Mexicano de Tecnología del Agua

Paseo Cuauhnáhuac 8532

62550 Progreso, Jiutepec, Morelos

México

www.gob.mx/imta

ISBN 978-607-9368-75-3

Prohibida la reproducción parcial o total, por cualquier medio mecánico, electrónico, de fotocopias, térmico u otros, sin permiso de los autores

Impreso en México – Printed in Mexico

PRÓLOGO

La gran mayoría de las zonas agrícolas de México y del mundo cuentan con sistemas de riego por gravedad en donde se entrega el servicio de riego en regaderas que funcionan en flujo a superficie libre. La medición del agua en la parcela se puede hacer con tecnología comercial a costos sumamente elevados si se determina el caudal continuamente para el cobro del servicio de riego por volumen. Aun así, el costo de la medición puntual es elevada si se considera el desplazamiento al sitio, el recorrido de la red de distribución, el costo del uso del vehículo y del combustible y el pago del ingeniero que realiza los aforos. De este hecho, el volumen así estimado no es válido en el cobro del servicio de riego por volumen.

Este documento aporta una solución al problema de medir el flujo a superficie libre y promover la entrega y cobro del servicio de riego por volumen. La solución consiste en una propuesta de ecuaciones de caudal para vertedores, incluidos los aforadores de garganta larga, en régimen de descarga ahogada o libre y también para compuertas deslizantes. Estas estructuras funcionan para disponibilidad elevada, baja o casi nula de carga hidráulica y por ende resuelven desde el punto de vista hidráulico la medida de caudal en función de las cargas arriba o abajo, o en su caso, además de la apertura de la compuerta. En todos los casos se utilizan los principios de conservación de masa, de energía y de cantidad de movimiento en dos o tres secciones.

El documento presenta el desarrollo tecnológico de medidores del tipo SOLO que sirve para medir una carga aguas arriba y relacionarla con la ecuación de caudal en un vertedor o aforador funcionando a descarga libre. Se presenta también el tipo DUO para medir una carga aguas arriba y aguas abajo, para medir el caudal en un vertedor o aforador a descarga ahogada, o bien para medir la carga aguas arriba y la apertura en el caso de una compuerta deslizante a descarga libre. Final mente está el tipo TRIO para medir carga aguas arriba, aguas abajo y apertura de compuerta en el caso de compuerta deslizante a descarga ahogada.

La tecnología y las ecuaciones han sido probadas en campo y se ha demostrado que se puede medir el caudal y el volumen del servicio de riego con tecnología de bajo costo desarrollada en el Instituto Mexicano de Tecnología del Agua (IMTA). En todos los casos el error de medición del caudal varía del 2 % (vertedor a descarga libre) al 10 % (compuerta deslizante ahogada o en flujo mixto).

José Javier Ramírez Luna

Medición del flujo de agua

CONTENIDO

CAPÍTULO 1 INTRODUCCIÓN

José Javier Ramírez Luna

CAPÍTULO 2 CONSTRUCCIÓN DE ECUACIONES DE GASTO

José Javier Ramírez Luna, Pablo Camacho Peral y Ulises Dehesa Carrasco

CAPÍTULO 3 ANÁLISIS GRÁFICO Y EXPERIMENTAL

José Javier Ramírez Luna, Pablo Camacho Peral y Ulises Dehesa Carrasco

CAPÍTULO 4 APLICACIONES Y EXPERIMENTOS EN LABORATORIO

José Javier Ramírez Luna, Pablo Camacho Peral y Ulises Dehesa Carrasco

CAPÍTULO 5 REFERENCIAS

Autores¹

Instituto Mexicano de Tecnología del Agua (IMTA)

José Javier Ramirez Luna



Cátedras CONACyT

Ulises Dehesa Carrasco



Universidad Autónoma Chapingo (UACH)

Pablo Camacho Peralta



¹ Por orden alfabético

ÍNDICE DE CONTENIDO

CAPÍTULO 1	3
FUNDAMENTOS DE LA MEDICIÓN DE CAUDALES	3
1.1 LA IMPORTANCIA DEL RIEGO	3
1.2 EL PROBLEMA MECÁNICO	3
1.3 PRINCIPIO GENERAL DE GASTO MÁXIMO	10
1.4 EL PUNTO GEOMÉTRICO	13
CAPÍTULO 2	17
CONSTRUCCIÓN DE ECUACIONES DE GASTO	17
2.1 INTRODUCCIÓN	17
2.2 APROXIMACIÓN ANALÍTICA	17
2.2.1 <i>Estructuras tipo vertedor</i>	17
2.2.1.1 Funciones E-E	18
2.2.1.2 Funciones E-M	24
2.2.1.2.1 Desarrollo limitado en tirante aguas abajo	25
2.2.1.2.2 Desarrollo limitado en tirante aguas arriba	28
2.2.1.3 Funciones M-M	30
2.2.1.3.1 Desarrollo limitado aguas abajo	32
2.2.1.4 Funciones M-E	34
2.2.1.4.1 Desarrollo limitado aguas abajo	35
2.2.1.4.2 Desarrollo limitado aguas arriba	36
2.2.2 <i>Estructuras tipo orificio</i>	37
2.2.2.1 Funciones E-E	37
2.2.2.1.1 Descarga libre	37
2.2.2.1.2 Descarga ahogada	38
2.2.2.2 Funciones E-M	39
2.2.2.2.1 Desarrollo limitado aguas abajo	39
2.2.2.2.2 Desarrollo limitado en tirante aguas arriba	41
2.2.2.3 Funciones M-M	42
2.2.2.3.1 Descarga libre	42
2.2.2.3.2 Descarga ahogada	43
2.2.2.4 Funciones M-E	44
2.2.2.4.1 Desarrollo limitado aguas abajo	44
2.2.2.4.2 Desarrollo limitado aguas arriba	45
2.2.3 <i>Ecuaciones analíticas de estructuras tipo vertedor</i>	46
2.2.3.1 Funciones E-E	46
2.2.3.2 Funciones E-M	46
2.2.3.2.1 Sección rectangular	47
2.2.3.2.2 Sección triangular	48

ÍNDICE DE CONTENIDO

2.2.3.3 Funciones M-M.....	49
2.2.3.1 Funciones M-E	49
2.2.3.1.1 Sección rectangular.....	49
2.2.3.2 Sección triangular.....	51
2.2.4 Estructuras tipo orificio	52
2.2.4.1 Funciones E-M.....	52
2.2.4.1.1 Sección rectangular.....	53
2.2.4.1.2 Sección triangular.....	54
2.2.4.2 Funciones M-M.....	55
2.2.4.3 Funciones M-E	56
CAPÍTULO 3	59
ANÁLISIS GRÁFICO Y EXPERIMENTAL	59
3.1 COMPARACIÓN DE ECUACIONES POR MÉTODO.....	59
3.1.1 Estructuras tipo vertedor.....	59
3.1.1.1 Método E-E	59
3.1.1.2 Método E-M.....	65
3.1.1.3 Método M-M	71
3.1.1.4 Método M-E.....	74
3.2 COMPARACIÓN DE ECUACIONES POR APROXIMACIÓN.....	80
3.3 COMPARACIÓN DE ECUACIONES ANALÍTICAS.....	82
3.3.1 Método E-M	82
3.3.2 Método M-E	85
3.4 ESTRUCTURAS TIPO ORIFICIO	88
3.4.1 Funciones E-E	88
3.4.2 Funciones E-M.....	89
3.4.3 Funciones M-M.....	92
3.4.4 Funciones M-E.....	92
3.5 APROXIMACIONES ANALÍTICAS	92
3.5.1 Método E-M	92
CAPÍTULO 4	97
APLICACIONES Y EXPERIMENTOS DE LABORATORIO	97
4.1 INSTRUMENTACIÓN DE CAUDAL.....	97
4.1.1 Caudalímetro SOLO	97
4.1.2 Caudalímetro DUO	98
4.1.3 Caudalímetro TRIO.....	100
4.2 DATOS EXPERIMENTALES DISPONIBLES.....	101
4.3 APLICACIONES Y DATOS EXPERIMENTALES	110

ÍNDICE DE CONTENIDO

4.3.1 SOLO	110
4.3.2 <i>Recopilación de información de los medidores</i>	113
4.3.3 DUO	114
4.3.4 <i>Resultados de prueba de laboratorio</i>	118
4.3.5 TRIO	119
4.3.5.1 Primera opción: caudal en régimen ahogado	120
4.3.5.2 Diseño hidráulico	121
4.3.5.3 Prototipo de diseño de compuerta para equipos de medición TRIO	125
4.3.6 <i>Elaboración de estructuras de medición de caudal en condiciones de régimen mixto</i>	126
4.3.7 <i>Instalación y calibración de 14 equipos de medición de caudal en las estructuras de medición</i>	134
4.3.8 <i>Instalación y ubicación de equipos de medición en campo</i>	135
4.3.9 <i>Pruebas de envío de información equipos de medición de caudal instalados en campo</i>	144
4.3.10 <i>Alta de medidores en el sistema ICAM Riego</i>	145
4.3.11 <i>Alta de riegos</i>	147
4.3.12 <i>Envío de información al sistema ICAM-Riego de los equipos de medición de caudal</i>	150
CAPÍTULO 5	155
REFERENCIAS	155

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1.1 El problema mecánico	4
Figura 1.2 Formulación del problema	4
Figura 1.3 Representación conceptual del caudal tautócrono	7
Figura 1.4 El principio de caudal máximo	10
Figura 2.1 El punto geométrico.....	18
Figura 3.1 El punto geométrico.....	60
Figura 3.2 Caudal de descarga libre y ahogada en sección rectangular	61
Figura 3.3 Gráfica para sección rectangular.....	61
Figura 3.4 Caudal de descarga libre y ahogada en sección triangular	62
Figura 3.5 Gráfica de descarga en sección triangular	62
Figura 3.6 Coeficientes de descarga libre y ahogada en sección trapecial con $b=0.5$ m y $k=1$	63
Figura 3.7 Coeficientes de descarga en sección trapecial con $b=0.5$ y $k=1$	64
Figura 3.8 Coeficientes de descarga en sección trapecial con $b=0.4$ m y $k=1.5$	64
Figura 3.9 Coeficientes de descarga en sección trapecial con $b=0.3$ m y $k=2.0$	65
Figura 3.10 Coeficiente de descarga en sección rectangular	66
Figura 3.11 Coeficiente de descarga en sección triangular	67
Figura 3.12 Coeficiente de descarga en sección trapecial $b=0.5$ y $k=1$	67
Figura 3.13 Coeficiente de descarga en sección trapecial $b=0.3$ y $k=2$	68
Figura 3.14 Coeficientes de descarga para sección rectangular	69
Figura 3.15 Coeficientes de descarga para sección triangular	69
Figura 3.16 Coeficientes de descarga para sección trapecial con $b=0.50$ m y $k=1$	70
Figura 3.17 Coeficientes de descarga para sección trapecial con $b=0.30$ m y $k=2$	71
Figura 3.18 Coeficientes de descarga para sección rectangular	72
Figura 3.19 Coeficientes de descarga para sección triangular	73
Figura 3.20 Coeficientes de descarga para sección trapecial con $b=0.50$ m y $k=1$	73
Figura 3.21 Coeficientes de descarga para sección trapecial con $b=0.30$ m y $k=2.0$...	74
Figura 3.22 Coeficientes de descarga para sección rectangular	75
Figura 3.23 Coeficientes de descarga para sección triangular	76
Figura 3.24 Coeficientes de descarga para sección trapecial con $b=0.50$ m y $k=1$	76
Figura 3.25 Coeficientes de descarga para sección trapecial con $b=0.30$ m y $k=2$	77
Figura 3.26 Coeficientes de descarga para sección rectangular	78

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 3.27	Coeficientes de descarga para sección triangular	78
Figura 3.28	Coeficientes de descarga para sección trapezoidal con $b=0.50$ m y $k=1$	79
Figura 3.29	Coeficientes de descarga para sección trapezoidal con $b=0.30$ m y $k=2$	79
Figura 3.30	Comparación grafica de los coeficientes obtenidos con las diferentes ecuaciones para sección rectangular	80
Figura 3.31	Comparación grafica de los coeficientes obtenidos con las diferentes ecuaciones para sección triangular	81
Figura 3.32	Comparación grafica de los coeficientes obtenidos con las diferentes ecuaciones para sección trapezoidal $b=0.30$ y $k=2$	82
Figura 3.33	Coeficiente de descarga en sección rectangular	84
Figura 3.34	Coeficiente de descarga en sección triangular	85
Figura 3.35	Coeficiente de descarga en sección rectangular	86
Figura 3.36	Coeficiente de descarga en sección triangular	87
Figura 3.37	Coeficiente de gasto a descarga libre en sección rectangular	88
Figura 3.38	Coeficiente de descarga en sección rectangular	90
Figura 3.39	Coeficiente de descarga en sección triangular	90
Figura 3.40	Coeficiente de descarga en sección trapezoidal $b=0.5$ y $k=1$	91
Figura 3.41	Coeficiente de descarga en sección trapezoidal $b=0.3$ y $k=2$	91
Figura 3.42	Coeficiente de descarga en sección rectangular	93
Figura 3.43	Coeficiente de descarga en sección triangular	94
Figura 4.1	Caudalímetro SOLO	98
Figura 4.2	Caudalímetro DUO	100
Figura 4.3	Caudalímetro TRIO	101
Figura 4.4	Coeficiente de gasto (C_d) de una compuerta plana vertical según Cofré y Buchheister	102
Figura 4.5	Comparación entre las curvas de Cofré y Buchheister (1954) y las ecuaciones de Swamee (1992)	103
Figura 4.6	Comparación entre las curvas de Cofré y Buchheister (1954) y las de Henderson (1966)	105
Figura 4.7	Comportamiento de las ecuaciones de Henderson (1966) cercano al cambio de régimen	105
Figura 4.8	Comparación entre las curvas de Cofré y Buchheister (1954) y de Habibzadeh <i>et al.</i> (2011)	106

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 4.9 Comportamiento de las ecuaciones de Habibzadeh cercano al cambio de régimen	107
Figura 4.10 Comparación entre las curvas de Cofré y Buchheister (1954) y las de Ramírez (2014-2015)	108
Figura 4.11 Comparación entre las curvas de Cofré y Buchheister (1954) y la ecuación de Ramírez (2014-2015)	109
Figura 4.12 Comparación entre las curvas de Cofré y Buchheister (1954) y la ecuación de Javier Ramírez	110
Figura 4.13 Aforador de garganta larga azolvado en la microcuenca Malacate	111
Figura 4.14 Aforador de garganta larga desazolvado en la microcuenca Malacate ...	111
Figura 4.15 Revisión del funcionamiento de los paneles solares que proporcionan energía a los equipos medidores	111
Figura 4.16 Equipo de medición que se instaló en aforador de la microcuenca Malacate	112
Figura 4.17 Equipo de medición que se instaló en aforador de la microcuenca Ichupio	112
Figura 4.18 Configuración que se realizaba a los equipos cuando presentaba fallos en el envío de la información por GSM	112
Figura 4.19 Ejemplo de registro de información de un sensor ultrasónico durante la presencia de un evento de escurrimiento.....	112
Figura 4.20 Evento de escurrimiento que se presentó en el aforador de la microcuenca Malacate.....	112
Figura 4.21 Evento de escurrimiento que se presentó en el aforador de la microcuenca Ichupio.....	112
Figura 4.22 Sistema de telemetría.....	113
Figura 4.23 Ejemplo de datos recuperados por el sistema de telemetría	113
Figura 4.24 Esquema de AGL y sensores ultrasónicos	114
Figura 4.25 Fotos de pruebas realizadas	115
Figura 4.26 Fotos de pruebas realizadas	116
Figura 4.27 Turbulencia generada por salto hidráulico.....	116
Figura 4.28 Prueba prototipo DUO	118
Figura 4.29 Prueba prototipo DUO	119
Figura 4.30 Prueba prototipo DUO	119
Figura 4.31 Pruebas experimentales descarga libre y ahogada	120
Figura 4.32 Pruebas experimentales descarga ahogada y libre	120

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 4.33 Valores experimentales	121
Figura 4.34 diagrama conceptual de una compuerta.....	121
Figura 4.35 Dibujos de la compuerta	124
Figura 4.36 Diseño de la compuerta.....	125
Figura 4.37 Prototipo de compuerta	125
Figura 4.38 Trazo de estructuras con estacas e hilos, excavación de zanjas y colocación de la plantilla de grava y arena apisonada	126
Figura 4.39 Colocación de malla electro soldada y colocación de concreto	126
Figura 4.40 Toma de medidas para corroborar la calibración de equipo de medición	134
Figura 4.41 Aforo con molinete para obtención de gasto y parámetros de configuración de riego y de estructura de medición	134
Figura 4.42 Puesta en marcha de equipo de medición para pruebas de envío de información.....	144
Figura 4.43 Información obtenida en campo a través de los quipos de medición de caudal.....	144
Figura 4.44 Recepción de información y archivo txt con información obtenida en campo a través de los equipos de medición de caudal.....	145
Figura 4.45 Formulario para dar de alta medidores en el sistema ICAM-RIEGO	146
Figura 4.46 Base de datos de los medidores dados de alta	146
Figura 4.47 Pantalla que muestra los medidores dados de alta por sección	147
Figura 4.48 En la sección de Ubicación podemos consultar la ubicación de los medidores.....	147
Figura 4.49 En la sección de instalación se pueden consultar, eliminar y agregar medidores de medición de caudal	147
Figura 4.50 Captura de información para programación de riegos.....	148
Figura 4.51 Captura de información para programación de riegos.....	148
Figura 4.52 Captura de apagado	149
Figura 4.53 Captura de información	149
Figura 4.54 Pantalla del sistema de medición en funcionamiento	150
Figura 4.55 Pantalla del sistema de medición en funcionamiento	150
Figura 4.56 Datos proporcionados por un medidor instalado de tipo SOLO.....	151

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1.1 Velocidad característica	6
Tabla 4.1 Ejemplo de cambio de régimen	122
Tabla 4.2 Ejemplo de plantilla de cálculo para descarga libre	122
Tabla 4.3 Dimensiones de estructuras de medición.....	122

**Fundamentos de la medición
de caudales**

1

Capítulo 1

FUNDAMENTOS DE LA MEDICIÓN DE CAUDALES

José Javier Ramírez Luna

1.1 La importancia del riego

La medición de los caudales constituye una parte fundamental en el diseño hidráulico de canales y estructuras de control, extracción y de medición. Ya sea en campo o en el laboratorio, la medición del flujo proporciona información esencial para controlar o manejar adecuadamente el recurso hídrico. Las estructuras tipo vertedor y orificio a menudo son empleadas en redes de canales de riego para este propósito. Entre los medidores de flujo, específicamente para canales abiertos, se encuentran las compuertas con descarga de fondo y los vertedores a descarga libre. Estos sistemas suelen ser poco precisos a la hora de medir caudales, porque la medición es indirecta y depende de la carga hidráulica. Sin embargo, brindan valores de medición aceptables que justifica su aplicación en campo.

En el transcurso de los últimos años se ha desarrollado un número significativo de dispositivos que determinan los caudales a partir de variables físicas como carga, velocidad, etc. Todos estos dispositivos se basan en las leyes fundamentales de la mecánica de los fluidos que son transformados en las leyes de descarga de cada tipo de estructura. La aplicación de los principios de conservación de la masa, la energía y la cantidad de movimiento, así como el principio de mínima acción, conducen a la búsqueda de leyes analíticas, primero, mediante el análisis de flujo de una partícula en un campo gravitacional, el caudal se denomina caudal braquistócrono.

1.2 El problema mecánico

El punto de partida es el problema de la braquistócrona o la determinación de curva de descenso más rápido entre los puntos A y B que es recorrida por un cuerpo que comienza en el punto inicial A con velocidad cero, y que debe desplazarse a lo largo de la curva hasta llegar al segundo punto B, bajo acción de una fuerza de gravedad constante y sin rozamiento.

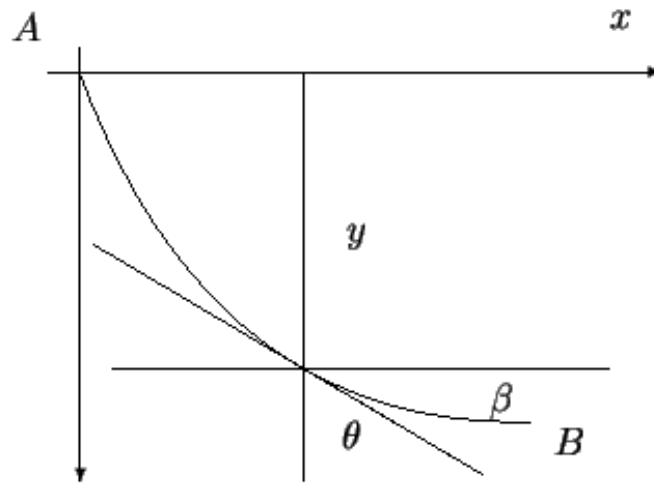


Figura 1.1 El problema mecánico

De la ecuación de energía:

$$y_A = \frac{u_B^2}{2g} + y_B = H = \frac{u^2}{2g} + y; u = \sqrt{2gH} \left(1 - \frac{y}{H}\right)^{\frac{1}{2}}; \varphi = \sqrt{2gH}; \frac{ds}{dt} = -u$$

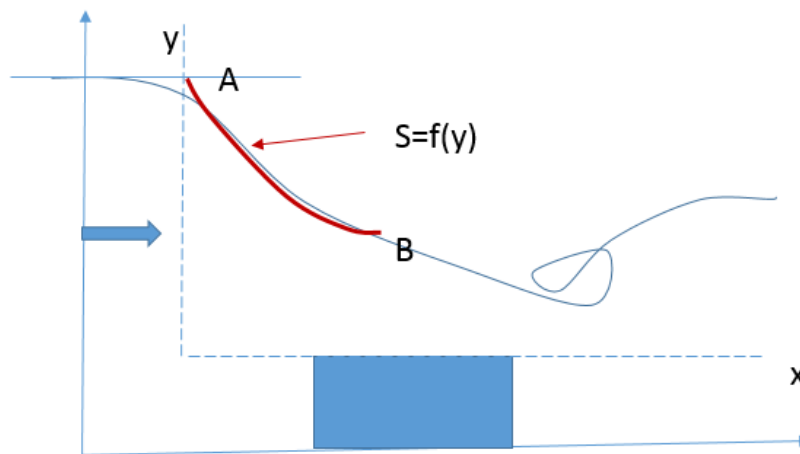


Figura 1.2 Formulación del problema

$$u^+ = \frac{u}{\sqrt{2gH}} = \left(1 - \frac{y}{H}\right)^{\frac{1}{2}}; u^+ = \left(1 - y^+\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.1}$$

$$1 - y^+ = \begin{cases} 0 & \text{ssi } y = H \\ 1 - m & \text{ssi } y = mH, \quad 0 < m < 1 \\ 1 & \text{ssi } y = 0 \end{cases}; \quad 0 \leq 1 - m \leq 1 - y^+ \leq 1$$

que cumple con:

$$0 \leq y^+ \leq m \leq 1$$

La velocidad adimensional como relación de un recorrido de una partícula en la trayectoria $f(y^+)$ y el paso del tiempo, dt , es:

$$S^+ = \frac{S}{L}; \quad t^+ = \frac{t}{T}; \quad \frac{1}{\varphi T} \frac{dS^+}{dt^+} = \frac{1}{\varphi T} \frac{f(y^+) dy^+}{dt^+} = -(1 - y^+)^{\frac{1}{2}}$$

Al seleccionar $\frac{1}{\varphi T} = 1$, y despejando la variable dt^+ se tiene:

$$dt^+ = -\frac{f(y^+)}{(1 - y^+)^{\frac{1}{2}}} dy^+$$

Debido a que la partícula traza una trayectoria en la medida en que la energía potencial se convierte en cinética, el tiempo solo caracteriza una tasa de conversión de dicho proceso. Luego la magnitud de la conversión existente, el tiempo, se obtiene mediante integración:

$$T^+ = \int_0^t dt^+ = \int_m^1 \frac{f(y^+)}{(1 - y^+)^{\frac{1}{2}}} dy^+ \quad (1.2)$$

El límite superior de integración representa la energía mecánica total en energía potencial vista de forma adimensional. Es decir, la velocidad es nula en el punto de partida. Para el caso de la trayectoria tal que, $S=x(y^+)=f(y^+)$, sea también la magnitud del tiempo dependiente de $T=f(y^+)$, se establece de la forma:

$$T^+ = \tau y^{+a}$$

Además, sea la semi-integral

$$\{I^{1/2}f\}(y^+) = \int_m^1 \frac{f(y^+)}{(1 - y^+)^{\frac{1}{2}}} dy^+$$

Y su operador inverso en el sentido de Caputo:

$$D_C^{\frac{1}{2}}\{I^{1/2}f\}(y^+) = f(y^+) \quad (1.3)$$

La solución en términos de la ley de comportamiento es la siguiente:

$$\tau y^{+a} = \{I^{1/2}f\}(y^+) \quad (1.4)$$

$$\tau D_c^{\frac{1}{2}} y^{+a} = D_c^{\frac{1}{2}} \{I^{1/2}f\}(y^+)$$

$$f(y^+) = \tau \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a-\frac{1}{2}+1)} y^{+(a-\frac{1}{2})} \approx \tau(\Gamma s) y^{+(a-\frac{1}{2})}$$

De lo anterior se deriva que $(\Gamma s) = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a-\frac{1}{2}+1)}$.

En general, sea la α -integral

$$\{I^\alpha f\}(y^+) = \int_m^1 \frac{f(y^+)}{(1-y^+)^\alpha} dy^+;$$

Y su operador inverso en el sentido de Caputo:

$$D_c^\alpha \{I^\alpha f\}(y^+) = f(y^+) \quad (1.5)$$

$$f(y^+) = \tau \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a-\alpha+1)} y^{+(a-\alpha)} \approx \tau(\Gamma s) y^{+(a-\alpha)}$$

tal que $(\Gamma s) = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a-\alpha+1)}$.

Luego entonces, la trayectoria sobre la magnitud del tiempo representa la velocidad característica de dicho proceso de conversión.

$$u_c^+ = \frac{f(y^+)}{T^+} = (\Gamma s) y^{+(a-\alpha)} \quad (1.6)$$

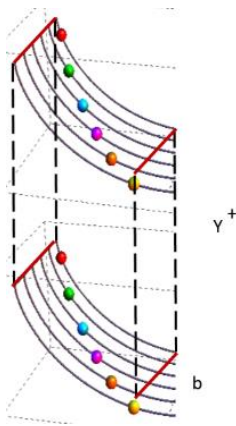
En la **Tabla 1.1** se presentan los valores y funciones resultantes de la ecuación anterior.

Tabla 1.1 Velocidad característica

a	α	$a - \alpha$	τy^{+a}	$\approx \tau(\Gamma s) y^{+(a-\alpha)}$	$u_c^+ = \frac{f(y^+)}{T^+}$	Observaciones
0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	τ	$\frac{\tau(\Gamma s)}{\sqrt{y^+}}$	$\frac{(\Gamma s)}{\sqrt{y^+}}$	“Tauto”, mismo tiempo
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\tau\sqrt{y^+}$	$\tau(\Gamma s)$	$\frac{(\Gamma s)}{\sqrt{y^+}}$	“Braquisto”, tiempo más corto en función de la carga
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	τy^+	$\tau(\Gamma s)\sqrt{y^+}$		
1.5	$\frac{1}{2}$	1	$\tau y^+ \sqrt{y^+}$	$\tau(\Gamma s) y^+$		

2	½	1.5	$\tau y^+ y^{+1}$	$\tau(\Gamma s) y^+ \sqrt{y^+}$		
2.5	½	2	$\tau y^+ y^+ \sqrt{y^+}$	$\tau(\Gamma s) y^+ y^+$		

En el sentido de la función de la velocidad característica del proceso de conversión de energía potencial en cinética se define un caudal en términos de la variable adimensional y^+ . En la **Figura 1.2** se presenta el caudal tautócrono y braquistócrono en área rectangular.



$$q^+ \approx \frac{(\Gamma s)}{\sqrt{y^+}} * y^+ = (\Gamma s) \sqrt{y^+}; b = 1$$

Figura 1.3 Representación conceptual del caudal tautócrono

El gasto unitario adimensional anterior depende exclusivamente de la relación entre la energía potencial, y^+ , de la partícula en su trayectoria referida a la energía mecánica total. Las ecuaciones de caudal regularmente se expresan en términos de la velocidad y el área. Una manera de expresar el caudal tautócrono sería:

$$q^+ = Area * velocidad \approx (\Gamma s) \sqrt{y^+} \quad (1.7)$$

El caudal braquistócrono es de la forma general:

$$q^+ = \frac{q}{q_H} \approx (\Gamma s) f\left(y^{+\frac{1}{2}}\right) \quad (1.8)$$

Es relevante determinar un caudal q^+ adimensional, que es función exclusivamente de la relación de la posición relativa de la partícula respecto a la energía total. Se observa también el comportamiento de la velocidad característica relativa al operador α -integral y su inverso.

$$u_c^+ = \frac{f(y^+)}{T^+} = (\Gamma s)y^{+(a-\alpha)} \quad (1.9)$$

El comportamiento de la velocidad característica depende del orden del operador integro-diferencial. Mejor dicho, el proceso de conversión de energía potencial a cinética hereda e identifica el orden de dicho operador. El caudal en general es similar a:

$$q^+ \approx cy^{+n} * (\Gamma s)y^{+(a-\alpha)} \quad (1.10)$$

Se ha visto que la variable tiempo, el área y la trayectoria, y por ende el caudal, dependen de una sola variable adimensional que es la relación de la energía potencial durante el recorrido referida a la energía mecánica total, donde a su vez los exponentes del área y de la velocidad media son relevantes.

La función $q^+ = u_c^+(y^+)area(y^+)$ involucra componentes de velocidad, trayectoria, tiempo y de área, expresados en una sola variable independiente.

Para el caso del problema mecánico, si la energía mecánica total en términos de energía potencial y ocupación del espacio H es grande, entonces la gravedad debería tener un efecto importante. Esto mismo puede ser diferente al moverse la partícula en una trayectoria que se aleja de H para ubicarse en y. La velocidad fundamental debe ser entonces:

$$U^+ = \frac{u(y)}{u(H)} = \left(1 - \frac{g'y}{gH}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(1 - \frac{c^2(y)}{c^2(H)}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.11)$$

Si suponemos que $c^2(y)$ y $C^2(H)$ son como perturbaciones del medio realizado por la partícula que se mueve a lo largo de una trayectoria en un medio cuya magnitud mayor de la perturbación es $C^2(H)$, es evidente la importancia de las aceleraciones. La ecuación 11, se denomina de “celeridades” y viene de la siguiente reflexión.

$$\begin{aligned} y_A = \frac{u_B^2}{2g} + y_B = H = \frac{u^2}{2g} + y; \text{ expresar en velocidad } u^2 &= (2gH - 2gy) = 2gH \left(1 - \frac{2gy}{2gH}\right) \\ &= 2gH \left(1 - \frac{gy}{gH}\right) \approx 2gH \left(1 - \frac{g'y}{gH}\right) \end{aligned}$$

Esta ecuación es un resultado directo de la relación de conversión de energía potencial y cinética. Luego, si de dichas celeridades depende lo que fluye, se requiere además que por mínima acción la variación de q^+ sea mínima en función de la carga H, y por ende de y^+ , lo cual conduce a que la dicha función provenga de un proceso de optimización. La idea de caudal proviene de la expresión siguiente:

$$u^2 = 2gH \left(1 - \frac{g'y}{gH}\right) \rightarrow \frac{u}{\sqrt{2gH}} = u^+ = \sqrt{\left(1 - \frac{gy}{gH}\right)} \quad (1.12)$$

De la cual se puede sustraer

$$q^+ = u^+ c y^{+\gamma_0} = c y^{+\gamma_0} \sqrt{\left(1 - \frac{gy}{gH}\right)} = c y^{+\gamma_0} (1 - y^+)^{\delta = \frac{1}{2}}$$

ecuación que depende de la relación entre energía potencial y total. Por definición el área, es una serie de potencias que depende de la velocidad fundamental.

$$c_o y^{+\gamma_0} = q^+ \left(1 + \delta y^+ + \frac{1}{2} \delta(\delta + 1) y^{+2} - \frac{1}{6} \delta(\delta + 1)(\delta + 2) y^{+3} + \dots\right)$$

De una manera similar

$$q^+ = c_o y^{+\gamma_0} \left(1 + \delta y^+ - \frac{1}{2} \delta(\delta + 1) y^{+2} + \frac{1}{6} \delta(\delta + 1)(\delta + 2) y^{+3} - \dots\right)$$

Si la velocidad fundamental es unitaria, entonces posee un exponente nulo. Por lo anterior se tiene:

$$q^+ = c_o y^{+\gamma_0} \quad (1.13)$$

Luego si la velocidad fundamental es relativa con $\delta > 0$, se tiene, al aceptar un desarrollo limitado de primer orden

$$q^+ = c_o (1 + \delta y^+) y^{+\gamma_0} \approx (c_o + \rho) y^{+\gamma_0 + \varepsilon} = c y^{+\gamma} \quad (1.14)$$

ecuación que coincide con el cálculo en función potencial del caudal braquistócrono.

Los eventos extremos son la conversión de energía mecánica en "área" (en energía potencial pura), para $\delta = 0$ o en velocidad pura; $\gamma_0 = 0$; en energía cinética pura.

$$q^+ = c y^{+\gamma_0}; q^+ = (1 - y^+)^{\delta} \quad (1.15)$$

Como el proceso de flujo de agua en cualquier estructura debe ser un proceso de mínima acción que provenga de los principios de conservación de masa y cantidad de movimiento, se hace un análisis para condiciones de régimen permanente mediante el uso de las ecuaciones de Saint-Venant en sus expresiones de continuidad, energía y cantidad de movimiento.

1.3 Principio general de gasto máximo

De la ecuación de energía para una sección aguas arriba y sobre una estructura vertedora, todo inicialmente en sección rectangular, se identifica y se analiza la función q^+ , Nuevamente se recurre a un escalamiento para facilitar el análisis sobre las variables independientes: $q^+ = f(y^+)$.

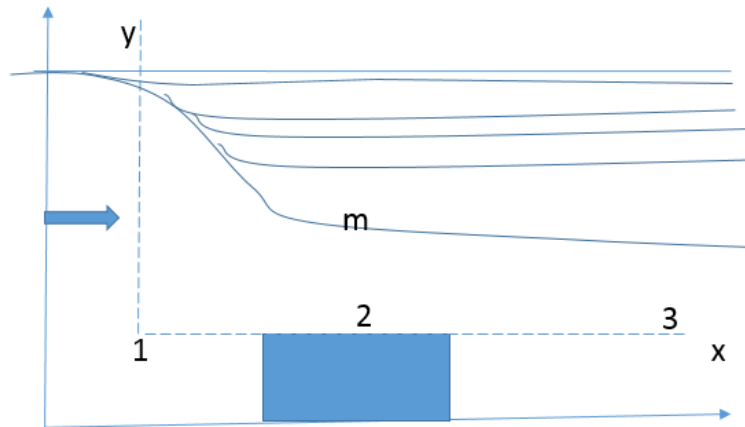


Figura 1.4 El principio de caudal máximo

De acuerdo con lo mencionado, la velocidad y área son:

$$\frac{u}{\sqrt{2gH}} = \left(1 - \frac{y}{H}\right)^{\frac{1}{2}}; \quad u^+ = (1 - y^+)^{\frac{1}{2}}; \quad A^+ = y^+$$

El caudal en sección rectangular es:

$$q^+ = y^+(1 - y^+)^{\frac{1}{2}};$$

El gasto por unidad de ancho adimensional se expresa como:

$$q^+ = \frac{y}{H} \frac{(H - y)^{\frac{1}{2}}}{H^{\frac{1}{2}}} = \frac{q}{q_H} \tag{1.16}$$

Como se busca una solución general que depende de exponentes, el caudal se puede expresar en términos de potencias de la siguiente manera:

$$q^+ = (y^+)^{\nu} (1 - y^+)^{\delta}$$

el cual contiene una relación de área, trayectoria y tiempo, por ende, velocidad, de forma que

$$\frac{dq^+}{dy^+} = 0 \rightarrow y^+ = \frac{\gamma}{\gamma + \delta} = \frac{1}{1 + \frac{\delta}{\gamma}} \quad (1.17)$$

Para este procedimiento, este sencillo proceso de maximización es sustancialmente importante ya que indica la proporción de conversión de energía potencial en cinética. La misma indica el área a la energía potencial del flujo. En particular, se satisface:

$$y^+ = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3} = \frac{y}{H}$$

El caudal máximo para una carga H dada ocurre a $y = \frac{2}{3}H$.

$$q^+ = \left(\frac{2}{3}\right)^1 \left(1 - \frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} = 0.3849$$

En general:

$$q^+ = \left(\frac{\gamma}{\gamma + \delta}\right)^\gamma \left(\frac{\delta}{\gamma + \delta}\right)^\delta = \left(\frac{1}{1 + \frac{\delta}{\gamma}}\right)^\gamma \left(\frac{1}{1 + \frac{\gamma}{\delta}}\right)^\delta \quad (1.18)$$

El caudal es:

$$q = q^+ q_H = 0.3849 \sqrt{2g} H^{\frac{3}{2}}$$

O bien el caudal máximo para una carga dada es, de forma general:

$$q = q^+ q_H = \left(\frac{\gamma}{\gamma + \delta}\right)^\gamma \left(\frac{\delta}{\gamma + \delta}\right)^\delta (2g)^\delta H^{\gamma + \delta}$$

De acuerdo con la fórmula de celeridades y en el proceso de variación local, se tiene:

$$q^+ = A^+ U^+ = \left(\frac{y}{H}\right)^\gamma \left(1 - \frac{g'y}{gH}\right)^\delta = \left(\frac{y}{H}\right)^\gamma \left(1 - \frac{c^2(y)}{c^2(H)}\right)^\delta \quad (1.19)$$

Luego entonces:

$$\frac{q^+}{\left(1 - \frac{c^2(y)}{c^2(H)}\right)^\delta} = \left(\frac{y}{H}\right)^\gamma$$

El lado derecho de la ecuación contiene el área o la ocupación del espacio en función de la energía potencial. Si $\delta = \frac{1}{2}$, la relación a esta escala de velocidades y celeridades coincide con la formulación del factor de Lorentz, el principio del gasto máximo generaliza dicha función como un resultado de la energía mecánica.

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{c^2(y)}{C^2(H)}\right)^\delta}$$

De tal manera que el flujo se puede interpretar como:

$$\text{Si } c \rightarrow C; \frac{q^+}{(\varepsilon)^\delta} = \left(\frac{y}{H}\right)^\gamma, \text{ Si } c \rightarrow 0 \frac{q^+}{(1 - \varepsilon)^\delta} = \left(\frac{y}{H}\right)^\gamma$$

El comportamiento depende también de los exponentes. En este sentido $c \rightarrow C$, no ocurre de acuerdo con el cociente óptimo:

$$\frac{q^+}{\left(\frac{\delta}{\gamma + \delta}\right)^\delta} = \left(\frac{\gamma}{\gamma + \delta}\right)^\gamma$$

De aquí la importancia del parámetro $\frac{\gamma}{\gamma + \delta}$.

La tasa de conversión de energía potencial en cinética quedaría expresada como:

$$\frac{\gamma}{\gamma + \delta} = {}^{1/\gamma} \sqrt{\frac{q^+}{\left(\frac{\delta}{\gamma + \delta}\right)^\delta}} \left(\frac{y}{H}\right)^\gamma = \frac{q^+}{\left(1 - \frac{c^2(y)}{C^2(H)}\right)^\delta} \quad (1.20)$$

Una relación puramente geométrica representa la γ -raíz de lo que fluye como en el caso del gasto braquistócrono. Más aún, como q^+ es adimensional, es posible que sus valores extremos sean 0 y 1. Si se evalúa para el caso del último se tiene:

$$\left(\frac{y}{H}\right)^\gamma = \left(\frac{\Delta y}{H}\right)^\delta; \Delta y = H - y \quad (1.21)$$

Se identifican la proporción entre geometría y tiempo en función potencia, que fue la función potencia para la magnitud del tiempo braquistócrono. Si se fija el tiempo, lo que fluye solo depende de la geometría. En este documento, a la relación $\frac{\gamma}{\gamma + \delta}$ se le denomina el punto geométrico.

1.4 El punto geométrico

A continuación, se utiliza el resultado precedente para identificar el aspecto geométrico de la ley de caudal. Se ha visto que la geometría que ocupa lo que fluye puede representarse por una forma general $A = cy^n$. Se parte de la geometría rectangular:

$$\frac{u}{\sqrt{2gH}} = \left(1 - \frac{y}{H}\right)^{\frac{1}{2}}; u^+ = (1 - y^+)^{\frac{1}{2}}; A^+ = y^+ = \frac{by}{bH}$$

$$q^+ = (y^+)^1(1 - y^+)^{\frac{1}{2}}; \frac{y}{H} = \frac{2}{3} = 0.667; q = 0.3849\sqrt{2g} H^{\frac{3}{2}}$$

Se propone la geometría triangular:

$$\frac{u}{\sqrt{2gH}} = \left(1 - \frac{y}{H}\right)^{\frac{1}{2}}; u^+ = (1 - y^+)^{\frac{1}{2}}; A^+ = \frac{cy^2}{cH^2} = y^{+2}$$

$$q^+ = (y^+)^2(1 - y^+)^{\frac{1}{2}}; \frac{y}{H} = \frac{2}{2 + \frac{1}{2}} = \frac{4}{5}; q = 0.2862\sqrt{2g} H^{2.5}$$

Se propone una geometría, en términos de exponente, entre la geometría rectangular y triangular:

$$\frac{u}{\sqrt{2gH}} = \left(1 - \frac{y}{H}\right)^{\frac{1}{2}}; u^+ = (1 - y^+)^{\frac{1}{2}}; A^+ = \frac{cy^{1.5}}{cH^{1.5}} = y^{+\frac{3}{2}}$$

$$q^+ = (y^+)^{1.5}(1 - y^+)^{\frac{1}{2}}; \frac{y}{H} = \frac{1.5}{1.5 + \frac{1}{2}} = \frac{3}{4}; q = 0.2904\sqrt{2g} H^{2.0}$$

Ahora dos geometrías de exponente inferior a la rectangular:

$$\frac{u}{\sqrt{2gH}} = \left(1 - \frac{y}{H}\right)^{\frac{1}{2}}; u^+ = (1 - y^+)^{\frac{1}{2}}; A^+ = \frac{cy^{0.5}}{cH^{0.5}} = y^{+\frac{1}{2}}$$

$$q^+ = (y^+)^{\frac{1}{2}}(1 - y^+)^{\frac{1}{2}}; \frac{y}{H} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}; q = 0.3535\sqrt{2g} H$$

$$\frac{u}{\sqrt{2gH}} = \left(1 - \frac{y}{H}\right)^{\frac{1}{2}}; u^+ = (1 - y^+)^{\frac{1}{2}}; A^+ = \frac{cy^{0.25}}{cH^{0.25}} = y^{+\frac{1}{4}}$$

$$q^+ = (y^+)^{\frac{1}{4}}(1 - y^+)^{\frac{1}{2}}; \frac{y}{H} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}} = \frac{1}{3}; q = 0.2721\sqrt{2g} H^{0.75}$$

Incluso para exponentes elevados:

$$\frac{u}{\sqrt{2gH}} = \left(1 - \frac{y}{H}\right)^{\frac{1}{2}}; u^+ = (1 - y^+)^{\frac{1}{2}}; A^+ = \frac{cy^3}{cH^3} = y^{+3}$$

$$q^+ = (y^+)^3(1 - y^+)^{\frac{1}{2}}; \frac{y}{H} = \frac{3}{3 + \frac{1}{2}} = \frac{6}{7}; q = 0.3239\sqrt{2g} H^{3.5}$$

De lo anterior, en términos de caudal óptimo, con $\delta = \frac{1}{2}$ se observa que: $\frac{y}{H} \rightarrow 0$ cuando γ se incrementa.

$$\text{Si } \frac{\gamma}{\gamma + \frac{1}{2}}, \frac{y}{H} \rightarrow 0, \gamma \rightarrow 0; \frac{y}{H} \rightarrow 1; \text{ Si } \gamma \rightarrow \infty$$

Por otro lado, del límite de la función:

$$\left(\frac{y}{H}\right)^\gamma = \frac{q^+}{\left(1 - \frac{y}{H}\right)^\delta}$$

Si $\gamma \rightarrow 0$ el caudal deviene en velocidad, ya que el área es estrictamente la unidad. Mientras que la velocidad deviene unidad si $\delta \rightarrow 0$.

Sobre la raíz cuadrada de la velocidad se puede indicar que, al tratarse de ecuaciones potenciales, se puede dar la oportunidad de variar efectivamente el exponente δ respectivo.

$$\frac{q^+}{\left(\frac{\delta}{\gamma + \delta}\right)^\delta} = \left(\frac{\gamma}{\gamma + \delta}\right)^\gamma \quad (1.22)$$

Sin encontrar ninguna contradicción en la ley, además de acuerdo con la ecuación integro-diferencial, dicho exponente está ligado con el orden fraccional del operador. En este documento se trabaja con el exponente $\frac{1}{2}$.

**Construcción de ecuaciones
de gasto**

2

Capítulo 2

CONSTRUCCIÓN DE ECUACIONES DE GASTO

José Javier Ramírez Luna, Pablo Camacho Peralta y Ulises Dehesa Carrasco

2.1 Introducción

Con apoyo de las funciones en potencia, así como con el principio general de gasto máximo, la ecuación de continuidad ($h_1u_1 - h_2u_2 = 0$), energía ($H = Z_{ref} + y + \alpha \frac{v^2}{2g}$) y cantidad de movimiento ($\beta \frac{Q^2}{A} + gI_1$) se va a presentar la construcción de un gran conjunto de ecuaciones de caudal.

Para deducir las ecuaciones de gasto se plantea que, dado que se han visto dos principios, el de conservación de masa y el de cantidad de movimiento, en cada sección se distinguen el caudal y tirante. Cuando se plantea la forma no conservativa de Saint-Venant, de la ecuación de la cantidad de movimiento se puede derivar la ecuación de energía. Se inicia con la determinación de las ecuaciones generales de caudal con un desarrollo limitado.

2.2 Aproximación analítica

La aproximación se da en la ecuación general de caudal a descarga libre-ahogada debido a una estimación del tirante aguas abajo.

2.2.1 Estructuras tipo vertedor

Para construir las ecuaciones de gasto para estructuras tipo vertedor, primero se debe entender como vertedor aquel tramo de canal suficientemente largo para generar hidráulicamente el punto geométrico identificado (m en la figura siguiente) con la generalización del principio de gasto máximo, lo cual se establece al hacer una obstrucción del área del canal parental donde dicha estructura se construye.

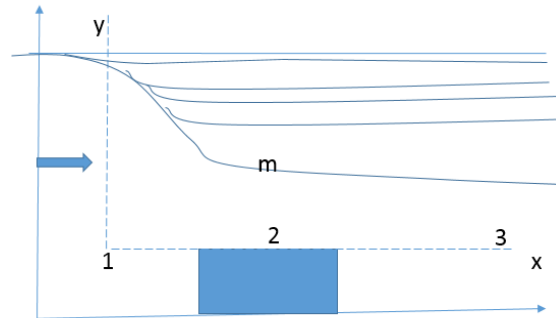


Figura 2.1 El punto geométrico

El gasto a descarga libre solo depende de las condiciones de energía y cantidad de movimiento en la sección (1) aguas arriba, mientras que a descarga ahogada el caudal depende de dichas condiciones aguas arriba (1) y abajo (3). En todos los casos se asume por continuidad

$$Q = Q_1 = A_1 v_1 = Q_2 = A_2 v_2 = Q_3 = A_3 v_3$$

En lo sucesivo se identifican las funciones derivadas de acuerdo al principio o ley aplicada en cada tramo entre secciones respectivas, por ejemplo, energía-energía.

2.2.1.1 Funciones E-E

Equivale a las ecuaciones de Saint-Venant en forma no conservativa. Si se aplica la ecuación de energía, la más sencilla, entre las secciones 1 y 2 en el punto geométrico m, se tiene:

$$H_i = y_i + (\alpha_i + \alpha) \frac{v_i^2}{2g} \quad (2.1)$$

Se asume que $(\alpha_i + \alpha) = \alpha_i$, donde este último es un coeficiente que incluye una pérdida de energía. Esta pérdida genéricamente representa la pérdida por fricción, entre otras.

$$y_1 + \alpha_1 \frac{v_1^2}{2g} = y_2 + \alpha_2 \frac{v_2^2}{2g}$$

se tiene, luego que se introduce el punto geométrico (μ en la ecuación) en la sección 2 en la ecuación que sigue, es necesario indicar que la velocidad de llegada debe ser pequeña.

Para formular la ecuación a descarga libre se procede a continuación.

Con $y_2 \rightarrow \mu y_1$

$$y_1 + \alpha_1 \frac{Q_1^2}{2gA_1^2} = \mu y_1 + \alpha_2 \frac{Q_2^2}{2gA_2^2(\mu y_1)}$$

$$y_1 - \mu y_1 = \alpha_2 \frac{Q_2^2}{2gA_2^2(\mu y_1)} - \alpha_1 \frac{Q_1^2}{2gA_1^2} = \frac{Q_2^2}{2g} \left(\frac{\alpha_2}{A_2^2(\mu y_1)} - \frac{\alpha_1}{A_1^2} \right)$$

Sustituyendo $A_i^2 = c_i y_i^{n_i}$ y realizando el álgebra correspondiente se obtiene.

$$Q = \frac{1}{\sqrt{\alpha_2}} \frac{\mu^{n_2} \sqrt{(1-\mu)}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\alpha_1 c_2^2 \mu^{2n_2} y_1^{2n_2}}{\alpha_2 c_1^2 y_1^{2n_1}}\right)}} \sqrt{2g} c_2 y_1^{n_2 + \frac{1}{2}} \quad (2.2)$$

La ecuación anterior es la ecuación general de descarga libre para cualquier relación de áreas en la sección 1 y 2. Se supone que $n_2 = n_1 = n$, canal y vertedor de la misma geometría.

$$Q^+ = \frac{Q}{Q_{y_1}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha_2}} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \mu^{2n}\right)}} \mu^n \sqrt{(1-\mu)}$$

donde

$$Q_{y_1} = c_2 \sqrt{2g} y_1^{n + \frac{1}{2}} \quad (2.3)$$

Se puede aplicar a los siguientes canales de determinada sección: sección aguas arriba en canal rectangular y sección 2 en canal rectangular. La función establecida al sustituir $\frac{y_2}{y_1} \approx \mu$ y $n = 1$ la ecuación corregida por un factor de pérdida de energía.

$$Q^+ = \frac{Q}{Q_{y_1}} = q^+ = \frac{1}{\sqrt{\alpha_2}} \frac{\mu \sqrt{(1-\mu)}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \mu^2\right)}} \quad (2.4)$$

La ecuación con coeficientes unitarios $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = 1$ es:

$$q^+ = \frac{\mu \sqrt{(1-\mu)}}{\sqrt{(1-\mu^2)}} = \frac{\mu}{\sqrt{(1+\mu)}}$$

Para el caso de canal triangular y vertedor en sección triangular, $n = 2$:

$$Q^+ = \frac{Q}{Q_{y_1}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha_2}} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \mu^4\right)}} \mu^2 \sqrt{(1 - \mu)}$$

La ecuación con coeficientes unitarios es:

$$q^+ = \frac{\mu^2 \sqrt{(1 - \mu)}}{\sqrt{(1 - \mu^4)}} = \frac{\mu^2 \sqrt{(1 - \mu)}}{\sqrt{(1 + \mu)(1 + \mu^2)}} = \frac{\mu^2}{\sqrt{1 + \mu + \mu^2 + \mu^3}}$$

Una sección con exponente grande $n = 10$ con la misma consideración de secciones:

$$q^+ = \frac{1}{\sqrt{\alpha_2}} \frac{\mu^{10} \sqrt{(1 - \mu)}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \mu^{20}\right)}} \quad (2.5)$$

La ecuación con coeficientes unitarios es:

$$q^+ = \frac{\mu^{10} \sqrt{(1 - \mu)}}{\sqrt{(1 - \mu^{20})}}$$

$$q^+ = \mu^{10} \frac{\sqrt{(1 - \mu)}}{\sqrt{\dots (1 - \mu^{0.3125})(1 + \mu^{0.3125})(1 + \mu^{0.625})(1 + \mu^{1.25})(1 + \mu^{2.5})(1 + \mu^5)(1 + \mu^{10})}}$$

Una sección con exponente muy pequeño $n = 1/10$ con la misma consideración de secciones:

$$q^+ = \frac{\mu^{\frac{1}{10}} \sqrt{(1 - \mu)}}{\sqrt{\left(1 - \mu^{\frac{2}{10}}\right)}} \quad (2.6)$$

Para construir una ecuación que incluya las variables de la sección aguas abajo se propone el siguiente estimador de tirante al aplicar la energía en las secciones 2 y 3. Por ende se formula la ecuación de descarga ahogada y se genera la propia a descarga libre-ahogada.

$$y + \alpha_2 \frac{Q_2^2}{2gA_2^2} = y_3 + \alpha_3 \frac{Q_3^2}{2gA_3^2(y_3)} \quad (2.7)$$

$$y = y_3 \left[1 + \frac{\alpha_3}{y_3} \frac{Q_3^2}{2gA_3^2(y_3)} - \frac{\alpha_2}{y_3} \frac{Q_2^2}{2gA_2^2} \right]$$

A caudal nulo, simplemente $y = y_3$, esto en la sección 2. Para esta forma no conservativa solo se tiene esta aproximación. Nuevamente se aplica la energía en 1 y 2, y se tiene:

$$y_1 - y_3 = \left[\alpha_3 \frac{Q_3^2}{2gc_3^2 y_3^{2n_3}} - \alpha_1 \frac{Q_1^2}{2gc_1^2 y_1^{2n_1}} \right]$$

$$Q = \frac{1}{\sqrt{\alpha_3}} \frac{\sqrt{\left(1 - \frac{y_3}{y_1}\right)}}{\sqrt{\left[1 - \frac{\alpha_1 c_3^2 y_3^{2n_3}}{\alpha_3 c_1^2 y_1^{2n_1}}\right]}} \sqrt{2gy_1} c_3 y_3^{n_3} \quad (2.8)$$

Se aprecian dos posibilidades. Una de las ecuaciones se presenta al final. Al cambio de régimen se debe cumplir una condición de área a la vez en tirante:

$$c_3 y_3^{n_3} \rightarrow c_2 y_2^{n_2} \rightarrow c_2 \mu^{n_2} y_1^{n_2}, \text{ además de } y_3 \rightarrow y_2 \rightarrow \mu y_1$$

Se obtiene una expresión equivalente a la ecuación en deducida para régimen permanente:

$$Q = \frac{1}{\sqrt{\alpha_2}} \frac{\mu^{n_2} \sqrt{(1 - \mu)}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\alpha_1 c_2^2 \mu^{2n_2} y_1^{2n_2}}{\alpha_2 c_1^2 y_1^{2n_1}}\right)}} \sqrt{2g} c_2 y_1^{n_2 + \frac{1}{2}} \quad (2.9)$$

Es interesante la condición de áreas, en particular cuando son áreas diferentes. Por esta razón se plantea que si:

$$Q = \frac{1}{\sqrt{\alpha_1}} \frac{\sqrt{\left(1 - \frac{y_3}{y_1}\right)}}{\sqrt{\left[\frac{\alpha_3 c_1^2 y_1^{2n_1}}{\alpha_1 c_3^2 y_3^{2n_3}} - 1\right]}} \sqrt{2g} c_1 y_1^{n_1 + \frac{1}{2}}$$

De tal manera que:

$$Q = \frac{1}{\sqrt{\alpha_3}} \frac{\sqrt{\left(1 - \frac{y_3}{y_1}\right)}}{\sqrt{\left[1 - \frac{\alpha_1 c_3^2 y_3^{2n_3}}{\alpha_3 c_1^2 y_1^{2n_1}}\right]}} c_3 y_3^{n_3} \sqrt{2g} y_1^{\frac{1}{2}}$$

$$y_3 \rightarrow \mu y_1$$

$$Q = \frac{1}{\sqrt{\alpha_3}} \frac{\mu^{n_3} \sqrt{(1-\mu)}}{\sqrt{\left[1 - \frac{\alpha_1 c_3^2}{\alpha_3 c_1^2} \mu^{2n_3} y_1^{2(n_3-n_1)}\right]}} c_3 \sqrt{2g} y_1^{n_3 + \frac{1}{2}}$$

Para valores de $n_1 = n_2 = n_3 = n$ y $y_1^{2(n_3-n_1)} = 1$

$$Q = \frac{1}{\sqrt{\alpha_3}} \frac{\mu^n \sqrt{(1-\mu)}}{\sqrt{\left[1 - \frac{\alpha_1 c_3^2}{\alpha_3 c_1^2} \mu^{2n}\right]}} c_3 \sqrt{2g} y_1^{n + \frac{1}{2}}$$

$$\frac{Q}{c \sqrt{2g} y_1^{n + \frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{\left[\alpha_3 - \alpha_1 \left(\frac{n}{n + \frac{1}{2}}\right)^{2n}\right]}} \left(\frac{n}{n + \frac{1}{2}}\right)^n \sqrt{(1-\mu)}$$

Secciones iguales y coeficientes unitarios

$$Q = \frac{\mu^n \sqrt{(1-\mu)}}{\sqrt{[1 - \mu^{2n}]}} \sqrt{2g} c y_1^{n + \frac{1}{2}}$$

La $n=1$

$$Q = \frac{\mu \sqrt{(1-\mu)}}{\sqrt{[1 - \mu^2]}} \sqrt{2g} c y_1^{1 + \frac{1}{2}}$$

El enfoque de energía o forma no conservativa de las ecuaciones de Saint-Venant intercambia la función de los tirantes, secciones 1 y 3, en el régimen a descarga ahogada y por ende esta última ecuación es a descarga libre-ahogada con la condición $y_3 \rightarrow \mu y_1$: No obstante que, a fin de mejorar la precisión del cambio de régimen, se implementará una ecuación más adelante. Por el momento los coeficientes a descarga libre ahogada se muestran a continuación.

A descarga libre:

$$C_{dl} = \frac{Q}{\sqrt{2g} c_2 y_1^{n_2 + \frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha_2}} \frac{\mu^{n_2} \sqrt{(1-\mu)}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\alpha_1 c_2^2 \mu^{2n_2} y_1^{2n_2}}{c_1^2 y_1^{2n_1}}\right)}} \quad (2.10)$$

A descarga ahogada:

$$C_{da} = \frac{Q}{\sqrt{2g} c_2 y_1^{n_2 + \frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha_3}} \frac{\sqrt{\left(1 - \frac{y_3}{y_1}\right)}}{\sqrt{\left[1 - \frac{\alpha_1 c_3^2 y_3^{2n_3}}{\alpha_3 c_1^2 y_1^{2n_1}}\right]}} \frac{c_3 y_3^{n_3}}{c_2 y_1^{n_2}} \quad (2.11)$$

La Ecuación 2.10 está contenida en la 2.11 en la condición $y_3 \rightarrow \mu y_1$. Otra alternativa es la siguiente.

$$Q = \frac{1}{\sqrt{\alpha_2}} \frac{\mu^{n_2} \sqrt{\left(1 - \frac{y_3}{y_1}\right)}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\alpha_1 c_2^2}{\alpha_2 c_1^2} \mu^{2n_2} \frac{y_1^{2n_2}}{y_1^{2n_1}}\right) + \left[\frac{\alpha_3 c_2^2}{\alpha_2 c_3^2} \mu^{2n_2} \frac{y_1^{2n_2}}{y_3^{2n_3}} \left(1 - \frac{\alpha_2 c_3^2}{\alpha_3 c_2^2} \frac{y_3^{2n_3}}{\mu^{2n_2} y_1^{2n_2}}\right)\right]}} \sqrt{2gy_1} c_2 y_1^{n_2}$$

Áreas iguales:

$$Q = \frac{1}{\sqrt{\alpha_2}} \frac{\mu^n \sqrt{\left(1 - \frac{y_3}{y_1}\right)}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \mu^{2n}\right) + \left[\frac{\alpha_3}{\alpha_2} \mu^{2n} \frac{y_1^{2n}}{y_3^{2n}} \left(1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_3} \frac{y_3^{2n}}{\mu^{2n} y_1^{2n}}\right)\right]}} \sqrt{2gy_1} c y_1^n$$

Cambio de régimen:

$$Q = \frac{1}{\sqrt{\alpha_2}} \frac{\mu^n \sqrt{(1 - \mu)}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \mu^{2n}\right) + \left[\frac{\alpha_3}{\alpha_2} \left(1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_3}\right)\right]}} \sqrt{2gy_1} c y_1^n$$

Coefficientes unitarios:

$$Q = \frac{\mu^n \sqrt{\left(1 - \frac{y_3}{y_1}\right)}}{\sqrt{\left(1 - \mu^{2n}\right) + \left[\mu^{2n} \frac{y_1^{2n}}{y_3^{2n}} \left(1 - \frac{y_3^{2n}}{\mu^{2n} y_1^{2n}}\right)\right]}} \sqrt{2gy_1} c y_1^n$$

Cambio de régimen:

$$Q = \frac{\mu^n \sqrt{(1-\mu)}}{\sqrt{(1-\mu^{2n})}} \sqrt{2gy_1} cy_1^n \quad (2.12)$$

Se continua ahora con la deducción de las ecuaciones de gasto en función de la cantidad de movimiento.

2.2.1.2 Funciones E-M

Si se combina la forma no conservativa (secciones 1-2) y conservativa (secciones 2-3) también se obtiene una fórmula general a descarga libre-ahogada.

En primer lugar, se trabaja con los baricentros o centroides de las áreas en función de potencia.

$$A = cy_1^n$$

El centroide de dicha área es de la forma:

$$y_c = \frac{1}{n+1}y$$

Si se evalúa para los casos conocidos, se obtiene, con el fondo del canal o la cresta como referencia y la superficie libre del agua para el centroide:

$$\text{Rectangular } y_c = \frac{1}{2}y$$

$$\text{Triangular } y_c = \frac{1}{3}y = 0.333y$$

Luego una sección de paso potencial $1 < n < 2$, tiene el cálculo siguiente:

$$\text{Trapezoidal } y_c = \frac{2}{5}y = 0.4y$$

Si en las secciones S_1 , S_2 y S_3 , se tienen diferentes áreas hidráulicas del tipo potencial, se tiene que:

$$A_1 = c_1 y_1^{n_1}; A_2 = c_2 y_2^{n_2}; A_3 = c_3 y_3^{n_3}$$

De suerte que $y_c A$ en cada sección es:

$$y_{c1} A_1 = \frac{c_1}{n_1 + 1} y_1^{1+n_1}; y_{c2} A_2 = \frac{c_2}{n_2 + 1} y_2^{1+n_2}; y_{c3} A_3 = \frac{c_3}{n_3 + 1} y_3^{1+n_3}$$

La ecuación de cantidad de movimiento para las secciones 2 y 3 es:

$$\frac{\beta_2 Q^2}{g A_2} + \tilde{y}_{c2} A_2 = \frac{\beta_3 Q^2}{g A_3} + \tilde{y}_{c3} A_3$$

Simplificando la nomenclatura $\tilde{y}_i = \tilde{y}_{ci}$

Que se reescribe para un estimador del tirante \tilde{y} en el punto geométrico, como:

$$\tilde{y}A - \tilde{y}_3A_3 = \frac{\beta_3 Q^2}{gA_3} - \frac{\beta_2 Q^2}{gA_2}$$

$$y = \left\{ \frac{c_3 (n_2 + 1)}{c_2 (n_3 + 1)} y_3^{1+n_3} \right\}^{\frac{1}{1+n_2}} \left[1 - 2 \frac{(n_3 + 1) \beta_3 Q^2}{2g c_3^2 y_3^{2n_3}} \frac{1}{y_3} \left(\frac{\beta_2 c_3 y_3^{n_3}}{\beta_3 c_2 y_2^{n_2}} - 1 \right) \right]^{\frac{1}{1+n_2}} \quad (2.13)$$

La primera aproximación se realiza mediante desarrollo limitado en y_3 a carga de velocidad nula en la sección aguas abajo.

2.2.1.2.1 Desarrollo limitado en tirante aguas abajo

Aproximación a y mediante desarrollo limitado.

$$y = \left\{ \frac{c_3 (n_2 + 1)}{c_2 (n_3 + 1)} \right\}^{\frac{1}{1+n_2}} y_3^{\frac{1+n_3}{1+n_2}} \left[1 - 2 \frac{(n_3 + 1) \beta_3 Q^2}{2g (n_2 + 1) c_3^2 y_3^{2n_3}} \frac{1}{y_3} \left(\frac{\beta_2 c_3 y_3^{n_3}}{\beta_3 c_2 y_2^{n_2}} - 1 \right) \right]$$

Si $y_2 = \mu y_1$

$$y = \left\{ \frac{c_3 (n_2 + 1)}{c_2 (n_3 + 1)} \right\}^{\frac{1}{1+n_2}} y_3^{\frac{1+n_3}{1+n_2}} \left[1 - 2 \frac{(n_3 + 1) \beta_3 Q^2}{2g (n_2 + 1) c_3^2 y_3^{2n_3}} \frac{1}{y_3} \left(\frac{\beta_2 c_3 y_3^{n_3}}{\beta_3 c_2 \mu^{n_2} y_1^{n_2}} - 1 \right) \right]$$

Que es el estimador del tirante y en la sección 2 y por ende, de la cantidad de movimiento se tiene entonces la información hidráulica de la sección 3, en la sección 2, a través del estimador de tirante y .

Ahora se puede transferir, hasta la sección 1, dicha información de la sección 3 a través del uso de la ecuación de energía.

$$y_1 + \alpha_1 \frac{Q^2}{2g c_1^2 y_1^{2n_1}} = y + \alpha_2 \frac{Q^2}{2g c_2^2 y_2^{2n_2}}$$

Y simplificando y haciendo que $y_2 = \mu y_1$, se tiene:

Q

$$Q = \frac{1}{\sqrt{\alpha_2}} \sqrt{\left[1 - \left\{ \frac{c_3 (n_2 + 1)}{c_2 (n_3 + 1)} \right\}^{\frac{1}{1+n_2}} y_3^{\frac{1+n_3}{1+n_2}} \frac{1}{y_1} \right] \sqrt{2g c_2 \mu^{n_2} y_1^{n_2 + \frac{1}{2}}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\alpha_2}} \sqrt{\left[1 - \frac{2 c_2^2 \mu^{2n_2} y_1^{2n_2} (n_3 + 1) \beta_3}{\alpha_2 c_3^2 (n_2 + 1) y_3^{2n_3}} \frac{1}{y_3} \left\{ \frac{c_3 (n_2 + 1)}{c_2 (n_3 + 1)} \right\}^{\frac{1}{1+n_2}} y_3^{\frac{1+n_3}{1+n_2}} \left(\frac{\beta_2 c_3 y_3^{n_3}}{\beta_3 c_2 \mu^{n_2} y_1^{n_2}} - 1 \right) - \frac{\alpha_1 c_2^2 \mu^{2n_2} y_1^{2n_2}}{\alpha_2 c_1^2 y_1^{2n_1}} \right]}$$

Se organiza la ecuación a manera de satisfacer la ecuación a descarga libre de tal manera que:

$$Q = \frac{1}{\sqrt{\alpha_2}} \frac{\mu^{n_2} \sqrt{\left(1 - \frac{c_3(n_2+1)}{c_2(n_3+1)}\right)^{\frac{1}{1+n_2}} \frac{y_3^{n_3-n_2}}{y_1^{1+n_2}}}}{\sqrt{\left[1 - \frac{2c_2^2(n_3+1)\mu^{2n_2}y_1^{2n_2}\beta_3}{y_3^{2n_3}} \left\{\frac{c_3(n_2+1)}{c_2(n_3+1)}\right\}^{\frac{1}{1+n_2}} \frac{y_3^{n_3-n_2}}{y_1^{1+n_2}} \left(\frac{\beta_2 c_3}{\beta_3 c_2} \frac{y_3^{n_3}}{\mu^{n_2} y_1^{n_2}} - 1\right) - \frac{\alpha_1 c_2^2 \mu^{2n_2} y_1^{2n_2}}{y_1^{2n_1}}\right]}} \sqrt{2g} c_2 y_1^{n_2+\frac{1}{2}} \quad (2.14)$$

Si $y_3 \rightarrow \mu y_1$ esto tiene que ser físicamente en el sentido, también, de las áreas.

$$A_{i+1}^2 = c_{i+1} y_{i+1}^{n_i+1} \rightarrow A_i^2 = c_i y_i^{n_i} = c_i y_i^{n_i}; \frac{y_3}{y_1} = \mu; \frac{\beta_2}{\beta_3} = 1$$

Se cumple la ecuación a descarga libre.

Dada la anterior condición es evidente que resulta conveniente que sean del mismo tipo de área.

$$A_{i+1}^2 = A_i^2 = A_{i-1}^2 = c y_i^n$$

$$Q = \frac{1}{\sqrt{\alpha_2}} \frac{\mu^n \sqrt{\left(1 - \frac{y_3}{y_1}\right)}}{\sqrt{\left[1 - \frac{2\beta_3}{\alpha_2} \mu^{2n} \frac{y_1^{2n}}{y_3^{2n}} \left(\frac{\beta_2}{\beta_3} \frac{y_3^n}{\mu^n y_1^n} - 1\right) - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \frac{\mu^{2n} y_1^{2n}}{y_1^{2n}}\right]}} \sqrt{2g} c y_1^{n+\frac{1}{2}}$$

Hacia la descarga libre, se cumple: Si $y_3 \rightarrow \mu y_1$

$$Q = \frac{1}{\sqrt{\alpha_2}} \frac{\mu^n \sqrt{(1-\mu)}}{\sqrt{\left[1 - \frac{2\beta_3}{\alpha_2} (\frac{\beta_2}{\beta_3} - 1) - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \mu^{2n}\right]}} \sqrt{2g} c y_1^{n+\frac{1}{2}}$$

Para coeficientes unitarios incluido el $n=1$, se tiene

$$Q = \frac{\mu^n \sqrt{(1-\mu)}}{\sqrt{[1-\mu^{2n}]}} \sqrt{2g} c y_1^{n+\frac{1}{2}} \quad (2.15)$$

Misma que la ecuación de pura energía.

Es decir, al aplicar la combinación de energía en secciones 1-2 al cambio de régimen se encuentra con la ecuación de caudal deducida por consideraciones de energía.

Se retoma el caso geoméricamente conocido: $l y_i^{n=1}$; se tiene:

$$Q = \frac{1}{\sqrt{\alpha_2}} \frac{\mu \sqrt{\left(1 - \frac{y_3}{y_1}\right)}}{\sqrt{\left[1 - \frac{2\beta_3}{\alpha_2} \left(\mu \frac{y_1}{y_3}\right)^2 \left(\frac{\beta_2}{\beta_3} \left(\frac{y_3}{\mu y_1}\right) - 1\right) - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \mu^2\right]}} \sqrt{2g} l y_1^{1+\frac{1}{2}}$$

Para el cambio de régimen, en términos de comportamiento. Si $y_3 \rightarrow \mu y_1$ se llega a:

$$Q = \frac{1}{\sqrt{\alpha_2}} \frac{\mu \sqrt{(1 - \mu)}}{\sqrt{\left[1 - \frac{2\beta_3}{\alpha_2} \left(\frac{\beta_2}{\beta_3} - 1\right) - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \mu^2\right]}} \sqrt{2g} l y_1^{1+\frac{1}{2}}$$

Por lo antes expuesto, la ecuación general de descarga ahogada y libre se puede escribir como.

$$Q = \frac{1}{\sqrt{\alpha_2}} \frac{\mu^{n_2} \sqrt{\left(1 - \frac{\left\{c_3 (n_2 + 1)\right\}^{\frac{1}{1+n_2}} \frac{n_3 - n_2}{y_3^{1+n_2}} \frac{y_3}{y_1}\right)}}{\sqrt{\left[1 - \frac{2}{\alpha_2} \frac{c_2^2 (n_3 + 1)}{c_3^2 (n_2 + 1)} \frac{\mu^{2n_2} y_1^{2n_2} \beta_3}{y_3^{2n_3}} \left\{c_3 (n_2 + 1)\right\}^{\frac{1}{1+n_2}} \frac{n_3 - n_2}{y_3^{1+n_2}} \left(\frac{\beta_2 c_3}{\beta_3 c_2 \mu^{n_2} y_1^{n_2}} \frac{y_3^{n_3}}{y_1} - 1\right) - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \frac{c_2^2 \mu^{2n_2} y_1^{2n_2}}{c_1^2 y_1^{2n_1}}\right]}} \sqrt{2g} c_2 y_1^{n_2 + \frac{1}{2}}$$

Luego de la ecuación más simple:

$$Q = \frac{1}{\sqrt{\alpha_2}} \frac{\mu \sqrt{(1 - \mu)}}{\sqrt{\left[1 - \frac{2\beta_3}{\alpha_2} \left(\frac{\beta_2}{\beta_3} - 1\right) - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \mu^2\right]}} \sqrt{2g} l y_1^{1+\frac{1}{2}}; \varepsilon = \frac{2\beta_3}{\alpha_2} \left(\frac{\beta_2}{\beta_3} - 1\right) \quad (2.16)$$

O se acepta un breve error en la aproximación al cambio de régimen o se agrega una condición. Dicha condición se puede proponer más adelante. Por ahora se busca la formulación

$$Q^+ = \frac{Q}{Q_{y_1}} = \frac{Q}{\sqrt{2g} c_2 y_1^{n_2 + \frac{1}{2}}}$$

Q^+

$$= \frac{1}{\sqrt{\alpha_2}} \frac{\mu^{n_2} \sqrt{\left(1 - \frac{\left\{c_3 (n_2 + 1)\right\}^{\frac{1}{1+n_2}} \frac{n_3 - n_2}{y_3^{1+n_2}} \frac{y_3}{y_1}\right)}}{\sqrt{\left[1 - \frac{2}{\alpha_2} \frac{c_2^2 (n_3 + 1)}{c_3^2 (n_2 + 1)} \frac{\mu^{2n_2} y_1^{2n_2} \beta_3}{y_3^{2n_3}} \left\{c_3 (n_2 + 1)\right\}^{\frac{1}{1+n_2}} \frac{n_3 - n_2}{y_3^{1+n_2}} \left(\frac{\beta_2 c_3}{\beta_3 c_2 \mu^{n_2} y_1^{n_2}} \frac{y_3^{n_3}}{y_1} - 1\right) - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \frac{c_2^2 \mu^{2n_2} y_1^{2n_2}}{c_1^2 y_1^{2n_1}}\right]}}$$

Existe otra aproximación en la formulación anterior, esta vez se refiere al tirante de la sección aguas arriba.

La ecuación de coeficiente es la anterior. Para áreas iguales se establece:

$$Q^+ = \frac{1}{\sqrt{\alpha_2}} \frac{\mu^n \sqrt{\left(1 - \frac{y_3}{y_1}\right)}}{\sqrt{\left[1 - \frac{2}{\alpha_2} \mu^{2n} \frac{y_1^{2n} \beta_3}{y_3^{2n}} \left(\frac{\beta_2}{\beta_3} \frac{1}{\mu^{n_2} y_1^{n_2}} - 1\right) - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \mu^{2n_2}\right]}} \quad (2.17)$$

2.2.1.2.2 Desarrollo limitado en tirante aguas arriba

De la ecuación de cantidad de movimiento para las secciones 2 y 3 es:

$$\frac{\beta_2 Q^2}{g A_2} + \tilde{y}_{c2} A_2 = \frac{\beta_3 Q^2}{g A_3} + \tilde{y}_{c3} A_3 \quad (2.18)$$

Que se reescribe como:

$$\tilde{y} A - \tilde{y}_3 A_3 = \frac{\beta_3 Q^2}{g A_3} - \frac{\beta_2 Q^2}{g A_2}$$

Se obtiene:

$$y = \left[\frac{c_3 (n_2 + 1)}{c_2 (n_3 + 1)} y_3^{1+n_3} - 2 \frac{(n_2 + 1) \beta_2}{c_2} \frac{Q^2}{2g c_2 y_2^{n_2}} \left(1 - \frac{\beta_3 c_2 y_2^{n_2}}{\beta_2 c_3 y_3^{n_3}}\right) \right]^{\frac{1}{1+n_2}}$$

Que es el tirante y en la sección 2. A través de la cantidad de movimiento se tiene entonces la información hidráulica de la sección 3, en la sección 2, a través del tirante y .

Ahora se puede transferir dicha información a la sección 1 a través del uso de la ecuación de energía.

$$y_1 + \alpha_1 \frac{Q^2}{2g c_1^2 y_1^{2n_1}} = y + \alpha_2 \frac{Q^2}{2g c_2^2 y_2^{2n_2}}$$

La cual se adecua como:

$$y_1 - \frac{\alpha_2 Q^2}{2g c_2^2 y_2^{2n_2}} \left(1 - \frac{\alpha_1 c_2^2 y_2^{2n_2}}{\alpha_2 c_1^2 y_1^{2n_1}}\right) = y$$

Que se sustituye en la ecuación de energía, sección 1-2.

$$\left[y_1 - \alpha_2 \frac{Q^2}{2gc_2^2 y_2^{2n_2}} \left(1 - \frac{\alpha_1 c_2^2 y_2^{2n_2}}{\alpha_2 c_1^2 y_1^{2n_1}} \right) \right]^{n_2+1} = \left[\frac{c_3 (n_2+1)}{c_2 (n_3+1)} y_3^{1+n_3} - 2 \frac{(n_2+1)\beta_2}{c_2} \frac{Q^2}{2gc_2 y_2^{n_2}} \left(1 - \frac{\beta_3 c_2 y_2^{n_2}}{\beta_2 c_3 y_3^{n_3}} \right) \right] \quad (2.19)$$

De esta ecuación resulta evidente que se plantea el uso del binomio generalizado de Newton (exponente en números reales).

En el caso de $n_2 + 1$ entero se conoce la forma de determinar analíticamente la solución hasta el orden 4 de la ecuación resultante. Sin embargo, una aproximación de primer orden permite generalizar el resultado a valores reales diferentes de $n_2 + 1$. Obsérvese que existe la siguiente aproximación en el tirante de la sección 1.

$$\begin{aligned} \left[y_1 - \alpha_2 \frac{Q^2}{2gc_2^2 y_2^{2n_2}} \left(1 - \frac{\alpha_1 c_2^2 y_2^{2n_2}}{\alpha_2 c_1^2 y_1^{2n_1}} \right) \right]^{n_2+1} &= y_1^{n_2+1} \left[1 - \frac{\alpha_2}{y_1} \frac{Q^2}{2gc_2^2 y_2^{2n_2}} \left(1 - \frac{\alpha_1 c_2^2 y_2^{2n_2}}{\alpha_2 c_1^2 y_1^{2n_1}} \right) \right]^{n_2+1} \\ &\approx y_1^{n_2+1} - \alpha_2 (n_2 + 1) \frac{Q^2 y_1^{n_2}}{2gc_2^2 y_2^{2n_2}} \left(1 - \frac{\alpha_1 c_2^2 y_2^{2n_2}}{\alpha_2 c_1^2 y_1^{2n_1}} \right) \end{aligned}$$

La cual se corresponde con la carga de velocidad nula en 2. Por ende, se trata el caso de régimen ahogado, y entonces la ecuación de descarga libre-ahogada.

$$\begin{aligned} y_1^{n_2+1} - \alpha_2 (n_2 + 1) \frac{Q^2 y_1^{n_2}}{2gc_2^2 y_2^{2n_2}} \left(1 - \frac{\alpha_1 c_2^2 y_2^{2n_2}}{\alpha_2 c_1^2 y_1^{2n_1}} \right) \\ = \frac{c_3 (n_2 + 1)}{c_2 (n_3 + 1)} y_3^{n_3+1} - 2 \frac{(n_2 + 1)\beta_2}{c_2} \frac{Q^2}{2gc_2 y_2^{n_2}} \left(1 - \frac{\beta_3 c_2 y_2^{n_2}}{\beta_2 c_3 y_3^{n_3}} \right) \end{aligned}$$

Si $y_2 = \mu y_1$

$$Q = \frac{1}{\sqrt{(n_2 + 1)\alpha_2}} \frac{\mu^{n_2} \sqrt{\left(1 - \frac{c_3 (n_2 + 1)}{c_2 (n_3 + 1)} \frac{y_3^{n_3+1}}{y_1^{n_2+1}} \right)}}{\sqrt{\left[\left(1 - \frac{\alpha_1 c_2^2}{\alpha_2 c_1^2} \mu^{2n_2} y_1^{2(n_2-n_1)} \right) - \frac{2\beta_2}{\alpha_2} \mu^{n_2} \left(1 - \frac{\beta_3}{\beta_2} \mu^{n_2} \frac{c_2 y_1^{n_2}}{c_3 y_3^{n_3}} \right) \right]}} c_2 \sqrt{2g} y_1^{n_2+\frac{1}{2}}$$

Las áreas iguales:

$$Q = \frac{1}{\sqrt{(n + 1)\alpha_2}} \frac{\mu^n \sqrt{\left(1 - \frac{y_3^{n+1}}{y_1^{n+1}} \right)}}{\sqrt{\left[\left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \mu^{2n} \right) - \frac{2\beta_2}{\alpha_2} \mu^n \left(1 - \frac{\beta_3}{\beta_2} \mu^n \frac{y_1^n}{y_3^n} \right) \right]}} c \sqrt{2g} y_1^{n+\frac{1}{2}}$$

Cambio de régimen, $y_3 = \mu y_1$; hacia descarga libre:

$$Q = \frac{1}{\sqrt{(n+1)\alpha_2}} \frac{\mu^n \sqrt{(1-\mu^{n+1})}}{\sqrt{\left[\left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \mu^{2n}\right) - \frac{2\beta_2}{\alpha_2} \mu^n \left(1 - \frac{\beta_3}{\beta_2}\right)\right]}} c \sqrt{2g} y_1^{n+\frac{1}{2}}$$

Coefficientes unitarios:

$$\frac{Q}{c \sqrt{2g} y_1^{n+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{(n+1)}} \frac{\mu^n \sqrt{(1-\mu^{n+1})}}{\sqrt{[1-\mu^{2n}]}} \quad (2.20)$$

Esta ecuación a descarga libre combina resultados debidos a las consideraciones de cantidad de movimiento en el numerador y energía en el denominador, como se verá más adelante. Se inserta la única diferencia en la siguiente ecuación, cantidad de movimiento-energía.

$$\frac{Q}{c \sqrt{2g} y_1^{n+\frac{1}{2}}} = \frac{\mu^n \sqrt{\frac{(1-\mu\mu^n)}{(n+1)}}}{\sqrt{[1-\mu^{2n}]}} , n = 1, \quad \frac{2}{3} \sqrt{\frac{1}{(2)}} = 0.4714$$

De la energía:

$$\frac{Q}{\sqrt{2g} c y_1^{n+\frac{1}{2}}} = \frac{\mu^n \sqrt{(1-\mu)}}{\sqrt{[1-\mu^{2n}]}} ; n = 1, \quad \frac{2}{3\sqrt{1+\frac{2}{3}}} = 0.5163$$

Esta aproximación al cambio de régimen depende de la combinación de los coeficientes que intervienen, ya que son diferentes y puede tratarse de un comportamiento que se describe por alguna estructura en una determinada condición geométrica e hidráulica.

2.2.1.3 Funciones M-M

Esta equivale a la forma conservativa de las ecuaciones de Saint-Venant.

Cantidad de movimiento pura para la ecuación a descarga libre.

$$\frac{\beta_1 Q^2}{g A_1} + \tilde{y}_{c1} A_1 = \frac{\beta_2 Q^2}{g A_2} + \tilde{y}_{c2} A_2$$

donde

$$\frac{y_1}{n_1 + 1} c_1 y_1^{n_1} - \frac{y_2}{n_2 + 1} c_2 y_2^{n_2} = \frac{Q^2}{g} \left(\frac{\beta_2}{c_2 y_2^{n_2}} - \frac{\beta_1}{c_1 y_1^{n_1}} \right)$$

$$y_2 \rightarrow \mu y_1$$

$$Q^+ = \frac{Q}{\sqrt{2g} \sqrt{c_2 c_1} y_1^{\frac{(n_2+n_1)+1}{2} + \frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2(n_1+1)\beta_2}} \frac{\mu^{n_2} \sqrt{\left(1 - \frac{(n_1+1)c_2}{n_2+1} \frac{c_2}{c_1} \mu^{n_2+1} y_1^{n_2-n_1}\right)}}{\sqrt{\mu^{n_2} \left(1 - \frac{\beta_1 c_2}{\beta_2 c_1} \mu^{n_2} y_1^{n_2-n_1}\right)}}$$

En este caso se deduce un caudal en media geométrica de áreas.

Para áreas iguales:

$$n_2 = n_1 = n$$

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2(n+1)\beta_2}} \frac{\mu^n \sqrt{\left(1 - \frac{c_2}{c_1} \mu^{n+1}\right)}}{\sqrt{\mu^n \left(1 - \frac{\beta_1 c_2}{\beta_2 c_1} \mu^n\right)}} \sqrt{c_1 c_2} \sqrt{2g} y^{n+\frac{1}{2}}$$

$$c_1 = c_2 = l$$

Todos los coeficientes son unitarios:

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2(n+1)}} \frac{\mu^n \sqrt{(1-\mu\mu^n)}}{\sqrt{\mu^n (1-\mu^n)}} \quad (2.21)$$

Con $n=1$ y en canal rectangular:

$$\frac{Q}{l \sqrt{2g} y^{n+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2} \frac{\mu \sqrt{(1-\mu^2)}}{\sqrt{\mu(1-\mu)}} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{(1+\mu)^2}}{\sqrt{\mu}} \frac{\mu \sqrt{(1-\mu)}}{\sqrt{(1-\mu^2)}}$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{\mu(1+\mu)} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{3} \left(1 + \frac{2}{3}\right)} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{3} \left(\frac{5}{3}\right)} = 0.5270$$

De la ecuación de energía se tiene:

$$\frac{Q}{\sqrt{2g} l y_1^{1+\frac{1}{2}}} = \frac{\mu}{\sqrt{(1+\mu)}} = \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{3}}} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{3}{5}} = \sqrt{\frac{12}{45}} = 0.5164$$

$$\frac{\sqrt{\mu(1+\mu)}}{2} \approx \frac{\mu}{\sqrt{(1+\mu)}}$$

Las ecuaciones son distintas según la cantidad de movimiento pura a energía pura. Esto significa que los valores de los coeficientes de Coriolis y Boussinesq son muy importantes en la definición de caudales y por ende no son todos unitarios. A continuación se deduce la ley general de gasto.

2.2.1.3.1 Desarrollo limitado aguas abajo

Ahora se incorpora la aplicación de la cantidad de movimiento a las secciones 2 y 3, mediante el estimador de tirante. La ecuación de cantidad de movimiento para las secciones 2 y 3 es:

$$\frac{\beta_2 Q^2}{gA_2} + \tilde{y}_{c2} A_2 = \frac{\beta_3 Q^2}{gA_3} + \tilde{y}_{c3} A_3$$

que se reescribe como:

$$\tilde{y} A - \tilde{y}_3 A_3 = \frac{\beta_3 Q^2}{gA_3} - \frac{\beta_2 Q^2}{gA_2}$$

donde \tilde{y}

$$y = \left\{ \frac{c_3 (n_2 + 1)}{c_2 (n_3 + 1)} \right\}^{\frac{1}{1+n_2}} y_3^{\frac{1+n_3}{1+n_2}} \left[1 + \frac{n_3 + 1}{c_3 y_3^{n_3+1}} \frac{Q^2}{2g c_3 y_3^{n_3}} 2\beta_3 \left(1 - \frac{\beta_2 c_3 y_3^{n_3}}{\beta_3 c_2 y_2^{n_2}} \right) \right]^{\frac{1}{1+n_2}}$$

que es el estimador del tirante en la sección 2.

Ahora se puede transferir dicha información de la sección 3 a través del uso de la ecuación de energía.

$$\begin{aligned} \frac{\beta_1 Q^2}{gA_1} + \tilde{y}_{c1} A_1 &= \frac{\beta_2 Q^2}{gA_2} + \tilde{y}_{c2} A_2 \\ + \tilde{y}_{c1} A_1 - \tilde{y}_{c2} A_2 &= \frac{\beta_2 Q^2}{gA_2} - \frac{\beta_1 Q^2}{gA_1} \\ y_2 &= \mu y_1 \end{aligned}$$

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2\beta_2(n_1 + 1)}} \frac{\mu^{n_2} \sqrt{\left(1 - \frac{c_3 n_1 + 1}{c_1 n_3 + 1} \frac{y_3^{n_3+1}}{y_1^{n_1+1}} \right)}}{\sqrt{\mu^{n_2} \left[\left(1 - \frac{\beta_1 c_2}{\beta_2 c_1} \mu^{n_2} \frac{y_1^{n_2}}{y_1^{n_1}} \right) + \frac{c_2}{c_3} \mu^{n_2} \frac{y_1^{n_2}}{y_3^{n_3}} \frac{\beta_3}{\beta_2} \left(1 - \frac{\beta_2 c_3}{\beta_3 c_2} \frac{y_3^{n_3}}{\mu^{n_2} y_1^{n_2}} \right) \right]}} \sqrt{c_1 c_2} \sqrt{2g y_1} y_1^{\frac{(n_1+n_2)}{2}}$$

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2(n_1 + 1)\beta_2}} \frac{\mu^{n_2} \sqrt{\left(1 - \frac{(n_1 + 1)c_2}{n_2 + 1} \frac{c_2}{c_1} \mu^{n_2+1} y_1^{n_2-n_1}\right)}}{\sqrt{\mu^{n_2} \left(1 - \frac{\beta_1 c_2}{\beta_2 c_1} \mu^{n_2} y_1^{n_2-n_1}\right)}} \sqrt{2g} \sqrt{c_2 c_1} y_1^{\frac{(n_2+n_1)+1}{2}}$$

Áreas iguales:

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2\beta_2(n+1)}} \frac{\mu^n \sqrt{(1 - \mu^{n+1})}}{\sqrt{\mu^n \left[\left(1 - \frac{\beta_1}{\beta_2} \mu^n\right) + \frac{\beta_3}{\beta_2} \left(1 - \frac{\beta_2}{\beta_3}\right)\right]}} c \sqrt{2gy_1} y_1^n$$

Coefficientes unitarios:

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2(n+1)}} \frac{\mu^n \sqrt{(1 - \mu^{n+1})}}{\sqrt{\mu^n (1 - \mu^n)}} c \sqrt{2gy_1} y_1^n \quad (2.22)$$

Se propone resolver los casos de una estructura vertedora en área del mismo tipo que la del canal.

$$\frac{y_1}{n+1} c y_1^n - \frac{c y_3^{n+1}}{n+1} \left[1 - 2 \frac{\beta_3 Q^2}{2g c^2 y_3^{2n}} \frac{1}{y_3} \left(\frac{\beta_2 y_3^n}{\beta_3 \mu^n y_1^n} - 1\right)\right]^{n+1} = \frac{2\beta_2 Q^2}{c y_2^n 2g} \left(1 - \frac{\beta_1 c y_2^n}{\beta_2 c y_1^n}\right)$$

Se hace la aproximación siguiente:

$$\frac{y_1}{n+1} c y_1^n - \frac{c}{n+1} \left[y_3^{n+1} - 2 \frac{\beta_3 Q^2}{2g(n+1) c^2 y_3^n} \left(\frac{\beta_2 y_3^n}{\beta_3 \mu^n y_1^n} - 1\right)\right] = \frac{2\beta_2 Q^2}{c y_2^n 2g} \left(1 - \frac{\beta_1 c y_2^n}{\beta_2 c y_1^n}\right)$$

$$\frac{y_1}{n+1} c y_1^n - \frac{c y_3^{n+1}}{n+1} = \frac{2\beta_2 Q^2}{c y_2^n 2g} \left(1 - \frac{\beta_1 c y_2^n}{\beta_2 c y_1^n}\right) - \left[2 \frac{c}{n+1} \frac{\beta_3 Q^2}{2g(n+1) c^2 y_3^n} \left(\frac{\beta_2 y_3^n}{\beta_3 \mu^n y_1^n} - 1\right)\right]$$

$$Q = \frac{\mu^{\frac{n}{2}} \sqrt{\left(1 - \frac{y_3^{n+1}}{y_1^{n+1}}\right)}}{\sqrt{(n+1)2\beta_2} \sqrt{\left\{1 - \left[\frac{1}{(n+1)} \frac{\beta_3 \mu^n y_1^n}{(n+1)\beta_2 y_3^n} \left(\frac{\beta_2 y_3^n}{\beta_3 \mu^n y_1^n} - 1\right)\right] - \frac{\beta_1 \mu^n}{\beta_2}\right\}}} c \sqrt{2gy_1} y_1^{n+\frac{1}{2}}$$

$$Q = \frac{\mu^{\frac{n}{2}} \mu^{\frac{n}{2}} \sqrt{(1 - \mu^n)}}{\sqrt{2(n+1)} \sqrt{\mu^n \left\{1 - \mu^n - \left[\frac{1}{(n+1)} \frac{\mu^n y_1^n}{(n+1) y_3^{2n}} \left(\frac{y_3^n}{\mu^n y_1^n} - 1\right)\right]\right\}}} c \sqrt{2gy_1} y_1^{n+\frac{1}{2}}$$

Para libre se debe cumplir:

$$\frac{y_3^n}{\mu^n y_1^n} = 1$$

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2(n+1)}} \frac{\mu^n \sqrt{(1-\mu\mu^n)}}{\sqrt{\mu^n \{1-\mu^n\}}} c \sqrt{2g} y_1^{n+\frac{1}{2}}$$

Que es idéntica a la ley de descarga libre:

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2(n+1)}} \frac{\mu^n \sqrt{(1-\mu\mu^n)}}{\sqrt{\mu^n (1-\mu^n)}} \quad (2.23)$$

La otra aproximación es la siguiente. Se incorpora la aplicación de la cantidad de movimiento a las secciones 2 y 3 mediante cálculo directo del tirante.

$$y = \left[\frac{c_3 (n_2 + 1)}{c_2 (n_3 + 1)} y_3^{1+n_3} - 2 \frac{(n_2 + 1) \beta_2}{c_2} \frac{Q^2}{2g c_2 y_2^{n_2}} \left(1 - \frac{\beta_3 c_2 y_2^{n_2}}{\beta_2 c_3 y_3^{n_3}} \right) \right]^{\frac{1}{1+n_2}}$$

que es el estimador del tirante en la sección 2.

Ahora se pueden transferir dicha información de la sección 3 a través del uso de la ecuación de cantidad de movimiento.

$$\tilde{y}_{c1} A_1 - \tilde{y}_{c2} A_2 = \frac{\beta_2 Q^2}{g A_2} - \frac{\beta_1 Q^2}{g A_1}$$

$$\frac{y_1}{n_1 + 1} c_1 y_1^{n_1} - \frac{Q^2 2\beta_2}{2g c_2^2 y_2^{2n_2}} c_2 y_2^{n_2} \left(1 - \frac{\beta_3 c_2 y_2^{n_2}}{\beta_2 c_3 y_3^{n_3}} \right) = \frac{y_2}{n_2 + 1} c_2 y_2^{n_2} = \frac{c_2}{n_2 + 1} y^{n_2+1}$$

pero

$$y = \left[\frac{c_3 (n_2 + 1)}{c_2 (n_3 + 1)} y_3^{1+n_3} - 2 \frac{(n_2 + 1) \beta_2}{c_2} \frac{Q^2}{2g c_2 y_2^{n_2}} \left(1 - \frac{\beta_3 c_2 y_2^{n_2}}{\beta_2 c_3 y_3^{n_3}} \right) \right]^{\frac{1}{1+n_2}}$$

Y conduce a

$$\frac{c_2}{n_2+1} y^{n_2+1} = \frac{c_2}{n_2+1} \left[\frac{c_3 (n_2+1)}{c_2 (n_3+1)} y_3^{1+n_3} - 2 \frac{(n_2+1) \beta_2}{c_2} \frac{Q^2}{2g c_2 y_2^{n_2}} \left(1 - \frac{\beta_3 c_2 y_2^{n_2}}{\beta_2 c_3 y_3^{n_3}} \right) \right] \quad (2.24)$$

lo cual conduce a la solución anterior.

2.2.1.4 Funciones M-E

Ahora se combina cantidad de movimiento en la sección 1-2 y energía de 2-3. Se inicia de aguas abajo 3, hacia aguas arriba, 2.

2.2.1.4.1 Desarrollo limitado aguas abajo

Se propone el estimador siguiente:

$$y = y_3 \left[1 + \frac{\alpha_3}{y_3} \frac{Q_3^2}{2gA_3^2(y_3)} - \frac{\alpha_2}{y_3} \frac{Q_2^2}{2gA_2^2} \right]$$

Se aproxima la forma siguiente:

$$\frac{y_1}{n_1 + 1} c_1 y_1^{n_1} - \left(\frac{c_2 y_3^{n_2+1}}{n_2 + 1} \right) + \left(\frac{c_2 y_3^{n_2+1}}{n_2 + 1} \right) \frac{(n_2 + 1) \alpha_2 Q_2^2}{y_3 2gA_2^2} \left(1 - \frac{\alpha_3 A_2^2}{\alpha_2 A_3^2} \right) = \frac{Q^2}{g} \left(\frac{\beta_2}{c_2 y_2^{n_2}} - \frac{\beta_1}{c_1 y_1^{n_1}} \right)$$

$$y_2 \rightarrow \mu y_1$$

Q

$$= \frac{1}{\sqrt{(n_1 + 1)\alpha_2}} \frac{\mu^{n_2} \sqrt{\left(1 - \frac{n_1 + 1}{n_2 + 1} \frac{c_2 y_3^{n_2+1}}{c_1 y_1^{n_1+1}} \right)}}{\sqrt{\mu^{n_2} \left[\frac{2\beta_2}{\alpha_2} \left(1 - \mu^{n_2} \frac{\beta_1 c_2 y_1^{n_2}}{\beta_2 c_1 y_1^{n_1}} \right) - \frac{y_3^{n_2}}{y_2^{n_2}} \left(1 - \mu^{2n_2} \frac{\alpha_3 c_2^2 y_1^{2n_2}}{\alpha_2 c_3^2 y_3^{2n_3}} \right) \right]}} \sqrt{2gy_1} \sqrt{c_1 c_2} y_1^{\frac{n_1+n_2}{2}}$$

Las ns y cs iguales

$$Q = \frac{1}{\sqrt{(n+1)\alpha_2}} \frac{\mu^n \sqrt{\left(1 - \frac{y_3^{n+1}}{y_1^{n+1}} \right)}}{\sqrt{\mu^n \left[\frac{2\beta_2}{\alpha_2} \left(1 - \mu^n \frac{\beta_1}{\beta_2} \right) - \frac{y_3^n}{y_2^n} \left(1 - \mu^{2n} \frac{\alpha_3 y_1^{2n}}{\alpha_2 y_3^{2n}} \right) \right]}} \sqrt{2gy_1} c y_1^n$$

Cambio de régimen:

$$y_3 \rightarrow \mu y_1$$

$$Q = \frac{1}{\sqrt{(n+1)\alpha_2}} \frac{\mu^n \sqrt{(1-\mu^{n+1})}}{\sqrt{\mu^n \left[\frac{2\beta_2}{\alpha_2} (1-\mu^n \frac{\beta_1}{\beta_2}) - \mu^n (1-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}) \right]}} \sqrt{2gy_1} c y_1^n \quad (2.25)$$

Todo unitario. Incluido el n:

$$Q = \frac{1}{2} \frac{\mu \sqrt{(1-\mu^2)}}{\sqrt{\mu(1-\mu)}} \sqrt{2g} l y_1^{1+\frac{1}{2}}$$

Que es la ecuación derivada de la cantidad de movimiento pura.

2.2.1.4.2 Desarrollo limitado aguas arriba

Energía:

$$y_2 = y_3 \left(1 + \frac{\alpha_3}{y_3} \frac{Q^2}{2gA_3^2(y_3)} - \frac{\alpha_2}{y_3} \frac{Q^2}{2gA_2^2} \right)$$

Cantidad de movimiento:

$$\frac{c_1}{n_1 + 1} y_1^{n_1+1} = \frac{c_2}{n_2 + 1} y_2^{n_2+1} + \frac{Q^2}{g} \left(\frac{\beta_2}{c_2 y_2^{n_2}} - \frac{\beta_1}{c_1 y_1^{n_1}} \right)$$

$$y_2 \rightarrow \mu y_1$$

$$Q = \frac{1}{\sqrt{\alpha_2}} \frac{\mu^{n_2} \sqrt{1 - \left[\frac{c_2 (n_1 + 1)}{c_1 (n_2 + 1)} \right]^{\frac{1}{n_2+1}} \frac{y_3}{y_1^{\frac{n_1+1}{n_2+1}}}}}{\sqrt{\frac{(n_1 + 1) 2\beta_2 y_1^{\frac{n_1+1}{n_2+1}}}{(n_2 + 1) \alpha_2 y_1} \mu^{n_2} \frac{c_2 y_1^{n_2}}{c_1 y_1^{n_1}} \left(1 - \frac{\beta_1 c_2 \mu^{n_2} y_1^{n_2}}{\beta_2 c_1 y_1^{n_1}} \right) - \left[\frac{c_2 (n_1 + 1)}{c_1 (n_2 + 1)} \right]^{\frac{1}{n_2+1}} \left(1 - \frac{\alpha_3 c_2^2 \mu^{2n_2} y_1^{2n_2}}{\alpha_2 c_3^2 y_3^{2n_2}} \right)}} \sqrt{2g} c_2 y_1^{n_2}$$

Áreas iguales:

$$Q = \frac{1}{\sqrt{\alpha_2}} \frac{\mu^n \sqrt{\left(1 - \frac{y_3}{y_1} \right)}}{\sqrt{\left[\frac{2\beta_2}{\alpha_2} \mu^n \left(1 - \mu^n \frac{\beta_1}{\beta_2} \right) - \left(1 - \frac{\alpha_3}{\alpha_2} \mu^{2n} \frac{y_1^{2n}}{y_3^{2n}} \right) \right]}} \sqrt{2g} c y_1^{n+\frac{1}{2}}$$

Cambio de régimen:

$$y_3 \rightarrow \mu y_1$$

$$Q = \frac{1}{\sqrt{\alpha_2}} \frac{\mu^n \sqrt{(1-\mu)}}{\sqrt{\left[\frac{2\beta_2}{\alpha_2} \mu^n \left(1 - \mu^n \frac{\beta_1}{\beta_2} \right) - \left(1 - \frac{\alpha_3}{\alpha_2} \right) \right]}} \sqrt{2g} c y_1^{n+\frac{1}{2}}$$

Coeficientes unitarios:

$$Q = \frac{\mu \sqrt{(1-\mu)}}{\sqrt{2} \sqrt{[\mu (1-\mu^n)]}} \sqrt{2g} l y_1^{1+\frac{1}{2}} \quad (2.26)$$

Combina, a una constante cerca, el resultado del principio de energía en el numerador y el de cantidad de movimiento en el denominador. Ahora se aplican los mismos procedimientos a las estructuras tipo orificio.

2.2.2 Estructuras tipo orificio

Se construyen las ecuaciones de caudal para un orificio con la condición de que se presente el denominado punto geométrico.

2.2.2.1 Funciones E-E

Al aplicar la ecuación de energía entre las secciones 1 y 2 se obtiene la ecuación de caudal a descarga libre y aplicando a las tres secciones se espera obtener la ecuación a descarga ahogada.

2.2.2.1.1 Descarga libre

De la ecuación de energía aplicada en las secciones 1 y 2:

$$y_1 + \alpha_1 \frac{Q^2}{2gA_1^2} = y_2 + \alpha_2 \frac{Q^2}{2gA_2^2}$$

$$Q = \frac{1}{\sqrt{\alpha_2}} \frac{\sqrt{1 - \frac{y_2}{y_1}}}{\sqrt{1 - \frac{\alpha_1 c_2^2 y_2^{2n_2}}{\alpha_2 c_1^2 y_1^{2n_1}}}} \sqrt{2gy_1} c_2 y_2^{n_2}$$

Con $y_2 \approx \mu W$, donde W es la apertura:

$$Q = \frac{1}{\sqrt{\alpha_2}} \frac{\mu^{n_2} \sqrt{1 - \frac{y_2}{y_1}}}{\sqrt{1 - \frac{\alpha_1 c_2^2}{\alpha_2 c_1^2} \mu^{2n_2} \frac{W^{2n_2}}{y_1^{2n_1}}}} \sqrt{2gy_1} c_2 W^{n_2}$$

Con lo que:

$$Cd = \frac{1}{\sqrt{\alpha_2}} \frac{\mu^{n_2} \sqrt{1 - \frac{y_2}{y_1}}}{\sqrt{1 - \frac{\alpha_1 c_2^2}{\alpha_2 c_1^2} \mu^{2n_2} \frac{W^{2n_2}}{y_1^{2n_1}}}}$$

La ecuación anterior es la ecuación general de descarga libre para cualquier relación de áreas en la sección 1 y 2. Si las secciones 1 y 2 son iguales, se tiene:

$$Cd = \frac{1}{\sqrt{\alpha_2}} \frac{\mu^n \sqrt{1 - \mu \frac{W}{y_1}}}{\sqrt{1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \left(\mu \frac{W}{y_1}\right)^{2n}}} \quad (2.27)$$

Es importante saber por qué $C_c = 0.611$ y no el cambio de régimen para sección rectangular de $\mu = \frac{2}{3}$; $\sim C_c = \frac{0.78535}{0.78535 + \frac{1}{2}}$. para que se obtenga $C_c = 0.611$. Lo anterior es en canal rectangular. Aun así, el exponente n no afecta el cálculo.

2.2.2.1.2 Descarga ahogada

Para construir una ecuación incluyendo las variables de la sección aguas abajo, se propone el siguiente estimador de tirante al aplicar la energía en las secciones 2 y 3.

Secciones 1-2:

$$y_1 + \alpha_1 \frac{Q^2}{2gA_1^2} = y_2 + \alpha_2 \frac{Q^2}{2gA_2^2}$$

Secciones 2-3:

$$y_2 + \alpha_2 \frac{Q^2}{2gA_2^2} = y_3 + \alpha_3 \frac{Q^2}{2gA_3^2}$$

De 1-2:

$$y = y_1 + \alpha_1 \frac{Q^2}{2gA_1^2} - \alpha_2 \frac{Q^2}{2gA_2^2}$$

De 2-3:

$$y = y_3 + \alpha_3 \frac{Q^2}{2gA_3^2} - \alpha_2 \frac{Q^2}{2gA_2^2}$$

Igualando:

$$y_1 + \alpha_1 \frac{Q^2}{2gA_1^2} = y_3 + \alpha_3 \frac{Q^2}{2gA_3^2}$$

Se observa que al realizar la igualdad, se pierde la información que proporciona la sección 2, por lo que este método no es un buen indicador del flujo en una estructura tipo orificio. Continuando con la deducción, se tiene:

$$y_1 - y_3 = \alpha_3 \frac{Q^2}{2gA_3^2} - \alpha_1 \frac{Q^2}{2gA_1^2}$$

Si $y_2 \approx \mu W$:

$$Q = \frac{1}{\sqrt{\alpha_3}} \frac{\mu^n \sqrt{\left(1 - \frac{y_3}{y_1}\right)}}{\sqrt{\left(\frac{\mu W}{y_3}\right)^{2n} \left(1 - \frac{\alpha_1 (y_3)}{\alpha_3 (y_1)}\right)^{2n}}} \sqrt{2gy_1} cW^n \quad (2.28)$$

2.2.2.2 Funciones E-M

La ecuación de cantidad de movimiento para las secciones 2 y 3 es:

$$\frac{\beta_2 Q^2}{gA_2} + \tilde{y}_{c2} A_2 = \frac{\beta_3 Q^2}{gA_3} + \tilde{y}_{c3} A_3$$

donde \tilde{y} es el centroide de la sección.

$$y = \left\{ \frac{c_3 (n_2 + 1)}{c_2 (n_3 + 1)} y_3^{1+n_3} \right\}^{\frac{1}{1+n_2}} \left[1 - 2 \frac{(n_3 + 1) \beta_3 Q^2}{2g c_3^2 y_3^{2n_3}} \frac{1}{y_3} \left(\frac{\beta_2 c_3 y_3^{n_3}}{\beta_3 c_2 y_2^{n_2}} - 1 \right) \right]^{\frac{1}{1+n_2}} \quad (2.29)$$

La primera aproximación se realiza mediante desarrollo limitado en y_3 a carga de velocidad nula en la sección aguas abajo.

2.2.2.2.1 Desarrollo limitado aguas abajo

Aproximación a y mediante desarrollo limitado:

$$y = \left\{ \frac{c_3 (n_2 + 1)}{c_2 (n_3 + 1)} \right\}^{\frac{1}{1+n_2}} y_3^{\frac{1+n_3}{1+n_2}} \left[1 - 2 \frac{(n_3 + 1) \beta_3 Q^2}{2g (n_2 + 1) c_3^2 y_3^{2n_3}} \frac{1}{y_3} \left(\frac{\beta_2 c_3 y_3^{n_3}}{\beta_3 c_2 y_2^{n_2}} - 1 \right) \right]$$

Si $y_2 = \mu W$

$$y = \left\{ \frac{c_3 (n_2 + 1)}{c_2 (n_3 + 1)} \right\}^{\frac{1}{1+n_2}} y_3^{\frac{1+n_3}{1+n_2}} \left[1 - 2 \frac{(n_3 + 1) \beta_3 Q^2}{2g (n_2 + 1) c_3^2 y_3^{2n_3}} \frac{1}{y_3} \left(\frac{\beta_2 c_3 y_3^{n_3}}{\beta_3 c_2 \mu^{n_2} W^{n_2}} - 1 \right) \right]$$

que es el estimador del tirante y en la sección 2.

A través de la cantidad de movimiento se tiene entonces la información hidráulica de la sección 3, en la sección 2, a través del estimador de tirante. Ahora se puede transferir dicha información de la sección 3 a través del uso de la ecuación de energía.

$$y_1 + \alpha_1 \frac{Q^2}{2g c_1^2 y_1^{2n_1}} = y + \alpha_2 \frac{Q^2}{2g c_2^2 y_2^{2n_2}}$$

Reintroduciendo en los términos restantes $y_2 = \mu W$ y desarrollando el álgebra correspondiente, finalmente se tiene:

$$Q = \frac{1}{\sqrt{\alpha_2}} \frac{\sqrt{\left(1 - \left\{ \frac{c_3 (n_2 + 1)}{c_2 (n_3 + 1)} \right\}^{\frac{1}{1+n_2}} y_3^{\frac{1+n_3}{1+n_2}} \frac{1}{y_1} \right) \sqrt{2gy_1} c_2 \mu^{n_2} W^{n_2}}}{\sqrt{\left[1 - \frac{2 c_2^2 \mu^{2n_2} W^{2n_2} (n_3 + 1) \beta_3}{\alpha_2 c_3^2 (n_2 + 1) y_3^{2n_3}} \left\{ \frac{c_3 (n_2 + 1)}{c_2 (n_3 + 1)} \right\}^{\frac{1}{1+n_2}} y_3^{\frac{1+n_3}{1+n_2}} \left(\frac{\beta_2 c_3 y_3^{n_3}}{\beta_3 c_2 \mu^{n_2} W^{n_2}} - 1 \right) - \frac{\alpha_1 c_2^2 \mu^{2n_2} W^{2n_2}}{\alpha_2 c_1^2 y_1^{2n_1}} \right]}}$$

Se organiza la ecuación a manera de satisfacer la ecuación a descarga libre, que es la siguiente.

$$Q = \frac{1}{\sqrt{\alpha_2}} \frac{\mu^{n_2} \sqrt{\left(1 - \left\{ \frac{c_3 (n_2 + 1)}{c_2 (n_3 + 1)} \right\}^{\frac{1}{1+n_2}} y_3^{\frac{n_3 - n_2}{1+n_2}} \frac{y_3}{y_1} \right) \sqrt{2gy_1} c_2 W^{n_2}}}{\sqrt{\left[1 - \frac{2 c_2^2 (n_3 + 1) \mu^{2n_2} W^{2n_2} \beta_3}{\alpha_2 c_3^2 (n_2 + 1) y_3^{2n_3}} \left\{ \frac{c_3 (n_2 + 1)}{c_2 (n_3 + 1)} \right\}^{\frac{1}{1+n_2}} y_3^{\frac{n_3 - n_2}{1+n_2}} \left(\frac{\beta_2 c_3 y_3^{n_3}}{\beta_3 c_2 \mu^{n_2} W^{n_2}} - 1 \right) - \frac{\alpha_1 c_2^2 \mu^{2n_2} W^{2n_2}}{\alpha_2 c_1^2 y_1^{2n_1}} \right]}} \quad (2.30)$$

Si $y_3 \rightarrow \mu W$ esto tiene que ser físicamente en el sentido, también, de las áreas

$$A_{i+1}^2 = c_{i+1} y_{i+1}^{n_{i+1}} \rightarrow A_i^2 = c_i y_i^{n_i} = c_i y_i^{n_i}; \quad \frac{y_3}{y_1} = \mu; \quad \frac{\beta_2}{\beta_3} = 1$$

Se cumple la ecuación a descarga libre. Dada la anterior condición es evidente que resulta conveniente que sean del mismo tipo de área.

$$A_{i+1}^2 = A_i^2 = A_{i-1}^2 = c y_i^n$$

$$Q = \frac{1}{\sqrt{\alpha_2}} \frac{\mu^n \sqrt{\left(1 - \frac{y_3}{y_1} \right) \sqrt{2gy_1} c W^n}}{\sqrt{\left[1 - \frac{2\beta_3}{\alpha_2} \left(\mu \frac{W}{y_3} \right)^{2n} \left(\frac{\beta_2}{\beta_3} \left(\frac{y_3}{\mu W} \right)^n - 1 \right) - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \mu^{2n} \frac{W^{2n}}{y_1^{2n}} \right]}}$$

Luego para el caso geoméricamente conocido by ; y Si $y_3 \rightarrow \mu W$ se llega a:

$$Q = \frac{1}{\sqrt{\alpha_2}} \frac{\mu \sqrt{\left(1 - \frac{\mu W}{y_1}\right)}}{\sqrt{\left[1 - \frac{2\beta_3}{\alpha_2} \left(\frac{\beta_2}{\beta_3} - 1\right) - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \mu^2 \frac{W^2}{y_1^2}\right]}} b W \sqrt{2gy_1}$$

Por lo antes expuesto, la ecuación general de descarga ahogada y libre se puede escribir como:

$$Q = \frac{1}{\sqrt{\alpha_2}} \frac{\mu^{n_2} \sqrt{\left(1 - \left\{\frac{c_3}{c_2} \frac{(n_2 + 1)}{(n_3 + 1)}\right\}^{\frac{1}{1+n_2}} \frac{y_3^{n_3-n_2}}{y_1^{1+n_2}}\right)}}{\sqrt{\left[1 - \frac{2}{\alpha_2} \frac{c_2^2}{c_3^2} \frac{(n_3 + 1)}{(n_2 + 1)} \frac{\mu^{2n_2} W^{2n_2} \beta_3}{y_3^{2n_3}} \left\{\frac{c_3}{c_2} \frac{(n_2 + 1)}{(n_3 + 1)}\right\}^{\frac{1}{1+n_2}} \frac{y_3^{n_3-n_2}}{y_1^{1+n_2}} \left(\frac{\beta_2}{\beta_3} \frac{c_3}{c_2} \frac{y_3^{n_3}}{\mu^{n_2} W^{n_2}} - 1\right) - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \frac{c_2^2}{c_1^2} \frac{\mu^{2n_2} W^{2n_2}}{y_1^{2n_1}}\right]}} \sqrt{2gy_1} c_2 W^{n_2}$$

Luego de la ecuación más simple:

$$Q = \frac{1}{\sqrt{\alpha_2}} \frac{\mu \sqrt{\left(1 - \frac{\mu W}{y_1}\right)}}{\sqrt{\left[1 - \frac{2\beta_3}{\alpha_2} \left(\frac{\beta_2}{\beta_3} - 1\right) - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \mu^2 \frac{W^2}{y_1^2}\right]}} b W \sqrt{2gy_1}; \quad \varepsilon = \frac{2\beta_3}{\alpha_2} \left(\frac{\beta_2}{\beta_3} - 1\right) \quad (2.31)$$

O se acepta un breve error en la aproximación al cambio de régimen o se agrega una condición.

2.2.2.2 Desarrollo limitado en tirante aguas arriba

Se retoman las ecuaciones nuevamente. La ecuación de cantidad de movimiento para las secciones 2 y 3 es:

$$\frac{\beta_2 Q^2}{gA_2} + \tilde{y}_{c2} A_2 = \frac{\beta_3 Q^2}{gA_3} + \tilde{y}_{c3} A_3$$

$$y^{1+n_2} = \frac{c_3}{c_2} \frac{(n_2 + 1)}{(n_3 + 1)} y_3^{1+n_3} + 2 \frac{(n_2 + 1) Q^2}{c_2} \frac{1}{2g} \left(\frac{\beta_3}{c_3 y_3^{n_3}} - \frac{\beta_2}{c_2 y_2^{n_2}} \right)$$

que es el tirante y en la sección 2, sin aproximación. A través de la cantidad de movimiento se tiene entonces la información hidráulica de la sección 3, en la sección 2, a través del tirante y . Ahora se puede transferir dicha información a la sección 1 a través del uso de la ecuación de energía.

$$y_1 + \alpha_1 \frac{Q^2}{2gc_1^2 y_1^{2n_1}} = y + \alpha_2 \frac{Q^2}{2gc_2^2 y_2^{2n_2}}$$

La cual se adecua como:

$$y_1 - \frac{\alpha_2 Q^2}{2g c_2^2 y_2^{2n_2}} \left(1 - \frac{\alpha_1 c_2^2 y_2^{2n_2}}{\alpha_2 c_1^2 y_1^{2n_1}} \right) = y$$

Que se sustituye en la ecuación de energía, sección 1-2.

$$\begin{aligned} & \left[y_1 - \alpha_2 \frac{Q^2}{2g c_2^2 y_2^{2n_2}} \left(1 - \frac{\alpha_1 c_2^2 y_2^{2n_2}}{\alpha_2 c_1^2 y_1^{2n_1}} \right) \right]^{n_2+1} \\ & = \frac{c_3 (n_2 + 1)}{c_2 (n_3 + 1)} y_3^{1+n_3} - 2 \frac{(n_2 + 1) \beta_2}{c_2} \frac{Q^2}{2g c_2 y_2^{n_2}} \left(1 - \frac{\beta_3 c_2 y_2^{n_2}}{\beta_2 c_3 y_3^{n_3}} \right) \end{aligned}$$

De esta ecuación resulta evidente que se plantea el uso del binomio generalizado de Newton (exponente en números reales). Sin embargo, una aproximación de primer orden permite generalizar el resultado a valores reales diferentes de $n_2 + 1$. Obsérvese que existe la siguiente aproximación en el tirante de la sección 1.

$$\begin{aligned} & \left[y_1 - \alpha_2 \frac{Q^2}{2g c_2^2 y_2^{2n_2}} \left(1 - \frac{\alpha_1 c_2^2 y_2^{2n_2}}{\alpha_2 c_1^2 y_1^{2n_1}} \right) \right]^{n_2+1} = \quad (2.32) \\ & y_1^{n_2+1} \left[1 - \frac{\alpha_2}{y_1} \frac{Q^2}{2g c_2^2 y_2^{2n_2}} \left(1 - \frac{\alpha_1 c_2^2 y_2^{2n_2}}{\alpha_2 c_1^2 y_1^{2n_1}} \right) \right]^{n_2+1} \approx y_1^{n_2+1} - \frac{\alpha_2 (n_2+1) Q^2 y_1^{n_2+1}}{y_1 2g c_2^2 y_2^{2n_2}} \left(1 - \frac{\alpha_1 c_2^2 y_2^{2n_2}}{\alpha_2 c_1^2 y_1^{2n_1}} \right) \\ & \frac{\alpha_1 c_2^2 y_2^{2n_2}}{\alpha_2 c_1^2 y_1^{2n_1}} \approx y_1^{n_2+1} - \alpha_2 (n_2 + 1) \frac{Q^2 y_1^{n_2}}{2g c_2^2 y_2^{2n_2}} \left(1 - \frac{\alpha_1 c_2^2 y_2^{2n_2}}{\alpha_2 c_1^2 y_1^{2n_1}} \right) \end{aligned}$$

La cual se corresponde con la carga de velocidad nula en 2, por ende, se trata el caso de régimen completamente ahogado. Sin embargo, esta aproximación no es adecuada para el resto de los casos (semi-ahogada o libre), puesto que el término $\left(1 - \frac{\alpha_1 c_2^2 y_2^{2n_2}}{\alpha_2 c_1^2 y_1^{2n_1}} \right)$ toma valores cercanos a la unidad y se comete error significativo al realizar solamente la aproximación de primer orden.

2.2.2.3 Funciones M-M

Esta equivale a la forma conservativa de las ecuaciones de Saint-Venant.

Cantidad de movimiento pura

2.2.2.3.1 Descarga libre

Sección 1-2

$$\frac{\beta_1 Q^2}{g A_1} + \tilde{y}_{c1} A_1 = \frac{\beta_2 Q^2}{g A_2} + \tilde{y}_{c2} A_2$$

Después de sustituir los valores correspondientes y $y_2 \approx \mu W$ se obtiene:

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2\beta_2(n_1+1)}} \frac{\mu^{n_2} \sqrt{\left(1 - \frac{(n_1+1)c_2}{(n_2+1)c_1} \mu^{n_2+1} \frac{W^{n_2+1}}{y_1^{n_2+1}}\right)}}{\sqrt{\frac{c_2}{c_1} \mu^{n_2} \frac{W^{n_2}}{y_1^{n_2}} \left(1 - \frac{\beta_1 c_2}{\beta_2 c_1} \mu^{n_2} \frac{W^{n_2}}{y_1^{n_1}}\right)}} \sqrt{2gy_1 c_2 W^{n_2}} \quad (2.33)$$

Sin embargo, esta ecuación no representa adecuadamente el fenómeno de flujo en estructuras de tipo orificio, por discontinuidad que sufre el perfil de la superficie libre del flujo provocada por el propio orificio entre las secciones 1 y 2.

2.2.2.3.2 Descarga ahogada

Ahora se incorpora la aplicación de la cantidad de movimiento a las secciones 2 y 3, mediante el estimador de tirante.

Sección 1-2

$$\frac{\beta_1 Q^2}{gA_1} + \tilde{y}_{c1} A_1 = \frac{\beta_2 Q^2}{gA_2} + \tilde{y}_{c2} A_2$$

Sección 2-3

$$\frac{\beta_2 Q^2}{gA_2} + \tilde{y}_{c2} A_2 = \frac{\beta_3 Q^2}{gA_3} + \tilde{y}_{c3} A_3$$

De las secciones 1-2, se tiene:

$$y = \left\{ \frac{(n_2 + 1)}{c_2} \left(\frac{1}{n_1 + 1} y_1 A_1 - \frac{\beta_2 Q^2}{gA_2} + \frac{\beta_1 Q^2}{gA_1} \right) \right\}^{\frac{1}{n_2+1}}$$

De las secciones 2-3, se tiene:

$$y = \left\{ \frac{(n_2 + 1)}{c_2} \left(\frac{1}{n_3 + 1} y_3 A_3 - \frac{\beta_2 Q^2}{gA_2} + \frac{\beta_3 Q^2}{gA_3} \right) \right\}^{\frac{1}{n_2+1}}$$

$$\frac{1}{n_1 + 1} y_1 A_1 + \frac{\beta_1 Q^2}{gA_1} = \frac{1}{n_3 + 1} y_3 A_3 + \frac{\beta_3 Q^2}{gA_3}$$

Se observa que al realizar la igualación se pierde la información que proporciona la sección 2, por lo que este método no es un buen indicador del flujo en una estructura tipo orificio. Siguiendo la deducción de las ecuaciones de gasto en función de la cantidad de movimiento se tiene:

$$\frac{2A_2^2 \beta_1 Q^2}{2A_2^2 g y_1} \left(\frac{\beta_1}{A_1} - \frac{\beta_3}{A_3} \right) = \frac{1}{(n_1 + 1)} A_1 \left(1 - \frac{(n_1 + 1) y_3 A_3}{(n_3 + 1) y_1 A_1} \right)$$

Si $y_2 \approx \mu W$ y para secciones iguales

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2(n+1)\beta_1}} \frac{\mu^n \sqrt{1 - \left(\frac{y_3}{y_1}\right)^{n+1}}}{\sqrt{\left(\frac{\mu W}{y_1}\right)^n \left(\beta_1 \left(\frac{\mu W}{y_1}\right)^n - \beta_3\right)}} \sqrt{2gy_1} c_2 W^n \quad (2.34)$$

2.2.2.4 Funciones M-E

Ahora se combina cantidad de movimiento en la sección 1-2 y energía de 2-3. Se inicia de aguas abajo 3, hacia aguas arriba, 2. Se propone el estimador siguiente:

$$y + \alpha_2 \frac{Q^2}{2gA_2^2} = y_3 + \alpha_3 \frac{Q^2}{2gA_3^2}$$

Desde el punto de vista estricto no es adecuada la aplicación de la ecuación de cantidad de movimiento entre las secciones 1 y 2, debido a la discontinuidad que sufre la superficie libre del flujo, como ya se mencionó anteriormente. Sin embargo, se puede aplicar el mismo razonamiento que ha venido desarrollando lo que conduce a aplicar la ecuación de energía entre las secciones 1 y 2:

$$\begin{aligned} \bar{y}_1 A_1 + \frac{\beta_1 Q^2}{gA_1} &= \bar{y}_2 A_2 + \frac{\beta_2 Q^2}{gA_2} \\ \frac{(n_2 + 1) c_1}{(n_1 + 1) c_2} y_1^{n_1+1} &\left[1 - \frac{(n_1 + 1) A_2}{c_1} \frac{2\beta_2 Q^2}{y_1^{n_1} 2gy_1 A_2^2} \left(1 - \frac{\beta_1 A_2}{\beta_2 A_1} \right) \right] \\ &= \left\{ y_3 \left[1 - \alpha_2 \frac{y_1}{y_3} \frac{Q^2}{2gy_1 A_2^2} \left(1 - \frac{\alpha_3 A_2^2}{\alpha_2 A_3^2} \right) \right] \right\}^{n_2+1} \end{aligned}$$

2.2.2.4.1 Desarrollo limitado aguas abajo

Se realiza el desarrollo limitado del segundo miembro de la igualdad:

$$\begin{aligned} \frac{(n_2 + 1) c_1}{(n_1 + 1) c_2} y_1^{n_1+1} &\left[1 - \frac{(n_1 + 1) A_2}{c_1} \frac{2\beta_2 Q^2}{y_1^{n_1} 2gy_1 A_2^2} \left(1 - \frac{\beta_1 A_2}{\beta_2 A_1} \right) \right] \\ &= y_3^{n_2+1} \left[1 - (n_2 + 1) \frac{y_1}{y_3} \frac{\alpha_2 Q^2}{2gy_1 A_2^2} \left(1 - \frac{\alpha_3 A_2^2}{\alpha_2 A_3^2} \right) \right] \end{aligned}$$

Si $y_2 \rightarrow \mu W$

$$Q = \frac{1}{\sqrt{(n_2+1)\alpha_2}} \frac{\mu^{n_2} \sqrt{\frac{(n_2+1)c_1}{(n_1+1)c_2} \left(1 - \frac{(n_1+1)c_2 y_3^{n_2+1}}{(n_2+1)c_1 y_1^{n_1+1}}\right)}}{\sqrt{\frac{c_2}{c_1} \mu^{n_2} \frac{W^{n_2} 2\beta_2}{y_1^{n_1} \alpha_2} \left(1 - \frac{\beta_1 c_2}{\beta_2 c_1} \mu^{n_2} \frac{W^{n_2}}{y_1^{n_1}}\right) - \frac{y_3^{n_2}}{y_1^{n_1}} \left(1 - \frac{\alpha_3 c_2^2}{\alpha_2 c_3^2} \mu^{2n_2} \frac{W^{2n_2}}{y_3^{2n_3}}\right)}} \sqrt{2gy_1 c_2 W^{n_2}} \quad (2.35)$$

Se divide entre el término $\sqrt{2gy_1 c_2 W^{n_2}}$ el CD para secciones iguales:

$$Cd = \frac{1}{\sqrt{(n_2+1)\alpha_2}} \frac{\mu^n \sqrt{\left(1 - \frac{y_3}{y_1}\right)^{n+1}}}{\sqrt{\frac{2\beta_2}{\alpha_2} \left(\frac{W}{y_1}\right)^n \left(1 - \frac{\beta_1}{\beta_2} \left(\frac{W}{y_1}\right)^n\right) - \left(\frac{y_3}{y_1}\right)^n \left(1 - \frac{\alpha_3}{\alpha_2} \left(\frac{W}{y_3}\right)^{2n}\right)}} \quad (2.36)$$

2.2.2.4.2 Desarrollo limitado aguas arriba

Ahora se combina cantidad de movimiento en la sección 1-2 y energía de 2-3. Se inicia de aguas abajo 3, hacia aguas arriba, 2.

$$\begin{aligned} & \left[\frac{(n_2+1)c_1}{(n_1+1)c_2} \right]^{\frac{1}{n_2+1}} \frac{y_1^{n_1+1}}{y_1^{n_2+1}} \left[1 - \frac{(n_1+1)}{n_2+1} \frac{A_2}{c_1 y_1^{n_1}} \frac{2\beta_2 Q^2}{2gy_1 A_2^2} \left(1 - \frac{\beta_1 A_2}{\beta_2 A_1}\right) \right] \\ & = y_3 - \alpha_2 y_1 \frac{Q^2}{2gy_1 A_2^2} \left(1 - \frac{\alpha_3 A_2^2}{\alpha_2 A_3^2}\right) \\ & \quad \sqrt{2gy_1 A_2} \end{aligned}$$

Si $y_2 \rightarrow \mu W$ y dividiendo entre el término $\sqrt{2gy_1 c_2 W^{n_2}}$

$$Q = \frac{1}{\sqrt{\alpha_2}} \frac{\mu^{n_2} \sqrt{1 - \left[\frac{(n_1+1)c_2}{(n_2+1)c_1} \right]^{\frac{1}{n_2+1}} \frac{y_3}{y_1^{n_2+1}}}}{\sqrt{\frac{(n_1+1)c_2}{n_2+1} \mu^{n_2} \frac{W^{n_2} 2\beta_2}{y_1^{n_1} \alpha_2} \left(1 - \frac{\beta_1 c_2}{\beta_2 c_1} \mu^{n_2} \frac{W^{n_2}}{y_1^{n_1}}\right) - \left[\frac{(n_1+1)c_2}{(n_2+1)c_1} \right]^{\frac{1}{n_2+1}} \frac{y_1}{y_1^{n_2+1}} \left(1 - \frac{\alpha_3 c_2^2}{\alpha_2 c_3^2} \mu^{2n_2} \frac{W^{2n_2}}{y_3^{2n_3}}\right)}} \quad (2.37)$$

Para secciones iguales:

$$Cd = \frac{1}{\sqrt{\alpha_2}} \frac{\mu^n \sqrt{1 - \frac{y_3}{y_1}}}{\sqrt{\frac{2\beta_2}{\alpha_2} \left(\frac{W}{y_1}\right)^n \left(1 - \frac{\beta_1}{\beta_2} \left(\frac{W}{y_1}\right)^n\right) - \left(1 - \frac{\alpha_3}{\alpha_2} \left(\frac{W}{y_3}\right)^{2n}\right)}} \quad (2.38)$$

2.2.3 Ecuaciones analíticas de estructuras tipo vertedor

Para estructuras que vierten se analizan los casos donde las aproximaciones presentan un desarrollo limitado en la cantidad de movimiento combinada con energía. Los otros casos son idénticos a las ecuaciones ya presentación de aproximación analítica.

2.2.3.1 Funciones E-E

Este caso se abordó en el tema respectivo en aproximación analítica.

2.2.3.2 Funciones E-M

La ecuación de cantidad de movimiento para las secciones 2 y 3 es:

$$\frac{\beta_2 Q^2}{g A_2} + \tilde{y}_{c2} A_2 = \frac{\beta_3 Q^2}{g A_3} + \tilde{y}_{c3} A_3$$

que se reescribe como:

$$\tilde{y} A - \tilde{y}_3 A_3 = \frac{\beta_3 Q^2}{g A_3} - \frac{\beta_2 Q^2}{g A_2}$$

donde \tilde{y} es el baricentro del área potencial en la sección 2.

$$\frac{y}{n_2 + 1} c_2 y^{n_2} - \frac{y_3}{n_3 + 1} c_3 y_3^{n_3} = \frac{Q^2}{g} \left(\frac{\beta_3}{c_3 y_3^{n_3}} - \frac{\beta_2}{c_2 y_2^{n_2}} \right)$$

$$y = \left[\frac{c_3 (n_2 + 1)}{c_2 (n_3 + 1)} y_3^{1+n_3} - 2 \frac{(n_2 + 1) \beta_2}{c_2} \frac{Q^2}{2g c_2^2 y_2^{2n_2}} c_2 y_2^{n_2} \left(1 - \frac{\beta_3 c_2 y_2^{n_2}}{\beta_2 c_3 y_3^{n_3}} \right) \right]^{\frac{1}{1+n_2}}$$

que es el tirante y en la sección 2.

A través de la cantidad de movimiento se consigue la información hidráulica de la sección 3, en la sección 2, a través del estimador de tirante y . Ahora se puede transferir dicha información de la sección 1 a través del uso de la ecuación de energía.

$$y_1 + \alpha_1 \frac{Q^2}{2g c_1^2 y_1^{2n_1}} = y + \alpha_2 \frac{Q^2}{2g c_2^2 y_2^{2n_2}}$$

La cual se adecua como:

$$y_1 - \frac{\alpha_2 Q^2}{2g c_2^2 y_2^{2n_2}} \left(1 - \frac{\alpha_1 c_2^2 y_2^{2n_2}}{\alpha_2 c_1^2 y_1^{2n_1}} \right) = y$$

$$\left[y_1 - \alpha_2 \frac{Q^2}{2g c_2^2 y_2^{2n_2}} \left(1 - \frac{\alpha_1 c_2^2 y_2^{2n_2}}{\alpha_2 c_1^2 y_1^{2n_1}} \right) \right]^{n_2+1} = \left[\frac{c_3 (n_2+1)}{c_2 (n_3+1)} y_3^{1+n_3} - 2 \frac{(n_2+1)\beta_2}{c_2} \frac{Q^2}{2g c_2^2 y_2^{2n_2}} c_2 y_2^{n_2} \left(1 - \frac{\beta_3 c_2 y_2^{n_2}}{\beta_2 c_3 y_3^{n_3}} \right) \right] \quad (2.39)$$

Se plantea el uso del binomio generalizado de Newton (exponente en números reales). Para el caso sin aproximación se sabe que para $n_2 = 1, 2, 3, \dots$, el planteamiento a tal problema permite obtener una solución, es decir la sección 2 debe tener geometría rectangular; $A_2 = b y_2$, triangular o parabólica, o de orden 3, 4, etcétera. Se inicia con la más sencilla.

2.2.3.2.1 Sección rectangular

En la sección rectangular se tiene que $n_2 = 1$:

$$\left[y_1 - \alpha_2 \frac{Q^2}{2g b^2 y_2^2} \left(1 - \frac{\alpha_1 b^2 y_2^2}{\alpha_2 c_1^2 y_1^{2n_1}} \right) \right]^2 = \left[\frac{c_3}{b} \frac{2}{(n_3+1)} y_3^{1+n_3} - \frac{4\beta_2}{c_2} \frac{Q^2}{2g b^2 y_2^2} b y_2 \left(1 - \frac{\beta_3 b y_2}{\beta_2 c_3 y_3^{n_3}} \right) \right]$$

$$\begin{aligned} & - \left(\frac{\alpha_2 Q^2}{2g b^2 y_2^2} \right)^2 \left(1 - \frac{\alpha_1 b^2 y_2^2}{\alpha_2 c_1^2 y_1^{2n_1}} \right)^2 \\ & + \left(\frac{\alpha_2 Q^2}{2g b^2 y_2^2} \right) 2 y_1 \left[\left(1 - \frac{\alpha_1 b^2 y_2^2}{\alpha_2 c_1^2 y_1^{2n_1}} \right) + 2 \frac{\beta_2}{\alpha_2} \frac{y_2}{y_1} \left(1 - \frac{\beta_3 b y_2}{\beta_2 c_3 y_3^{n_3}} \right) \right] \\ & - \left(1 - \frac{c_3}{b} \frac{2}{(n_3+1)} \frac{y_3^{1+n_3}}{y_1^2} \right) y_1^2 = 0 \end{aligned}$$

$$X = \frac{\alpha_2 Q^2}{2g b^2 y_2^2}$$

$$AX^2 + BX + C = 0$$

$$A = - \left(1 - \frac{\alpha_1 b^2 y_2^2}{\alpha_2 c_1^2 y_1^{2n_1}} \right)^2$$

$$B = 2 y_1 \left[\left(1 - \frac{\alpha_1 b^2 y_2^2}{\alpha_2 c_1^2 y_1^{2n_1}} \right) + 2 \frac{\beta_2}{\alpha_2} \frac{y_2}{y_1} \left(1 - \frac{\beta_3 b y_2}{\beta_2 c_3 y_3^{n_3}} \right) \right]$$

$$C = - \left(1 - \frac{c_3}{b} \frac{2}{(n_3+1)} \frac{y_3^{1+n_3}}{y_1^2} \right) y_1^2$$

$$X = - \frac{B}{2A} - \frac{1}{2A} \sqrt{B^2 - 4AC}$$

Resolviendo X y considerando $y_2 = \mu y_1$; $\mu^2 y_1^2$ para áreas iguales, todo a rectangular se tiene:

$$Q = \frac{\mu}{\sqrt{\alpha_2}} \sqrt{\frac{\left[\left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \mu^2\right) + 2 \frac{\beta_2}{\alpha_2} \mu \left(1 - \frac{\beta_3}{\beta_2} \mu \frac{y_1}{y_3}\right) \right]^2 - \left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \mu^2\right)^2 \left(1 - \frac{y_3^2}{y_1^2}\right)}{1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \mu^2}} \sqrt{2gy_1 b}$$

y_1 para cambio de régimen, $y_3 = \mu y_1$ y coeficientes unitarios

$$Q = \frac{\mu \sqrt{[(1-\mu^2)] - \sqrt{[(1-\mu^2)]^2 - (1-\mu^2)^3}}}{1-\mu^2} \sqrt{2gy_1 b} y_1 \quad (2.40)$$

2.2.3.2.2 Sección triangular

Aplicando la conservación de la energía entre las secciones 1 y 2, y la conservación de la cantidad de movimiento entre las secciones 2 y 3, se tiene:

$$\begin{aligned} & \frac{(n_2 + 1) c_3}{(n_3 + 1) c_2} y_3^{n_3+1} - (n_2 + 1) y_2^{n_2} y_1 \frac{2\beta_2}{\alpha_2} \frac{\alpha_2 Q^2}{2gy_1 c_2^2 y_2^{2n_2}} \left(1 - \frac{\beta_3 c_2 y_2^{n_2}}{\beta_2 c_3 y_3^{n_3}}\right) \\ & = \left\{ y_1 \left[1 - \frac{\alpha_2 Q^2}{2gy_1 c_2^2 y_2^{2n_2}} \left(1 - \frac{\alpha_1 c_2^2 y_2^{2n_2}}{\alpha_2 c_1^2 y_1^{2n_1}}\right) \right] \right\}^{n_2+1} \end{aligned}$$

El planteamiento a tal problema permite obtener una solución analítica si la sección 2 tiene geometría triangular, es decir, se tiene que $n_2 = 2$:

$$\begin{aligned} & \frac{3}{(n_3 + 1) c_2} y_3^{n_3+1} - 6y_2^2 y_1 \frac{\beta_2}{\alpha_2} \frac{\alpha_2 Q^2}{2gy_1 c_2^2 y_2^4} \left(1 - \frac{\beta_3 c_2 y_2^2}{\beta_2 c_3 y_3^{n_3}}\right) \\ & = y_1^3 \left[1 - \frac{\alpha_2 Q^2}{2gy_1 c_2^2 y_2^4} \left(1 - \frac{\alpha_1 c_2^2 y_2^4}{\alpha_2 c_1^2 y_1^{2n_1}}\right) \right]^3 \end{aligned}$$

Sean:

$$S = \frac{3 \left[\frac{3 \left(1 - \frac{\alpha_1 c_2^2 y_2^4}{\alpha_2 c_1^2 y_1^{2n_1}}\right) - \left(6 \frac{y_2^2 \beta_2}{y_1^2 \alpha_2}\right) \left(1 - \frac{\beta_3 c_2 y_2^2}{\beta_2 c_3 y_3^{n_3}}\right)}{\left(1 - \frac{\alpha_1 c_2^2 y_2^4}{\alpha_2 c_1^2 y_1^{2n_1}}\right)^3} \right] - \left[-\frac{3}{\left(1 - \frac{\alpha_1 c_2^2 y_2^4}{\alpha_2 c_1^2 y_1^{2n_1}}\right)} \right]^2}{9}$$

$$R = \frac{9 \left[-\frac{3}{\left(1 - \frac{\alpha_1 c_2^2 y_2^4}{\alpha_2 c_1^2 y_1^{2n_1}}\right)} \right] \left[\frac{3 \left(1 - \frac{\alpha_1 c_2^2 y_2^4}{\alpha_2 c_1^2 y_1^{2n_1}}\right) - \left(6 \frac{y_2^2 \beta_2}{y_1^2 \alpha_2}\right) \left(1 - \frac{\beta_3 c_2 y_2^2}{\beta_2 c_3 y_3^{n_3}}\right)}{\left(1 - \frac{\alpha_1 c_2^2 y_2^4}{\alpha_2 c_1^2 y_1^{2n_1}}\right)^3} \right] - 27 \left[-\frac{3}{\left(1 - \frac{\alpha_1 c_2^2 y_2^4}{\alpha_2 c_1^2 y_1^{2n_1}}\right)} \right]^3 - 2 \left[-\frac{3}{\left(1 - \frac{\alpha_1 c_2^2 y_2^4}{\alpha_2 c_1^2 y_1^{2n_1}}\right)} \right]^3}{54}$$

$$Q = \frac{1}{\sqrt{\alpha_2}} \sqrt[3]{R + \sqrt{S^3 + R^2}} + \sqrt[3]{R - \sqrt{S^3 + R^2}} + \frac{1}{\left(1 - \frac{\alpha_1 c_2^2 y_2^4}{\alpha_2 c_1^2 y_1^{2n_1}}\right)} \sqrt{2gy_1} m y_2^2 \quad (2.41)$$

Si $y_2 \rightarrow \mu y_1$ a descarga libre $y_3 \rightarrow \mu W$ y secciones son triangulares:

$$S = - \frac{2 \left(\mu^2 \frac{\beta_2}{\alpha_2} \right) \left(1 - \frac{\beta_3}{\beta_2} \right)}{\left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \mu^4 \right)^3}$$

$$R = \frac{3 \left(\mu^2 \frac{\beta_2}{\alpha_2} \right) \left(1 - \frac{\beta_3}{\beta_2} \right)}{\left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \mu^4 \right)^4} - \frac{\mu^3}{2 \left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \mu^4 \right)^3}$$

$$Q = \frac{\mu^2}{\sqrt{\alpha_2}} \sqrt[3]{R + \sqrt{S^3 + R^2}} + \sqrt[3]{R - \sqrt{S^3 + R^2}} + \frac{1}{\left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \mu^4\right)} \sqrt{2gy_1} m y_1^2 \quad (2.42)$$

2.2.3.3 Funciones M-M

Este caso se abordó en el tema respectivo en aproximación analítica.

2.2.3.1 Funciones M-E

La solución analítica es la siguiente.

$$y + \alpha_2 \frac{Q_2^2}{2gA_2^2} = y_3 + \alpha_3 \frac{Q_3^2}{2gA_3^2(y_3)}$$

Se propone la aproximación siguiente:

$$\frac{y_1}{n_1 + 1} c_1 y_1^{n_1} - \frac{Q^2}{g} \left(\frac{\beta_2}{c_2 y_2^{n_2}} - \frac{\beta_1}{c_1 y_1^{n_1}} \right) - \left(\frac{c_2 y_3^{n_2+1}}{n_2 + 1} \right) \left\{ \left[1 - \frac{y_1}{y_3} \frac{\alpha_2 Q_2^2}{2g y_1 A_2^2} \left(1 - \frac{\alpha_3 c_2^2 y_2^{2n_2}}{\alpha_2 c_3^2 y_3^{2n_3}} \right) \right] \right\}^{n_2+1} = 0$$

2.2.3.1.1 Sección rectangular

En la sección rectangular se tiene que $n_2 = 1$:

$$\frac{c_1}{n_1 + 1} y_1^{n_1+1} - \frac{Q^2}{g} \left(\frac{\beta_2}{c_2 y_2} - \frac{\beta_1}{c_1 y_1^{n_1}} \right) - \left(\frac{c_2 y_3^2}{2} \right) \left\{ \left[1 - \frac{y_1}{y_3} \frac{\alpha_2 Q_2^2}{2 g y_1 A_2^2} \left(1 - \frac{\alpha_3 c_2^2 y_2^2}{\alpha_2 c_3^2 y_3^{2n_3}} \right) \right] \right\}^2 = 0$$

$$- \left(1 - \frac{\alpha_3 c_2^2 y_2^2}{\alpha_2 c_3^2 y_3^{2n_3}} \right)^2 \left(\frac{\alpha_2 Q_2^2}{2 g y_1 c_2^2 y_2^2} \right)^2$$

$$+ \left[2 \left(\frac{y_3}{y_1} \right) \left(1 - \frac{\alpha_3 c_2^2 y_2^2}{\alpha_2 c_3^2 y_3^{2n_3}} \right) - 4 \frac{\beta_2 y_2}{\alpha_2 y_1} \left(1 - \frac{\beta_1 c_2 y_2}{\beta_2 c_1 y_1^{n_1}} \right) \right] \left(\frac{\alpha_2 Q_2^2}{2 g y_1 c_2^2 y_2^2} \right)$$

$$+ \left(1 - \frac{c_2 (n_1 + 1)}{c_1} \frac{y_3^2}{2 y_1^{n_1+1}} \right) \frac{2}{n_1 + 1} \frac{c_1 y_1^{n_1+1}}{c_2 y_1^2} = 0$$

$$X = \frac{\alpha_2 Q_2^2}{2 g y_1 c_2^2 y_2^2}$$

$$AX^2 + BX + C = 0$$

$$A = - \left(1 - \frac{\alpha_3 c_2^2 y_2^2}{\alpha_2 c_3^2 y_3^{2n_3}} \right)^2$$

$$B = \left[2 \left(\frac{y_3}{y_1} \right) \left(1 - \frac{\alpha_3 c_2^2 y_2^2}{\alpha_2 c_3^2 y_3^{2n_3}} \right) - 4 \frac{\beta_2 y_2}{\alpha_2 y_1} \left(1 - \frac{\beta_1 c_2 y_2}{\beta_2 c_1 y_1^{n_1}} \right) \right]$$

$$C = \left(1 - \frac{c_2 (n_1 + 1)}{c_1} \frac{y_3^2}{2 y_1^{n_1+1}} \right) \frac{2}{n_1 + 1} \frac{c_1 y_1^{n_1+1}}{c_2 y_1^2}$$

$$X = - \frac{B}{2A} - \frac{1}{2A} \sqrt{B^2 - 4AC}$$

Resolviendo y despejando Q bajo la condición $y_2 \rightarrow \mu y_1$

$$= \frac{1}{\sqrt{\alpha_2}} \sqrt{\frac{\left(\frac{y_3}{y_1} \right) \left(1 - \frac{\alpha_3 c_2^2 y_2^2}{\alpha_2 c_3^2 y_3^{2n_3}} \right) - 2 \frac{\beta_2}{\alpha_2} \left(1 - \frac{\beta_1 c_2 y_2}{\beta_2 c_1 y_1^{n_1}} \right)}{\left(1 - \frac{\alpha_3 c_2^2 y_2^2}{\alpha_2 c_3^2 y_3^{2n_3}} \right)^2} + \frac{\left[\left(\frac{y_3}{y_1} \right) \left(1 - \frac{\alpha_3 c_2^2 y_2^2}{\alpha_2 c_3^2 y_3^{2n_3}} \right) - 2 \frac{\beta_2}{\alpha_2} \left(1 - \frac{\beta_1 c_2 y_2}{\beta_2 c_1 y_1^{n_1}} \right) \right]^2 + \left(1 - \frac{\alpha_3 c_2^2 y_2^2}{\alpha_2 c_3^2 y_3^{2n_3}} \right)^2 \left[\left(1 - \frac{c_2 (n_1 + 1)}{c_1} \frac{y_3^2}{2 y_1^{n_1+1}} \right) \frac{2}{n_1 + 1} \frac{c_1 y_1^{n_1+1}}{c_2 y_1^2} \right]}{\left(1 - \frac{\alpha_3 c_2^2 y_2^2}{\alpha_2 c_3^2 y_3^{2n_3}} \right)^2}} \sqrt{2 g y_1 c_2 y_1} \quad (2.43)$$

Todo rectangular:

$$Q = \frac{\mu}{\sqrt{\alpha_2}} \sqrt{\frac{\left(\frac{y_3}{y_1} \right) \left(1 - \frac{\alpha_3 y_1^2}{\alpha_2 y_3^2} \mu^2 \right) - 2 \frac{\beta_2}{\alpha_2} \mu \left(1 - \frac{\beta_1}{\beta_2} \mu \right)}{\left(1 - \frac{\alpha_3 y_1^2}{\alpha_2 y_3^2} \mu^2 \right)^2} + \frac{\left[\left(\frac{y_3}{y_1} \right) \left(1 - \frac{\alpha_3 y_1^2}{\alpha_2 y_3^2} \mu^2 \right) - 2 \frac{\beta_2}{\alpha_2} \mu \left(1 - \frac{\beta_1}{\beta_2} \mu \right) \right]^2 + \left(1 - \frac{\alpha_3 y_1^2}{\alpha_2 y_3^2} \mu^2 \right)^2 \left[\left(1 - \frac{y_3^2}{y_1^2} \right) \right]}{\left(1 - \frac{\alpha_3 y_1^2}{\alpha_2 y_3^2} \mu^2 \right)^2}} \sqrt{2 g y_1 c_2 y_1}$$

Cambio de régimen:

$$y_3 \rightarrow \mu y_1$$

$$Q = \frac{\mu}{\sqrt{\alpha_2}} \sqrt{\frac{\mu(1-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}) - 2\frac{\beta_2}{\alpha_2}\mu(1-\frac{\beta_1}{\beta_2}\mu)}{(1-\frac{\alpha_3}{\alpha_2})^2} + \frac{[\mu(1-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}) - 2\frac{\beta_2}{\alpha_2}\mu(1-\frac{\beta_1}{\beta_2}\mu)]^2 + (1-\frac{\alpha_3}{\alpha_2})^2[(1-\mu^2)]}{(1-\frac{\alpha_3}{\alpha_2})^2}} \sqrt{2gy_1 c_2 y_1} \quad (2.44)$$

Las restricciones sobre los coeficientes de Coriolis no deben ser iguales y el coeficiente de la sección 2 debe ser mayor que el de la sección 3. Los de Boussinesq pueden ser unitarios.

2.2.3.2 Sección triangular

Aplicando la conservación de la cantidad de movimiento entre las secciones 1 y 2, y la conservación de la energía entre las secciones 2 y 3, se tiene:

$$\frac{c_1}{n_1 + 1} y_1^{n_1+1} - 2 \frac{\beta_2}{\alpha_2} c_2 y_2^{n_2} y_1 \frac{\alpha_2 Q^2}{2gy_1 c_2^2 y_2^{2n_2}} \left(1 - \frac{\beta_1 c_2 y_2^{n_2}}{\beta_2 c_1 y_1^{n_1}}\right) - \left(\frac{c_2 y_3^{n_2+1}}{n_2 + 1}\right) \left[1 - \frac{y_1}{y_3} \frac{\alpha_2 Q^2}{2gy_1 c_2^2 y_2^{2n_2}} \left(1 - \frac{\alpha_3 c_2^2 y_2^{2n_2}}{\alpha_2 c_1^2 y_3^{2n_3}}\right)\right]^{n_2+1} = 0$$

El planteamiento a tal problema permite obtener una solución analítica si la sección 2 tiene geometría triangular, es decir, se tiene que $n_2 = 2$:

$$\frac{c_1}{n_1 + 1} y_1^{n_1+1} - 2 \frac{\beta_2}{\alpha_2} c_2 y_2^2 y_1 \frac{\alpha_2 Q^2}{2gy_1 c_2^2 y_2^4} \left(1 - \frac{\beta_1 c_2 y_2^2}{\beta_2 c_1 y_1^{n_1}}\right) - \left(\frac{c_2 y_3^3}{3}\right) \left[1 - \frac{\alpha_2 Q^2}{2gy_1 c_2^2 y_2^4} \left(\frac{y_1}{y_3}\right) \left(1 - \frac{\alpha_3 c_2^2 y_2^4}{\alpha_2 c_1^2 y_3^{2n_3}}\right)\right]^3 = 0$$

$$S = -2 \frac{\left(\mu^2 \frac{\beta_2}{\alpha_2}\right) \left(1 - \frac{\beta_1 c_2}{\beta_2 c_1} \mu^2 \frac{y_1^2}{y_1^{n_1}}\right)}{\left(1 - \frac{\alpha_3 c_2^2}{\alpha_2 c_3^2} \mu^4 \frac{y_1^4}{y_3^{2n_3}}\right)^3}$$

$$R = 3 \frac{\left(\mu^2 \frac{\beta_2}{\alpha_2}\right) \left(1 - \frac{\beta_1 c_2}{\beta_2 c_1} \mu^2 \frac{y_1^2}{y_1^{n_1}}\right)}{\left(\frac{y_1}{y_3}\right) \left(1 - \frac{\alpha_3 c_2^2}{\alpha_2 c_3^2} \mu^4 \frac{y_1^4}{y_3^{2n_3}}\right)^4} - \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{3}{n_1 + 1} \frac{c_1 y_1^{n_1+1}}{c_2 y_3^3}\right)}{\left(\frac{y_1}{y_3}\right)^3 \left(1 - \frac{\alpha_3 c_2^2}{\alpha_2 c_1^2} \mu^4 \frac{y_1^4}{y_3^{2n_3}}\right)^3}$$

$$Q = \frac{\mu^2}{\sqrt{\alpha_2}} \sqrt{\sqrt[3]{R + \sqrt{S^3 + R^2}} + \sqrt[3]{R - \sqrt{S^3 + R^2}} + \frac{1}{\left(\frac{y_1}{y_3}\right) \left(1 - \frac{\alpha_3 c_2^2}{\alpha_2 c_3^2} \mu^4 \frac{y_1^4}{y_3^{2n_3}}\right)}} \sqrt{2gy_1} c_2 y_1^2 \quad (2.45)$$

Si las tres secciones son triangulares y a descarga libre $y_3 \rightarrow \mu y_1$ y a descarga libre $y_3 \rightarrow \mu y_1$:

$$S = -2 \frac{\left(\mu^2 \frac{\beta_2}{\alpha_2}\right) \left(1 - \frac{\beta_1}{\beta_2}\right)}{\left(1 - \frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)^3}$$

$$R = 3 \frac{\left(\mu^3 \frac{\beta_2}{\alpha_2}\right) \left(1 - \frac{\beta_1}{\beta_2} \mu^2\right)}{\left(1 - \frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)^4} - \frac{1}{2 \left(1 - \frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)^3}$$

$$Q = \frac{\mu^2}{\sqrt{\alpha_2}} \sqrt{\sqrt[3]{R + \sqrt{S^3 + R^2}} + \sqrt[3]{R - \sqrt{S^3 + R^2}} + \frac{\mu}{\left(1 - \frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)}} \sqrt{2gy_1} c_2 y_1^2 \quad (2.46)$$

2.2.4 Estructuras tipo orificio

Se inicia con las partes que contienen cantidad de movimiento.

2.2.4.1 Funciones E-M

La ecuación de cantidad de movimiento para las secciones 2 y 3 es:

$$\frac{\beta_2 Q^2}{g A_2} + \tilde{y} c_2 A_2 = \frac{\beta_3 Q^2}{g A_3} + \tilde{y} c_3 A_3$$

Que se reescribe como:

$$\tilde{y} A - \tilde{y}_3 A_3 = \frac{\beta_3 Q^2}{g A_3} - \frac{\beta_2 Q^2}{g A_2}$$

donde \tilde{y}

$$y = \left[\frac{(n_2 + 1) c_3}{n_3 + 1} \frac{c_3}{c_2} y_3^{n_3 + 1} - \frac{(n_2 + 1)}{c_2} \beta_2 \frac{Q^2}{g c_2 y_2^{n_2}} \left(1 - \frac{\beta_3 c_2 y_2^{n_2}}{\beta_2 c_3 y_3^{n_3}}\right) \right]^{\frac{1}{n_2 + 1}}$$

que es el tirante y en la sección 2.

A través de la cantidad de movimiento se tiene entonces la información hidráulica de la sección 3, en la sección 2, a través del estimador de tirante y . Ahora se puede transferir dicha información de la sección 1 a través del uso de la ecuación de energía.

$$y_1 + \alpha_1 \frac{Q^2}{2gc_1^2 y_1^{2n_1}} = y + \alpha_2 \frac{Q^2}{2gc_2^2 y_2^{2n_2}}$$

$$\left[\frac{(n_2+1)c_3}{n_3+1} y_3^{n_3+1} - \frac{(n_2+1)}{c_2} \beta_2 \frac{Q^2}{gc_2 y_2^{n_2}} \left(1 - \frac{\beta_3 c_2 y_2^{n_2}}{\beta_2 c_3 y_3^{n_3}} \right) \right] = \left\{ y_1 \left[1 - \frac{\alpha_2 Q^2}{2gy_1 c_2^2 y_2^{2n_2}} \left(1 - \frac{\alpha_1 c_2^2 y_2^{2n_2}}{\alpha_2 c_1^2 y_1^{2n_1}} \right) \right] \right\}^{n_2+1} \quad (2.47)$$

Se plantea el uso del binomio generalizado de Newton (exponente en números reales). Si $n_2 + 1$ es entero es conocido la forma de determinar analíticamente la solución hasta el orden 4, de la ecuación resultante. Para el caso sin aproximación se sabe que para $n_2 = 1, 2, 3, \dots$, el planteamiento a tal problema permite obtener una solución, es decir, la sección 2 debe tener geometría rectangular, triangular o parabólica, o de orden 3, 4, etcétera. Se inicia con la más sencilla.

2.2.4.1.1 Sección rectangular

En la sección rectangular se tiene que $n_2 = 1$:

$$\frac{2}{n_3+1} \frac{c_3}{c_2} y_3^{n_3+1} - \frac{2}{c_2} \beta_2 \frac{Q^2}{gc_2 y_2} \left(1 - \frac{\beta_3 c_2 y_2}{\beta_2 c_3 y_3^{n_3}} \right) = \left\{ y_1 \left[1 - \frac{\alpha_2 Q^2}{2gy_1 c_2^2 y_2^2} \left(1 - \frac{\alpha_1 c_2^2 y_2^2}{\alpha_2 c_1^2 y_1^{2n_1}} \right) \right] \right\}^2$$

Si $c_2 y_2 = b\mu W$ Las n_s y $c_s = b$ iguales. Todo en canal rectangular.

$$Q = \frac{\mu}{\sqrt{\alpha_2}} \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{\alpha_1 \mu^2 W^2}{\alpha_2 y_1^2} \right) - 2\mu \frac{W \beta_2}{y_1 \alpha_2} \left(1 - \frac{\beta_3}{\beta_2} \mu \frac{W}{y_3} \right) - \sqrt{\left[2\mu \frac{W \beta_2}{y_1 \alpha_2} \left(1 - \frac{\beta_3}{\beta_2} \mu \frac{W}{y_3} \right) - \left(1 - \frac{\alpha_1 \mu^2 W^2}{\alpha_2 y_1^2} \right) \right]^2 - \left(1 - \frac{\alpha_1 \mu^2 W^2}{\alpha_2 y_1^2} \right)^2 \left(1 - \frac{y_3^2}{y_1^2} \right)}}{\left(1 - \frac{\alpha_1 \mu^2 W^2}{\alpha_2 y_1^2} \right)} \sqrt{2gy_1 b W}}$$

Si $y_3 = \mu y_1$

$$Q = \frac{\mu}{\sqrt{\alpha_2}} \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{\alpha_1 \mu^2 W^2}{\alpha_2 y_1^2} \right) - 2\mu \frac{W \beta_2}{y_1 \alpha_2} \left(1 - \frac{\beta_3}{\beta_2} \right) - \sqrt{\left[2\mu \frac{W \beta_2}{y_1 \alpha_2} \left(1 - \frac{\beta_3}{\beta_2} \right) - \left(1 - \frac{\alpha_1 \mu^2 W^2}{\alpha_2 y_1^2} \right) \right]^2 - \left(1 - \frac{\alpha_1 \mu^2 W^2}{\alpha_2 y_1^2} \right)^2 \left(1 - \mu^2 \frac{W^2}{y_1^2} \right)}}{\left(1 - \frac{\alpha_1 \mu^2 W^2}{\alpha_2 y_1^2} \right)} \sqrt{2gy_1 b W}} \quad (2.48)$$

2.2.4.1.2 Sección triangular

Aplicando la conservación de la energía entre las secciones 1 y 2, y la conservación de la cantidad de movimiento entre las secciones 2 y 3, se tiene:

$$\begin{aligned} & \frac{(n_2 + 1) c_3}{(n_3 + 1) c_2} y_3^{n_3+1} - (n_2 + 1) y_2^{n_2} y_1 \frac{2\beta_2}{\alpha_2} \frac{\alpha_2 Q^2}{2g y_1 c_2^2 y_2^{2n_2}} \left(1 - \frac{\beta_3 c_2 y_2^{n_2}}{\beta_2 c_3 y_3^{n_3}}\right) \\ & = \left\{ y_1 \left[1 - \frac{\alpha_2 Q^2}{2g y_1 c_2^2 y_2^{2n_2}} \left(1 - \frac{\alpha_1 c_2^2 y_2^{2n_2}}{\alpha_2 c_1^2 y_1^{2n_1}}\right) \right] \right\}^{n_2+1} \end{aligned}$$

El planteamiento a tal problema permite obtener una solución analítica si la sección 2 tiene geometría triangular, es decir, se tiene que $n_2 = 2$:

$$\begin{aligned} & \frac{3}{(n_3 + 1) c_2} \frac{c_3}{y_3^{n_3+1}} - 6 y_2^2 y_1 \frac{\beta_2}{\alpha_2} \frac{\alpha_2 Q^2}{2g y_1 c_2^2 y_2^4} \left(1 - \frac{\beta_3 c_2 y_2^2}{\beta_2 c_3 y_3^{n_3}}\right) \\ & = y_1^3 \left[1 - \frac{\alpha_2 Q^2}{2g y_1 c_2^2 y_2^4} \left(1 - \frac{\alpha_1 c_2^2 y_2^4}{\alpha_2 c_1^2 y_1^{2n_1}}\right) \right]^3 \\ & \left(\frac{\alpha_2 Q^2}{2g y_1 c_2^2 y_2^4} \right)^3 - \frac{3}{\left(1 - \frac{\alpha_1 c_2^2 y_2^4}{\alpha_2 c_1^2 y_1^{2n_1}}\right)} \left(\frac{\alpha_2 Q^2}{2g y_1 c_2^2 y_2^4} \right)^2 \\ & + \frac{\left[3 \left(1 - \frac{\alpha_1 c_2^2 y_2^4}{\alpha_2 c_1^2 y_1^{2n_1}}\right) - \left(6 \frac{y_2^2 \beta_2}{y_1^2 \alpha_2}\right) \left(1 - \frac{\beta_3 c_2 y_2^2}{\beta_2 c_3 y_3^{n_3}}\right) \right]}{\left(1 - \frac{\alpha_1 c_2^2 y_2^4}{\alpha_2 c_1^2 y_1^{2n_1}}\right)^3} \left(\frac{\alpha_2 Q^2}{2g y_1 c_2^2 y_2^4} \right) \\ & - \frac{\left(1 - \frac{3}{n_3 + 1} \frac{c_3 y_3^{n_3+1}}{c_2 y_1^3}\right)}{\left(1 - \frac{\alpha_1 c_2^2 y_2^4}{\alpha_2 c_1^2 y_1^{2n_1}}\right)^3} = 0 \end{aligned}$$

Sean:

$$\begin{aligned} S &= - \frac{2 \left(\frac{y_2^2 \beta_2}{y_1^2 \alpha_2} \right) \left(1 - \frac{\beta_3 c_2 y_2^2}{\beta_2 c_3 y_3^{n_3}} \right)}{\left(1 - \frac{\alpha_1 c_2^2 y_2^4}{\alpha_2 c_1^2 y_1^{2n_1}} \right)^3} \\ R &= \frac{3 \left(\frac{y_2^2 \beta_2}{y_1^2 \alpha_2} \right) \left(1 - \frac{\beta_3 c_2 y_2^2}{\beta_2 c_3 y_3^{n_3}} \right)}{\left(1 - \frac{\alpha_1 c_2^2 y_2^4}{\alpha_2 c_1^2 y_1^{2n_1}} \right)^4} - \frac{3 \left(\frac{1}{n_3 + 1} \frac{c_3 y_3^{n_3+1}}{c_2 y_1^3} \right)}{\left(1 - \frac{\alpha_1 c_2^2 y_2^4}{\alpha_2 c_1^2 y_1^{2n_1}} \right)^3} \\ \left(\frac{\alpha_2 Q^2}{2g y_1 c_2^2 y_2^4} \right) &= \sqrt[3]{R + \sqrt{S^3 + R^2}} + \sqrt[3]{R - \sqrt{S^3 + R^2}} + \frac{1}{\left(1 - \frac{\alpha_1 c_2^2 y_2^4}{\alpha_2 c_1^2 y_1^{2n_1}} \right)} \end{aligned}$$

$$Q = \frac{1}{\sqrt{\alpha_2}} \sqrt[3]{R + \sqrt{S^3 + R^2}} + \sqrt[3]{R - \sqrt{S^3 + R^2}} + \frac{1}{\left(1 - \frac{\alpha_1 c_2^2 y_2^4}{\alpha_2 c_1^2 y_1^{2n_1}}\right)} \sqrt{2gy_1} c_2 y_2^2$$

Ahora, si $y_2 \rightarrow \mu W$ y si las tres secciones son triangulares

$$S = - \frac{2 \left(\mu^2 \frac{W^2 \beta_2}{y_1^2 \alpha_2} \right) \left(1 - \frac{\beta_3}{\beta_2} \mu^2 \frac{W^2}{y_3^2} \right)}{\left(1 - \frac{\alpha_1 \mu^4 W^4}{\alpha_2 y_1^4} \right)^3}$$

$$R = \frac{3 \left(\mu^2 \frac{W^2 \beta_2}{y_1^2 \alpha_2} \right) \left(1 - \frac{\beta_3}{\beta_2} \mu^2 \frac{W^2}{y_3^2} \right)}{\left(1 - \frac{\alpha_1 \mu^4 W^4}{\alpha_2 y_1^4} \right)^4} - \frac{\left(\frac{y_3^3}{y_1^3} \right)}{2 \left(1 - \frac{\alpha_1 \mu^4 W^4}{\alpha_2 y_1^4} \right)^3}$$

$$Q = \frac{\mu^2}{\sqrt{\alpha_2}} \sqrt[3]{R + \sqrt{S^3 + R^2}} + \sqrt[3]{R - \sqrt{S^3 + R^2}} + \frac{1}{\left(1 - \frac{\alpha_1 \mu^4 W^4}{\alpha_2 y_1^4} \right)} \sqrt{2gy_1} m W^2$$

A descarga libre $y_3 \rightarrow \mu W$:

$$S = - \frac{2 \left(\mu^2 \frac{W^2 \beta_2}{y_1^2 \alpha_2} \right) \left(1 - \frac{\beta_3}{\beta_2} \right)}{\left(1 - \frac{\alpha_1 \mu^4 W^4}{\alpha_2 y_1^4} \right)^3}$$

$$R = \frac{3 \left(\mu^2 \frac{W^2 \beta_2}{y_1^2 \alpha_2} \right) \left(1 - \frac{\beta_3}{\beta_2} \right)}{\left(1 - \frac{\alpha_1 \mu^4 W^4}{\alpha_2 y_1^4} \right)^4} - \frac{\left(\mu^3 \frac{W^3}{y_1^3} \right)}{2 \left(1 - \frac{\alpha_1 \mu^4 W^4}{\alpha_2 y_1^4} \right)^3}$$

$$Q = \frac{\mu^2}{\sqrt{\alpha_2}} \sqrt[3]{R + \sqrt{S^3 + R^2}} + \sqrt[3]{R - \sqrt{S^3 + R^2}} + \frac{1}{\left(1 - \frac{\alpha_1 \mu^4 W^4}{\alpha_2 y_1^4} \right)} \sqrt{2gy_1} m W^2 \quad (2.49)$$

2.2.4.2 Funciones M-M

Esta equivale a la forma conservativa de las ecuaciones de Saint-Venant y resulta igual que la ecuación en aproximación.

2.2.4.3 Funciones M-E

Ahora se combina cantidad de movimiento en la sección 1-2 y energía de 2-3. Se inicia de aguas abajo 3, hacia aguas arriba, 2. Se propone el estimador siguiente:

$$y + \alpha_2 \frac{Q^2}{2g c_2^2 y_2^{2n_2}} = y_3 + \alpha_3 \frac{Q^2}{2g c_3^2 y_3^{2n_3}}$$

Se aproxima la forma siguiente.

$$\frac{\beta_1 Q^2}{g A_1} + \tilde{y}_{c1} A_1 = \frac{\beta_2 Q^2}{g A_2} + \tilde{y}_{c2} A_2$$

que se reescribe como:

$$\begin{aligned} y_3^{n_2+1} \left[1 - \frac{y_1}{y_3} \frac{\alpha_2 Q^2}{2g y_1 c_2^2 y_2^{2n_2}} \left(1 - \frac{\alpha_3 c_2^2 y_2^{2n_2}}{\alpha_2 c_3^2 y_3^{2n_3}} \right) \right]^{n_2+1} \\ = \frac{(n_2 + 1) c_1}{(n_1 + 1) c_2} y_1^{n_1+1} - \frac{(n_2 + 1)}{c_2} c_2 y_2^{n_2} \frac{2\beta_2}{\alpha_2} \frac{\alpha_2 Q^2}{2g c_2^2 y_2^{2n_2}} \left(1 - \frac{\beta_1 c_2 y_2^{n_2}}{\beta_2 c_1 y_1^{n_1}} \right) \end{aligned}$$

El planteamiento a tal problema permite obtener una solución, es decir si la sección 2 debe tener geometría rectangular $n_2=1$.

$$\begin{aligned} y_3^2 \left[1 - \frac{y_1}{y_3} \frac{\alpha_2 Q^2}{2g y_1 c_2^2 y_2^2} \left(1 - \frac{\alpha_3 c_2^2 y_2^2}{\alpha_2 c_3^2 y_3^{2n_3}} \right) \right]^2 \\ = \frac{2}{(n_1 + 1) c_2} c_1 y_1^{n_1+1} - 2 y_2^{n_2} \frac{2\beta_2}{\alpha_2} \frac{\alpha_2 Q^2}{2g c_2^2 y_2^2} \left(1 - \frac{\beta_1 c_2 y_2}{\beta_2 c_1 y_1^{n_1}} \right) \\ Q = \frac{1}{\sqrt{\alpha_2}} \sqrt{\frac{\frac{y_1}{y_3} \left(1 - \frac{\alpha_3 c_2^2 y_2^2}{\alpha_2 c_3^2 y_3^{2n_3}} \right) - 2 \frac{y_2^{n_2} y_1 \beta_2}{y_3 y_3 \alpha_2} \left(1 - \frac{\beta_1 c_2 y_2}{\beta_2 c_1 y_1^{n_1}} \right) - \left[2 \frac{y_2^{n_2} y_1 \beta_2}{y_3 y_3 \alpha_2} \left(1 - \frac{\beta_1 c_2 y_2}{\beta_2 c_1 y_1^{n_1}} \right) - \frac{y_1}{y_3} \left(1 - \frac{\alpha_3 c_2^2 y_2^2}{\alpha_2 c_3^2 y_3^{2n_3}} \right) \right]^2 - \left[\frac{y_1}{y_3} \left(1 - \frac{\alpha_3 c_2^2 y_2^2}{\alpha_2 c_3^2 y_3^{2n_3}} \right) \right]^2 \left[1 - \frac{2}{(n_1 + 1) c_2} \frac{c_1 y_1^{n_1+1}}{y_3^2} \right]}{\frac{y_1}{y_3} \left(1 - \frac{\alpha_3 c_2^2 y_2^2}{\alpha_2 c_3^2 y_3^{2n_3}} \right)}} \sqrt{2g y_1 c_2 y_2} \end{aligned}$$

Si $y_2 \rightarrow \mu W$ con áreas iguales y $y_3 = \mu W$

$$Q = \frac{\mu}{\sqrt{\alpha_2}} \sqrt{\frac{\frac{y_1}{\mu W} \left(1 - \frac{\alpha_3}{\alpha_2} \right) - 2 \frac{y_1 \beta_2}{\mu W \alpha_2} \left(1 - \frac{\beta_1}{\beta_2} \mu \frac{W}{y_1} \right) - \left[2 \frac{y_1 \beta_2}{\mu W \alpha_2} \left(1 - \frac{\beta_1}{\beta_2} \mu \frac{W}{y_1} \right) - \frac{y_1}{\mu W} \left(1 - \frac{\alpha_3}{\alpha_2} \right) \right]^2 - \left[\frac{y_1}{\mu W} \left(1 - \frac{\alpha_3}{\alpha_2} \right) \right]^2 \left[1 - \frac{y_1^2}{\mu^2 W^2} \right]}{\frac{y_1}{\mu W} \left(1 - \frac{\alpha_3}{\alpha_2} \right)}} \sqrt{2g y_1 c_2 W} \quad (2.49)$$

**Análisis gráfico
y experimental**

3

Capítulo 3

ANÁLISIS GRÁFICO Y EXPERIMENTAL

En esta sección se valoran gráficamente las ecuaciones de caudal a descarga libre-ahogada y libre.

3.1 Comparación de ecuaciones por método

Se inicia con las ecuaciones en energía pura. La ecuación general es la que se denomina descarga libre-ahogada.

3.1.1 Estructuras tipo vertedor

3.1.1.1 Método E-E

Descarga libre:

$$Q = \frac{1}{\sqrt{a_2}} \frac{\mu^{n_2} \sqrt{1-\mu}}{\sqrt{1 - \frac{a_1 c_2^2 \mu^{2n_2} y_1^{2n_2}}{a_2 c_1^2 y_1^{2n_1}}}} \sqrt{2g} c_2 y_1^{n_2 + \frac{1}{2}}$$

Por lo que el coeficiente de descarga estaría dado por:

$$C_d = \frac{Q}{\sqrt{2g} c_2 y_1^{n_2 + \frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{a_2}} \frac{\mu^{n_2} \sqrt{1-\mu}}{\sqrt{1 - \frac{a_1 c_2^2 \mu^{2n_2} y_1^{2n_2}}{a_2 c_1^2 y_1^{2n_1}}}}$$

Descarga ahogada:

$$Q = \frac{1}{\sqrt{a_3}} \frac{\sqrt{1 - \frac{y_3}{y_1}}}{\sqrt{1 - \frac{a_1 c_3^2 y_3^{2n_3}}{a_3 c_1^2 y_1^{2n_1}}}} c_3 y_3^{n_3} \sqrt{2g} y_1^{\frac{1}{2}}$$

Para obtener el coeficiente de descarga semejante al obtenido a descarga libre, se dividen ambos lados de la ecuación anterior entre el término $\sqrt{2g} c_2 y_1^{n_2 + \frac{1}{2}}$, con lo que se obtiene:

$$C_d = \frac{Q}{\sqrt{2g} c_2 y_1^{n_2 + \frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{a_3}} \frac{\sqrt{1 - \frac{y_3}{y_1}} c_3 y_3^{n_3}}{\sqrt{1 - \frac{a_1 c_3^2 y_3^{2n_3}}{a_3 c_1^2 y_1^{2n_1}}} c_2 y_1^{n_2}}$$

Secciones 1, 2 y 3 iguales

El área está dada por la función potencial:

$$A_i = c_i y_i^{n_i}$$

Si consideramos que las tres secciones son iguales, se tienen que $n_1 = n_2 = n_3$, además de que $c_1 = c_2 = c_3$. Por lo que el área queda:

$$A = c y_i^n$$

Para cada una de las tres secciones.

Sección rectangular

En secciones rectangulares, el área está dada por:

$$A = c y_i^n = b y_i$$

Es decir, n es igual a la unidad y el parámetro c es el ancho de la sección transversal (b).

Proponiendo valores a los coeficientes α_i de 0.20, 1.09 y 1.09 para las secciones 1, 2 y 3 respectivamente, se obtienen las siguientes curvas para los coeficientes a descarga libre (CdL) y descarga ahogada (CdA), sin importar el ancho de la plantilla o el valor del tirante aguas abajo.

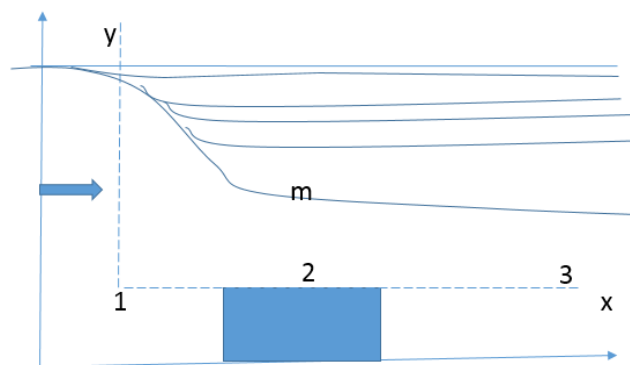


Figura 3.1 El punto geométrico

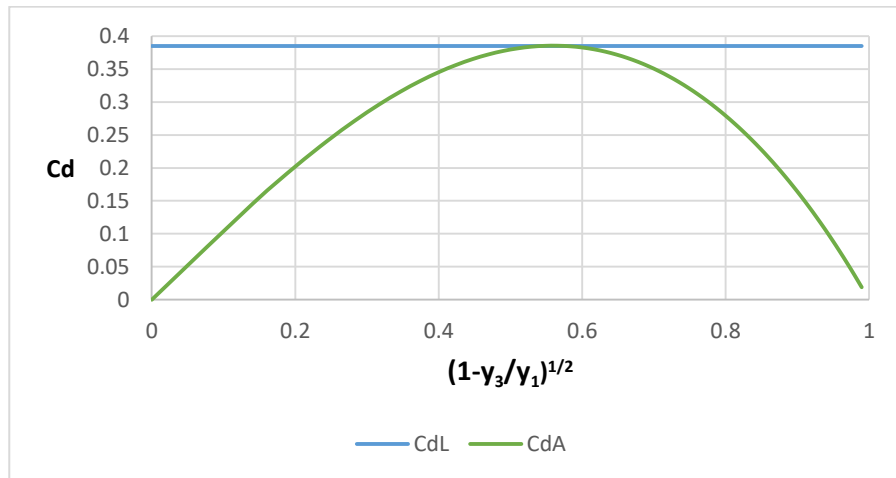


Figura 3.2 Caudal de descarga libre y ahogada en sección rectangular

Se observa que el comportamiento del coeficiente de descarga es en principio a descarga a ahogada, hasta llegar a la intersección de las curvas, que es el momento en el que la descarga se convierte en libre. Es decir, el valor del coeficiente de descarga corresponde al brozo ascendente de la curva de descarga ahogada hasta su valor máximo, que es el mismo valor en el que coincide con la curva a descarga libre. Después de ese punto, el coeficiente corresponde a la sección de la curva a descarga libre. Por lo que, combinando las dos gráficas se obtiene el comportamiento general del coeficiente de descarga.

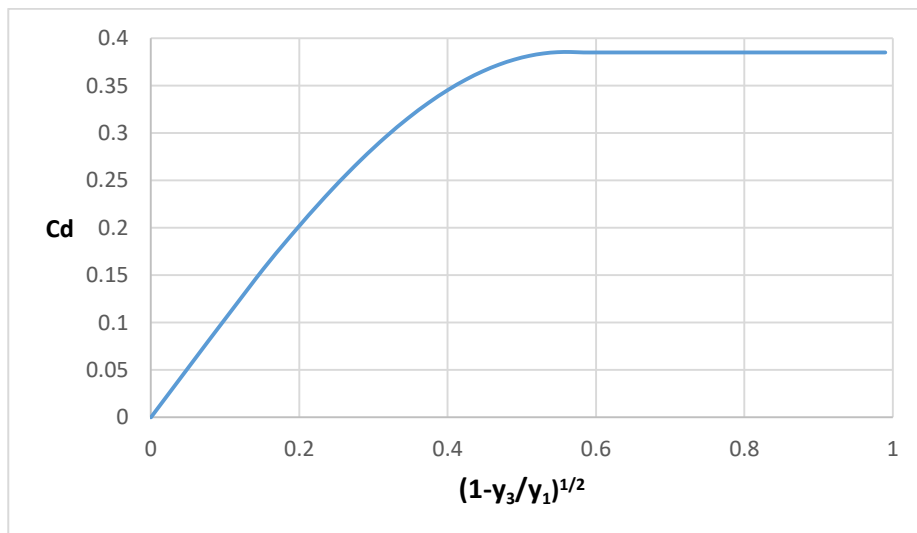


Figura 3.3 Gráfica para sección rectangular

Sección triangular

En secciones triangulares, el área está dada por:

$$A = cy_i^n = ky_i^2$$

Es decir, n es igual a dos y el parámetro c es igual al talud (k : 1) de la sección.

Al igual que en las estructuras rectangulares, el valor del coeficiente de descarga no depende de las dimensiones ni del talud de la sección, siempre y cuando se cumpla que las tres secciones sean de la misma geometría (sección aguas arriba de la estructura, sección de la estructura y sección aguas debajo de la estructura). Proponiendo valores a los coeficientes α_i , de 0.25, 1.10 y 1.10 para las secciones 1, 2 y 3 respectivamente, se obtienen las siguientes curvas para descarga libre y descarga ahogada.

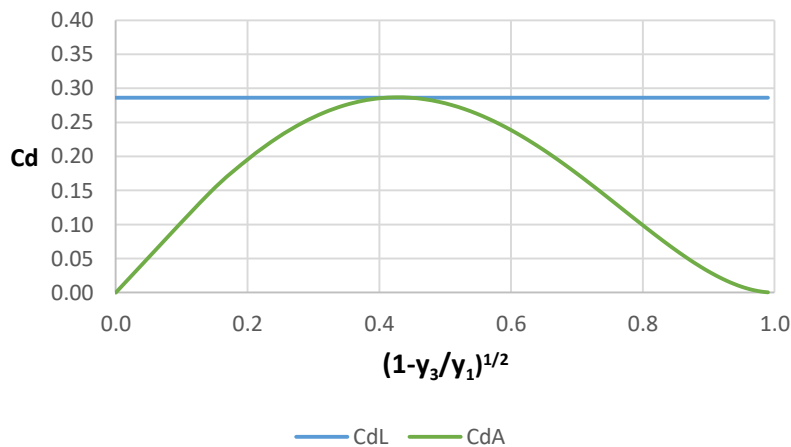


Figura 3.4 Caudal de descarga libre y ahogada en sección triangular

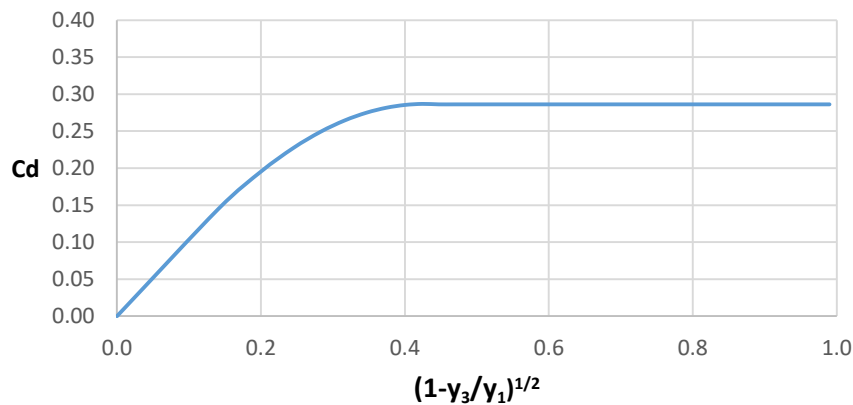


Figura 3.5 Gráfica de descarga en sección triangular

Al igual que en la sección rectangular, el valor del coeficiente en la parte izquierda de la gráfica corresponde a la curva a descarga ahogada y después de la intersección de

ambas curvas, corresponde a la de descarga libre. Por lo que combinando las dos gráficas se obtiene el coeficiente de descarga.

Sección trapezoidal

En secciones trapezoidales el área está dada por:

$$A = cy_i^n$$

Es decir, n y c se obtienen a partir de una regresión potencial efectuada a la relación entre el área y el tirante donde de antemano se sabe que n varía de 1 a 2. Proponiendo un ancho de la plantilla de 0.5 m y un talud de 1, se tiene que el área en cada sección está dada por:

$$A = 1.675y_i^{1.751}$$

obtenida por regresión potencial simple con un coeficiente de determinación de 0.996.

Proponiendo valores a los coeficientes α_i , de 0.20, 1.09 y 1.09 para las secciones 1, 2 y 3 respectivamente, se obtienen las siguientes gráficas para descarga libre y ahogada;

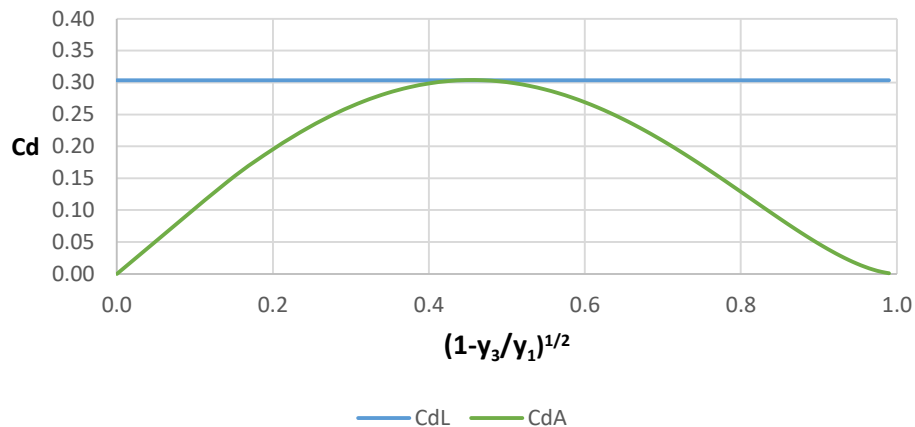


Figura 3.6 Coeficientes de descarga libre y ahogada en sección trapezoidal con $b=0.5$ m y $k=1$

Por lo que combinando las dos gráficas se obtiene el comportamiento general del coeficiente de descarga para una sección trapezoidal de $b=0.5$ m y $k=1.0$.

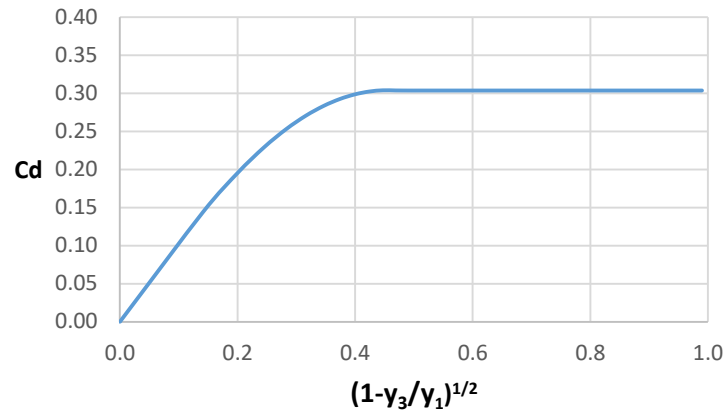


Figura 3.7 Coeficientes de descarga en sección trapezoidal con $b=0.5$ y $k=1$

Proponiendo un ancho de la plantilla de 0.4 m y un talud de 1.5, se tiene que:

$$A = 2.084y_i^{1.836}$$

con un coeficiente de determinación de 0.997. Con los mismos valores de coeficientes α_i que el ejemplo anterior, se obtienen los coeficientes de descarga para una sección de $b=0.4$ m y $k=1.5$.

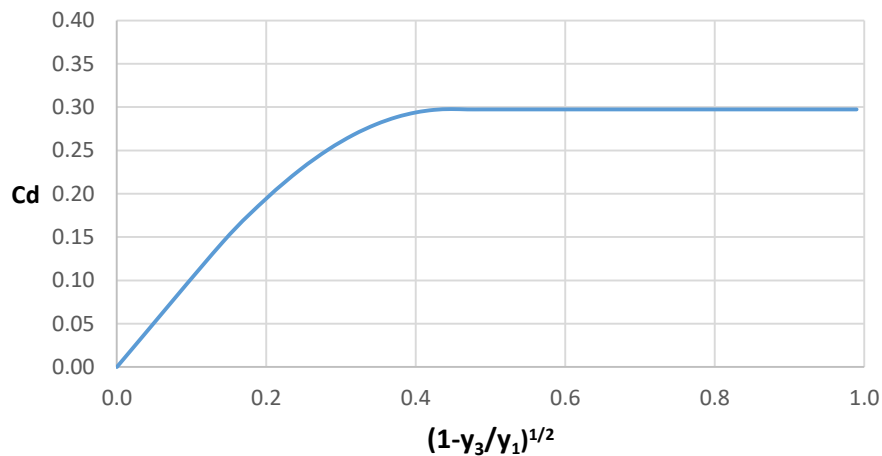


Figura 3.8 Coeficientes de descarga en sección trapezoidal con $b=0.4$ m y $k=1.5$

Proponiendo un ancho de la plantilla de 0.4 m y un talud de 2.0, se tiene que:

$$A = 2.467y_i^{1.893}$$

con un coeficiente de determinación de 0.999. Con los mismos valores de coeficientes α_i que el ejemplo anterior, se obtienen los coeficientes de descarga para una sección de $b=0.3$ m y $k=2.0$.

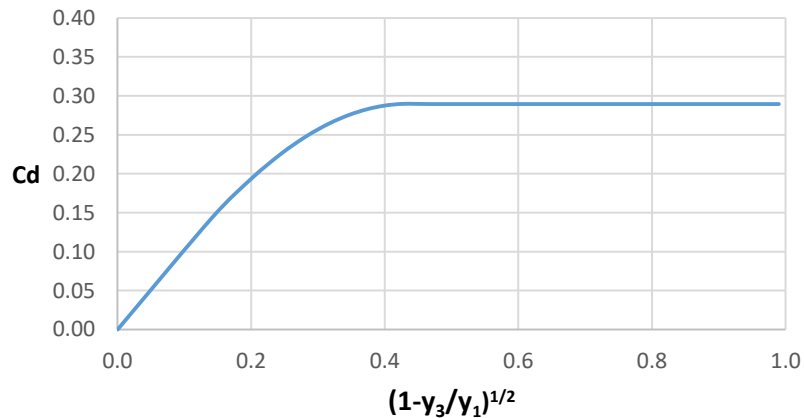


Figura 3.9 Coeficientes de descarga en sección trapecial con $b=0.3$ m y $k=2.0$

Para secciones rectangulares y triangulares el área es una función potencial del tirante. Se mostró que en secciones trapeciales, el área puede aproximarse mediante una expresión potencial con un excelente coeficiente de determinación. En secciones rectangulares y triangulares el coeficiente de descarga es función únicamente de la relación y_3/y_1 , y no de las dimensiones propias del ancho de la plantilla (sección rectangular) o el talud (sección triangular). Por otra parte, para secciones trapeciales, el coeficiente de descarga varía para cada combinación de plantilla y talud, debido a que se modifica el valor del exponente n .

3.1.1.2 Método E-M

Primera aproximación

Q

$$Q = \frac{1}{\sqrt{\alpha_2}} \frac{\mu^{n_2} \sqrt{1 - \left\{ \frac{c_3 (n_2 + 1)}{c_2 (n_3 + 1)} \right\}^{\frac{1}{n_2+1}} y_3^{\frac{n_3-n_2}{n_2+1}} \frac{y_3}{y_1}}}{\sqrt{1 - \frac{2 c_2^2 (n_3 + 1)}{\alpha_2 c_3^2 (n_2 + 1)} \mu^{2n_2} \frac{y_1^{2n_2}}{y_3^{2n_3}} \beta_3 \left\{ \frac{c_3 (n_2 + 1)}{c_2 (n_3 + 1)} \right\}^{\frac{1}{n_2+1}} \left(\frac{\beta_2 c_3 y_3^{n_3}}{\beta_3 c_2 \mu^{n_2} y_1^{n_2}} - 1 \right) - \frac{\alpha_1 c_2^2}{\alpha_2 c_1^2} \mu^{2n_2} \frac{y_1^{2n_2}}{y_1^{2n_1}}} c_2 \sqrt{2g} y_1^{n_2+\frac{1}{2}}$$

Que es general, tanto para descarga libre, como para descarga ahogada. De la ecuación anterior se obtiene que el coeficiente de descarga está dado por:

$$C_d = \frac{1}{\sqrt{\alpha_2}} \frac{\mu^{n_2} \sqrt{1 - \left\{ \frac{c_3 (n_2 + 1)}{c_2 (n_3 + 1)} \right\}^{\frac{1}{n_2+1}} y_3^{\frac{n_3-n_2}{n_2+1}} \frac{y_3}{y_1}}}{\sqrt{1 - \frac{2 c_2^2 (n_3 + 1)}{\alpha_2 c_3^2 (n_2 + 1)} \mu^{2n_2} \frac{y_1^{2n_2}}{y_3^{2n_3}} \beta_3 \left\{ \frac{c_3 (n_2 + 1)}{c_2 (n_3 + 1)} \right\}^{\frac{1}{n_2+1}} \left(\frac{\beta_2 c_3 y_3^{n_3}}{\beta_3 c_2 \mu^{n_2} y_1^{n_2}} - 1 \right) - \frac{\alpha_1 c_2^2}{\alpha_2 c_1^2} \mu^{2n_2} \frac{y_1^{2n_2}}{y_1^{2n_1}}}}$$

Secciones 1, 2 y 3 iguales

Al tener la misma sección transversal el coeficiente de descarga se estima de la siguiente manera:

$$Q = \frac{1}{\sqrt{\alpha_2}} \frac{\mu^{n_2} \sqrt{1 - \frac{y_3}{y_1}}}{\sqrt{1 - \frac{2}{\alpha_2} \mu^{2n_2} \beta_3 \left(\frac{y_3}{y_1} \right)^{-2n} \left(\frac{\beta_2}{\beta_3} \frac{1}{\mu^{n_2}} \left(\frac{y_3}{y_1} \right)^n - 1 \right) - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \mu^{2n_2}}} c_2 \sqrt{2g} y_1^{n_2 + \frac{1}{2}}$$

Sección rectangular

Proponiendo valores a los coeficientes α de 1.08, 1.40 y 1.00; y β 1.00, 1.00 y 1.04 para las secciones 1, 2 y 3 respectivamente, se obtiene la siguiente curva para los coeficientes de descarga para la sección rectangular.

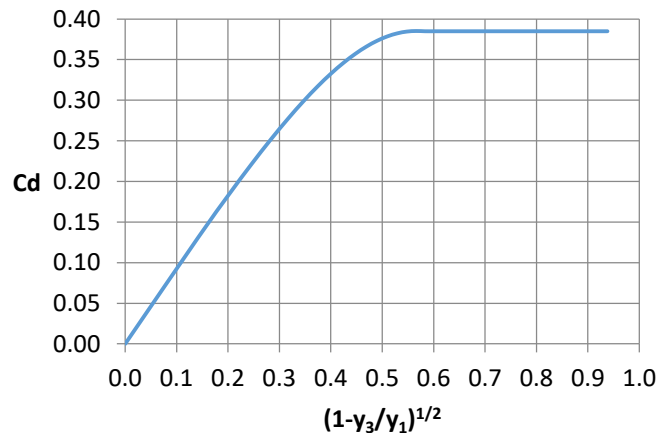


Figura 3.10 Coeficiente de descarga en sección rectangular

Sección triangular

Proponiendo valores a los coeficientes α de 1.17, 1.40 y 1.00; y β 1.00, 1.00 y 1.04 para las secciones 1, 2 y 3 respectivamente, se obtiene la siguiente curva para los coeficientes de descarga para la sección triangular.

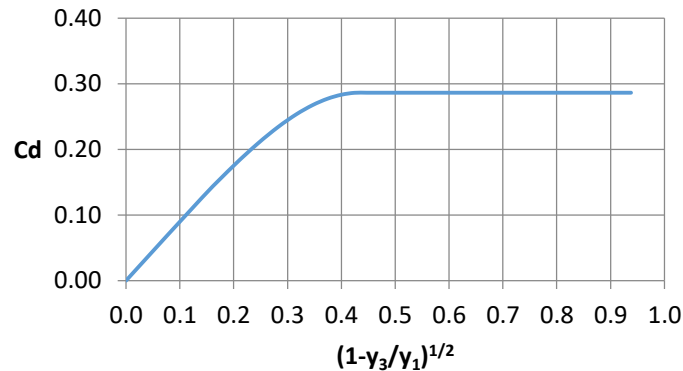


Figura 3.11 Coeficiente de descarga en sección triangular

Sección trapezoidal

Como ejemplo de canal trapezoidal se tiene aquel cuyo ancho de la plantilla es de 0.50 m y un talud de 1.00. Proponiendo valores a los coeficientes α de 1.21, 1.40 y 1.00; y β 1.00, 1.00 y 1.05 para las secciones 1, 2 y 3 respectivamente, se obtiene la siguiente curva para los coeficientes de descarga para la sección trapezoidal.

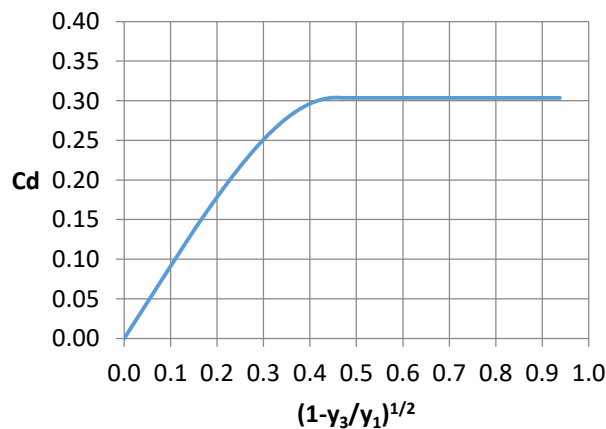


Figura 3.12 Coeficiente de descarga en sección trapezoidal $b=0.5$ y $k=1$

Para otro ejemplo de canal trapecial se tiene aquel cuyo ancho de la plantilla es de 0.30 m y un talud de 2.00. Proponiendo valores a los coeficientes α y β semejantes al ejemplo anterior, se tiene la gráfica de los coeficientes de descarga.

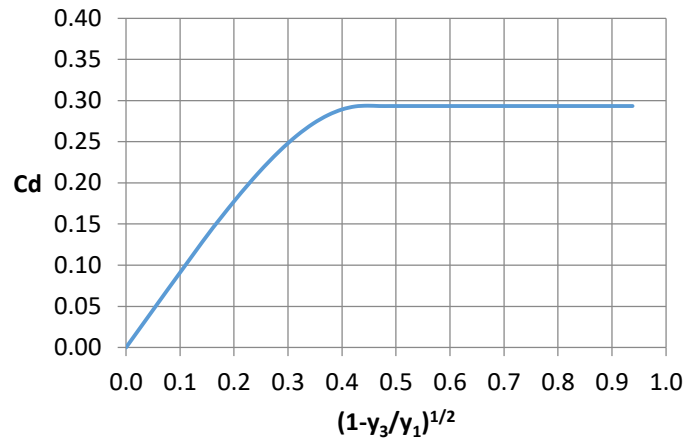


Figura 3.13 Coeficiente de descarga en sección trapecial $b=0.3$ y $k=2$

Segunda aproximación

$$Q = \frac{1}{\sqrt{(n_2 + 1)\alpha_2}} \frac{\mu^{n_2} \sqrt{1 - \frac{c_3 (n_2 + 1) y_3^{n_3+1}}{c_2 (n_3 + 1) y_1^{n_2+1}}}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\alpha_1 c_2^2}{\alpha_2 c_1^2} \mu^{2n_2} y_1^{2(n_2-n_1)}\right) - \frac{2\beta_2}{\alpha_2} \mu^{n_2} \left(1 - \frac{\beta_3}{\beta_2} \mu^{n_2} \frac{c_2 y_1^{n_2}}{c_3 y_3^{n_3}}\right)}} c_2 \sqrt{2g} y_1^{n_2 + \frac{1}{2}}$$

que es general, tanto para descarga libre, como para descarga ahogada. De la ecuación anterior se obtiene que el coeficiente de descarga está dado por:

$$C_d = \frac{1}{\sqrt{(n_2 + 1)\alpha_2}} \frac{\mu^{n_2} \sqrt{1 - \frac{c_3 (n_2 + 1) y_3^{n_3+1}}{c_2 (n_3 + 1) y_1^{n_2+1}}}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\alpha_1 c_2^2}{\alpha_2 c_1^2} \mu^{2n_2} y_1^{2(n_2-n_1)}\right) - \frac{2\beta_2}{\alpha_2} \mu^{n_2} \left(1 - \frac{\beta_3}{\beta_2} \mu^{n_2} \frac{c_2 y_1^{n_2}}{c_3 y_3^{n_3}}\right)}}$$

Sección rectangular

Proponiendo valores a los coeficientes α_i de 1.00, 1.39 y 1.00 y de β_i de 1.00, 1.00 y 1.00 para las secciones 1, 2 y 3 respectivamente, se obtienen las siguientes curvas para descarga en sección rectangular.

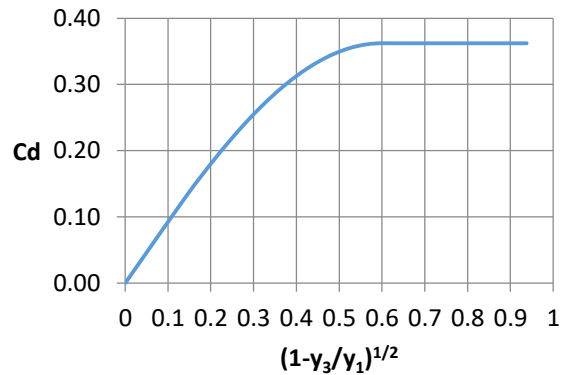


Figura 3.14 Coeficientes de descarga para sección rectangular

Los coeficientes de descarga dependen de la relación de y_1/y_2 , sin importar el ancho de la sección transversal.

Sección triangular

Proponiendo valores a los coeficientes α_i de 1.00, 1.20 y 1.00 y de β_i de 1.00, 1.00 y 1.00 para las secciones 1, 2 y 3 respectivamente, se obtienen las siguientes curvas para descarga en sección triangular.

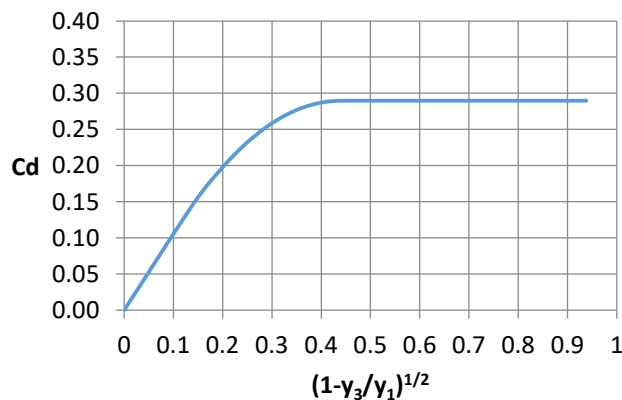


Figura 3.15 Coeficientes de descarga para sección triangular

Los coeficientes de descarga no dependen del valor del talud, solamente dependen de la relación de y_1/y_2 .

Sección trapezoidal

A manera de ejemplo se propone un ancho de la plantilla de 0.50 m y un talud de 1, se tiene que el área en cada sección está dada por:

$$A = 1.675y_i^{1.751}$$

obtenida por regresión potencial simple con un coeficiente de determinación de 0.996. Por lo que proponiendo valores a los coeficientes α_i de 1.00, 1.24 y 1.00 y β_i de 1.00, 1.00 y 1.00, para las secciones 1, 2 y 3 respectivamente, se obtiene la siguiente curva para el coeficiente de descarga en sección trapezoidal con $b=0.50$ m y $k=1.00$.

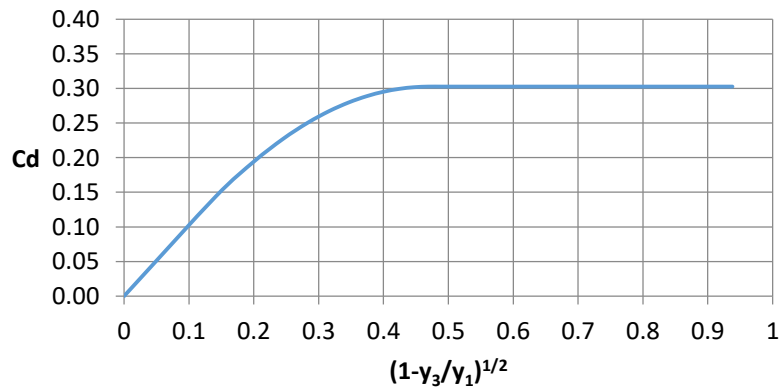


Figura 3.16 Coeficientes de descarga para sección trapezoidal con $b=0.50$ m y $k=1$

Como otro ejemplo se propone un ancho de la plantilla de 0.30 m y un talud de 2, se tiene que el área en cada sección está dada por:

$$A = 2.467y_i^{1.893}$$

obtenida por regresión potencial simple con un coeficiente de determinación de 0.999. Por lo que proponiendo valores a los coeficientes α_i de 1.00, 1.22 y 1.00 y β_i de 1.00, 1.00 y 1.00, para las secciones 1, 2 y 3 respectivamente. Se obtiene la siguiente curva para el coeficiente de descarga en sección trapezoidal con $b=0.30$ m y $k=2.00$.

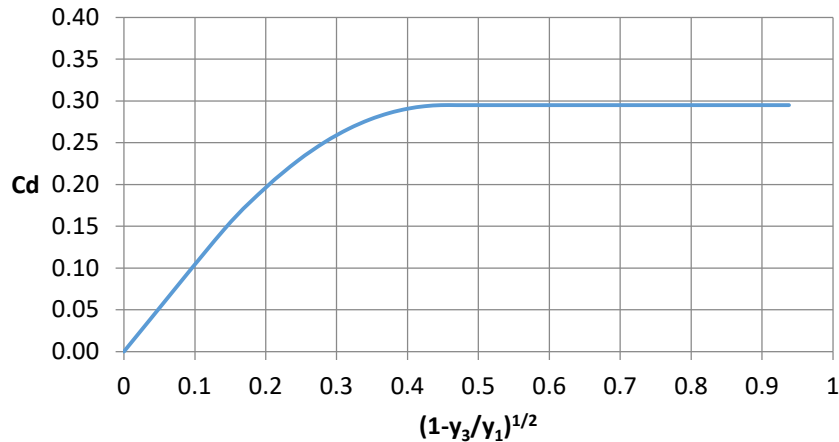


Figura 3.17 Coeficientes de descarga para sección trapecial con $b=0.30$ m y $k=2$

Para secciones rectangulares y triangulares, se observó que empleando la ecuación de cantidad de movimiento es posible determinar los valores de los coeficientes de descarga en función de la relación del tirante aguas debajo de la estructura y el tirante aguas arriba (y_1/y_2). Para secciones trapeciales, el coeficiente de descarga varía para cada combinación de plantilla y talud, debido a que se modifica el valor de exponente n del cual depende directamente el coeficiente de descarga.

3.1.1.3 Método M-M

Aproximación única

Descarga libre

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2(n_1 + 1)\beta_2}} \frac{\mu^{n_2} \sqrt{1 - \frac{(n_1 + 1)c_2}{(n_2 + 1)c_1} \mu^{(n_2+1)} y_1^{(n_2-n_1)}}}{\sqrt{\mu^{n_2} \left(1 - \frac{\beta_1 c_2}{\beta_2 c_1} \mu^{n_2} y_1^{(n_2-n_1)}\right)}} \sqrt{2g} \sqrt{c_1 c_2} y_1^{\frac{(n_2+n_1)+1}{2}}$$

Se dividen ambos lados de la ecuación anterior entre el término $\sqrt{2g} c_2 y_1^{n_2 + \frac{1}{2}}$, con lo que se obtiene:

$$Cd = \frac{1}{\sqrt{2(n_1 + 1)\beta_2}} \frac{\mu^{n_2} \sqrt{1 - \frac{(n_1 + 1)c_2}{(n_2 + 1)c_1} \mu^{(n_2+1)} y_1^{(n_2-n_1)}}}{\sqrt{\mu^{n_2} \left(1 - \frac{\beta_1 c_2}{\beta_2 c_1} \mu^{n_2} y_1^{(n_2-n_1)}\right)}} \frac{\sqrt{c_1}}{\sqrt{c_2}} y_1^{\frac{n_1-n_2}{2}}$$

Descarga ahogada:

Q

$$= \frac{1}{\sqrt{2\beta_2(n_1 + 1)}} \frac{\mu^{n_2} \sqrt{1 - \frac{(n_1 + 1)c_3 y_3^{(n_3+1)}}{(n_3 + 1)c_1 y_1^{(n_1+1)}}}}{\sqrt{\mu^{n_2} \left(1 - \frac{\beta_1 c_2}{\beta_2 c_1} \mu^{n_2} \frac{y_1^{n_2}}{y_1^{n_1}}\right) + \frac{\beta_3 c_2}{\beta_2 c_3} \mu^{n_2} \frac{y_1^{n_2}}{y_3^{n_3}} \left(1 - \frac{\beta_2 c_3}{\beta_3 c_2} \frac{y_3^{n_3}}{\mu^{n_2} y_1^{n_2}}\right)}} \sqrt{c_1 c_2} \sqrt{2g y_1} y_1^{\frac{(n_2+n_1)}{2}}$$

Se dividen ambos lados de la ecuación anterior entre el término $\sqrt{2g c_2} y_1^{n_2 + \frac{1}{2}}$, con lo que se obtiene:

Cd

$$= \frac{1}{\sqrt{2\beta_2(n_1 + 1)}} \frac{\mu^{n_2} \sqrt{1 - \frac{(n_1 + 1)c_3 y_3^{(n_3+1)}}{(n_3 + 1)c_1 y_1^{(n_1+1)}}}}{\sqrt{\mu^{n_2} \left(1 - \frac{\beta_1 c_2}{\beta_2 c_1} \mu^{n_2} \frac{y_1^{n_2}}{y_1^{n_1}}\right) + \frac{\beta_3 c_2}{\beta_2 c_3} \mu^{n_2} \frac{y_1^{n_2}}{y_3^{n_3}} \left(1 - \frac{\beta_2 c_3}{\beta_3 c_2} \frac{y_3^{n_3}}{\mu^{n_2} y_1^{n_2}}\right)}} \frac{\sqrt{c_1}}{\sqrt{c_2}} y_1^{\frac{n_1-n_2}{2}}$$

Sección rectangular

Proponiendo valores a los coeficientes β_i 0.26, 0.80 y 0.81 para las secciones 1, 2 y 3 respectivamente, se obtienen las siguientes curvas para descarga en sección rectangular.

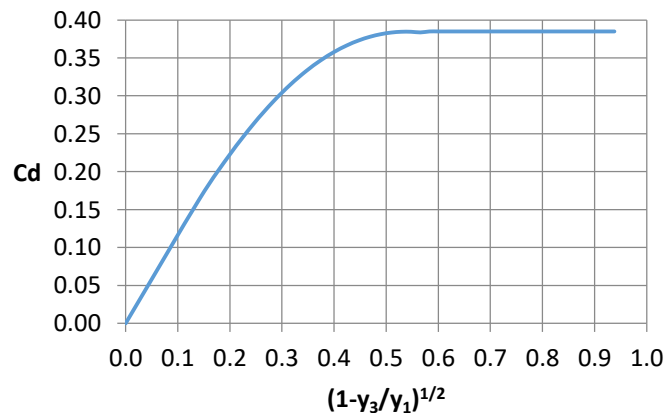


Figura 3.18 Coeficientes de descarga para sección rectangular

Sección triangular

Proponiendo valores a los coeficientes β_i 0.26, 0.80 y 0.81 para las secciones 1, 2 y 3 respectivamente, se obtienen las siguientes curvas para descarga en sección triangular.

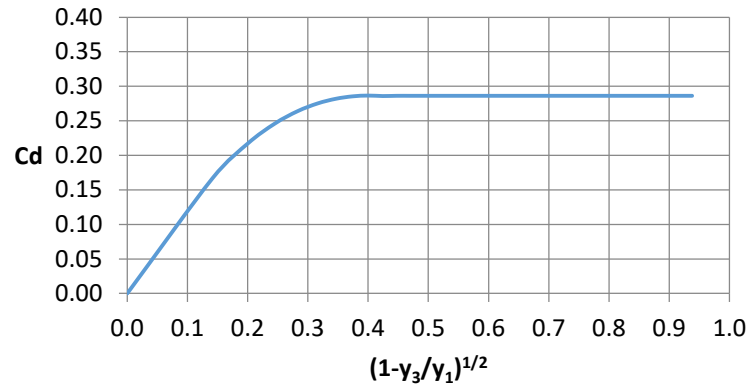


Figura 3.19 Coeficientes de descarga para sección triangular

Sección trapecial

A manera de ejemplo se propone un ancho de la plantilla de 0.50 m y un talud de 1, se tiene que el área en cada sección está dada por:

$$A = 1.675y_i^{1.751}$$

con un coeficiente de determinación de 0.996. Por lo que proponiendo valores a los coeficientes β_i 0.18, 0.75 y 0.75 para las secciones 1, 2 y 3 respectivamente, se obtiene la siguiente curva para el coeficiente de descarga en sección trapecial con $b=0.50$ m y $k=1.00$.

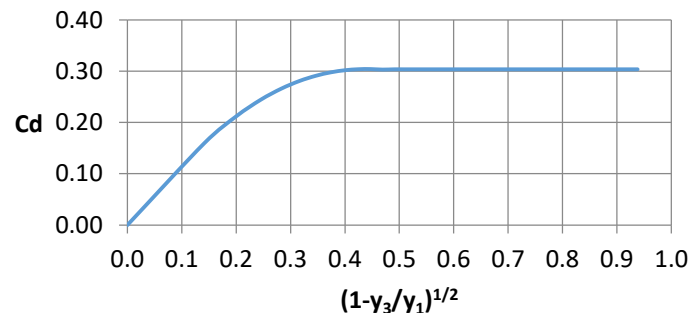


Figura 3.20 Coeficientes de descarga para sección trapecial con $b=0.50$ m y $k=1$

Como otro ejemplo se propone un ancho de la plantilla de 0.30 m y un talud de 2, se tiene que el área en cada sección está dada por:

$$A = 2.467y_i^{1.893}$$

con un coeficiente de determinación de 0.999. Por lo que proponiendo valores a los coeficientes β_i semejantes a los del ejemplo anterior, se obtiene la siguiente curva para el coeficiente de descarga en sección trapecial con $b=0.30$ m y $k=2.00$.

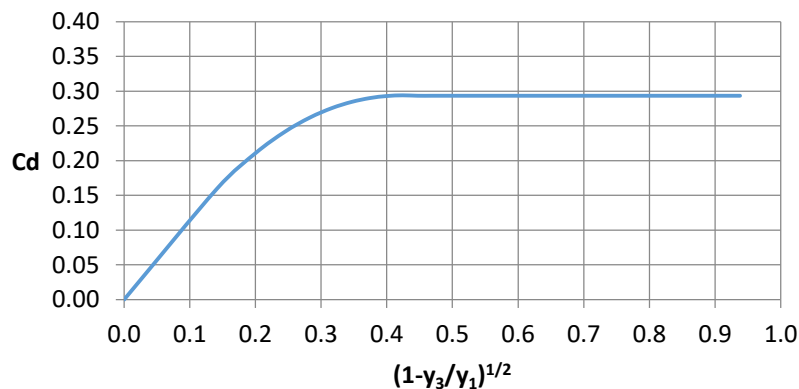


Figura 3.21 Coeficientes de descarga para sección trapecial con $b=0.30$ m y $k=2.0$

Empleando la ecuación de cantidad de movimiento puro, es posible determinar los valores de los coeficientes de descarga en función de la relación del tirante aguas debajo de la estructura y el tirante aguas arriba (y_3/y_1) y el valor de exponente n . Además, es posible observar que el arreglo de los coeficientes de β deben de ser tal que $\beta_1 < \beta_2 \leq \beta_3$ para evitar discontinuidades en la ecuación del coeficiente de gasto a descarga libre.

3.1.1.4 Método M-E

Primera aproximación

Desarrollo limitado en tirante aguas abajo. La ecuación de caudal a descarga ahogada está dada por:

$$Q = \frac{1}{\sqrt{(n_1 + 1)\alpha_2}} \frac{\mu^{n_2} \sqrt{1 - \frac{n_1 + 1}{n_2 + 1} \frac{c_2 y_3^{n_2+1}}{c_1 y_1^{n_1+1}}}}{\sqrt{\mu^{n_2} \left[\frac{2\beta_2}{\alpha_2} \left(1 - \mu^{n_2} \frac{\beta_1 c_2 y_1^{n_2}}{\beta_2 c_1 y_1^{n_1}} \right) - \frac{y_3^{n_2}}{y_2^{n_2}} \left(1 - \mu^{2n_2} \frac{\alpha_3 c_2^2 y_1^{2n_2}}{\alpha_2 c_3^2 y_3^{2n_3}} \right) \right]}} \sqrt{2gy_1} \sqrt{c_1 c_2 y_1^{\frac{n_1+n_2}{2}}}$$

De la ecuación anterior, al dividir ambos miembros entre $\sqrt{2gy_1}c_2y_1^{n_2}$, se obtiene que el coeficiente de descarga está dado por:

Cd

$$Cd = \frac{1}{\sqrt{(n_1 + 1)\alpha_2}} \frac{\mu^{n_2} \sqrt{1 - \frac{n_1 + 1}{n_2 + 1} \frac{c_2 y_3^{n_2+1}}{c_1 y_1^{n_1+1}}}}{\sqrt{\mu^{n_2} \left[\frac{2\beta_2}{\alpha_2} \left(1 - \mu^{n_2} \frac{\beta_1 c_2 y_1^{n_2}}{\beta_2 c_1 y_1^{n_1}} \right) - \frac{y_3^{n_2}}{\mu^{n_2} y_1^{n_2}} \left(1 - \mu^{2n_2} \frac{\alpha_3 c_2^2 y_1^{2n_2}}{\alpha_2 c_3^2 y_3^{2n_3}} \right) \right]}} \frac{\sqrt{c_1} y_1^{\frac{n_1-n_2}{2}}}{\sqrt{c_2}}$$

Sección rectangular. Proponiendo valores a los coeficientes α_i de 1.00, 0.30 y 1.10 y de β_i de 1.16, 1.00 y 1.00 para las secciones 1, 2 y 3 respectivamente, se obtienen las siguientes curvas para descarga en sección rectangular.

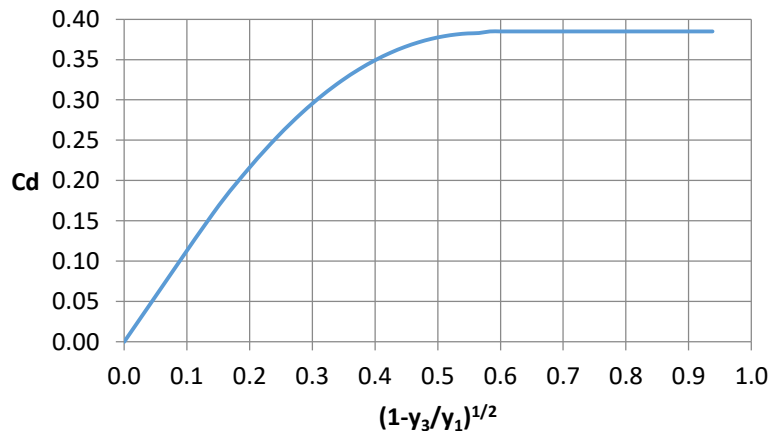


Figura 3.22 Coeficientes de descarga para sección rectangular

Sección triangular

Proponiendo valores a los coeficientes α_i y de β_i semejantes a los de la sección rectangular, se obtienen la siguiente curva para el coeficiente de descarga en sección triangular.

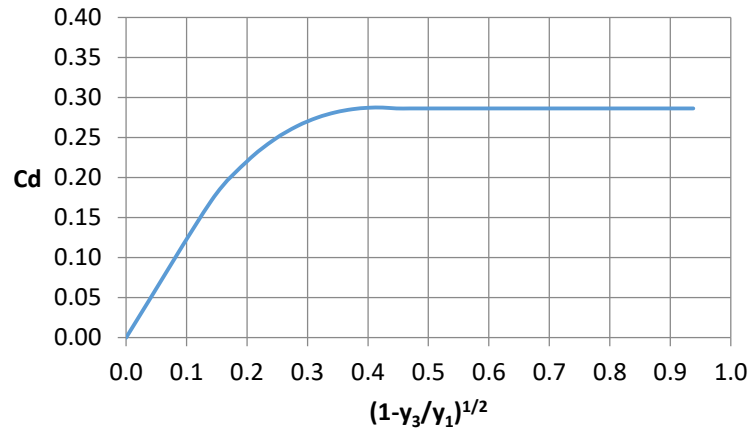


Figura 3.23 Coeficientes de descarga para sección triangular

Sección trapezoidal

A manera de ejemplo se propone un ancho de la plantilla de 0.50 m y un talud de 1, se tiene que el área en cada sección está dada por:

$$A = 1.675y_i^{1.751}$$

con un coeficiente de determinación de 0.996.

Por lo que proponiendo valores a los coeficientes α_i y β_i semejantes a los de la sección rectangular, se obtiene la siguiente curva para el coeficiente de descarga en sección trapezoidal con $b=0.50$ m y $k=1.00$.

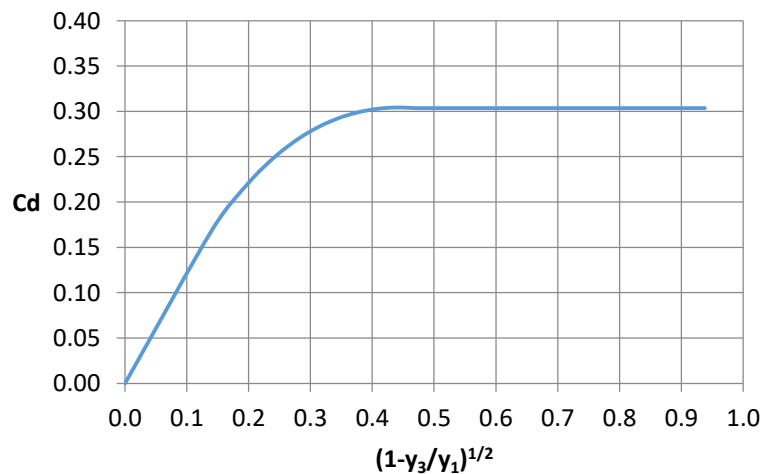


Figura 3.24 Coeficientes de descarga para sección trapezoidal con $b=0.50$ m y $k=1$

Como otro ejemplo se propone un ancho de la plantilla de 0.30 m y un talud de 2, se tiene que el área en cada sección está dada por:

$$A = 2.467y_i^{1.893}$$

con un coeficiente de determinación de 0.999. Por lo que proponiendo valores a los coeficientes α_i y β_i semejantes a los de la sección rectangular.

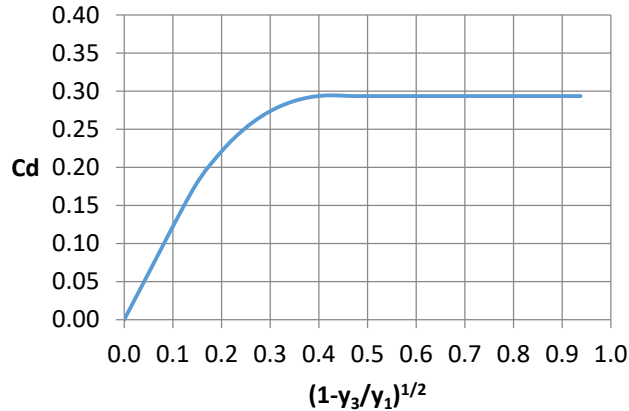


Figura 3.25 Coeficientes de descarga para sección trapezoidal con $b=0.30$ m y $k=2$

Segunda aproximación

La ecuación de caudal a descarga ahogada está dada por:

$$Q = \frac{1}{\sqrt{\alpha_2}} \frac{\mu^{n_2} \sqrt{y_1^{\frac{n_1+1}{n_2+1}}} \sqrt{\left[\frac{c_1 (n_2 + 1)}{c_2 (n_1 + 1)} \right]^{\frac{1}{n_2+1}} - \frac{y_3}{y_1^{\frac{n_1+1}{n_2+1}}}}}{\sqrt{\left[\frac{c_1 (n_2 + 1)}{c_2 (n_1 + 1)} \right]^{\frac{1}{n_2+1}} y_1^{\frac{n_1+1}{n_2+1}} \frac{(n_1 + 1)}{(n_2 + 1)} \frac{2\beta_2}{\alpha_2 y_1} \frac{c_2 \mu^{n_2} y_1^{n_2}}{c_1 y_1^{n_1}} \left(1 - \frac{\beta_1 c_2 \mu^{n_2} y_1^{n_2}}{\beta_2 c_1 y_1^{n_1}} \right) - \left(1 - \frac{\alpha_3 c_2^2 \mu^{2n_2} y_1^{2n_2}}{\alpha_2 c_3^2 y_3^{2n_3}} \right)}} \sqrt{2g} c_2 y_1^{n_2}$$

De la ecuación anterior, al dividir ambos miembros entre $\sqrt{2g} y_1 c_2 y_1^{n_2}$, se obtiene que el coeficiente de descarga está dado por:

$$C_d = \frac{1}{\sqrt{\alpha_2}} \frac{\mu^{n_2} \sqrt{\left[\frac{c_1 (n_2 + 1)}{c_2 (n_1 + 1)} \right]^{\frac{1}{n_2+1}} - \frac{y_3}{y_1^{\frac{n_1+1}{n_2+1}}}}}{\sqrt{\left[\frac{c_1 (n_2 + 1)}{c_2 (n_1 + 1)} \right]^{\frac{1}{n_2+1}} y_1^{\frac{n_1+1}{n_2+1}} \frac{(n_1 + 1)}{(n_2 + 1)} \frac{2\beta_2}{\alpha_2 y_1} \frac{c_2 \mu^{n_2} y_1^{n_2}}{c_1 y_1^{n_1}} \left(1 - \frac{\beta_1 c_2 \mu^{n_2} y_1^{n_2}}{\beta_2 c_1 y_1^{n_1}} \right) - \left(1 - \frac{\alpha_3 c_2^2 \mu^{2n_2} y_1^{2n_2}}{\alpha_2 c_3^2 y_3^{2n_3}} \right)}} \sqrt{\frac{n_1 - n_2}{y_1^{\frac{n_1 - n_2}{n_2 + 1}}}}$$

Sección rectangular

Proponiendo valores a los coeficientes α_i de 1.00, 0.100 y 1.08 y de β_i de 0.85, 1.26 y 1.00 para las secciones 1, 2 y 3 respectivamente, se obtienen las curvas siguientes para descarga en sección rectangular.

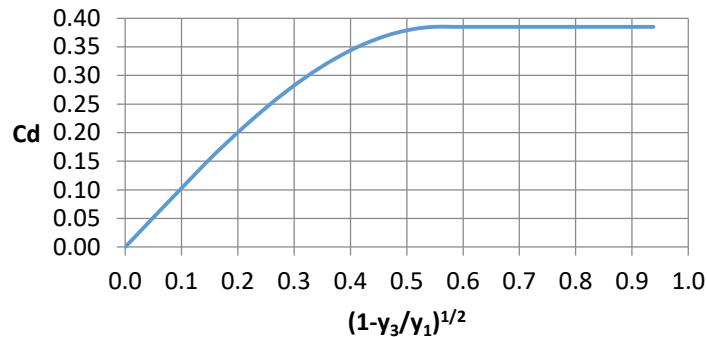


Figura 3.26 Coeficientes de descarga para sección rectangular

Sección triangular

Proponiendo valores a los coeficientes α_i 1.00, 0.80 y 1.11 y de β_i 0.65, 1.50 y 1.00, para las secciones 1, 2 y 3 respectivamente, se obtienen la siguiente curva para el coeficiente de descarga en sección triangular.

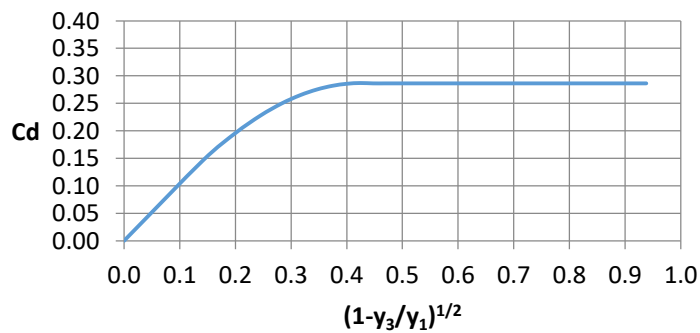


Figura 3.27 Coeficientes de descarga para sección triangular

Sección trapezoidal

A manera de ejemplo se propone un ancho de la plantilla de 0.50 m y un talud de 1, se tiene que el área en cada sección está dada por:

$$A = 1.675y_i^{1.751}$$

con un coeficiente de determinación de 0.996.

Por lo que proponiendo valores a los coeficientes α_i y β_i semejantes a los de la sección triangular, se obtiene la siguiente curva para el coeficiente de descarga en sección trapecial con $b=0.50$ m y $k=1.00$ (**Figura 3.28**).

Como otro ejemplo se propone un ancho de la plantilla de 0.30 m y un talud de 2, se tiene que el área en cada sección está dada por:

$$A = 2.467y_i^{1.893}$$

con un coeficiente de determinación de 0.999. Por lo que proponiendo valores a los coeficientes α_i y β_i semejantes a los de la sección triangular (**Figura 3.29**).

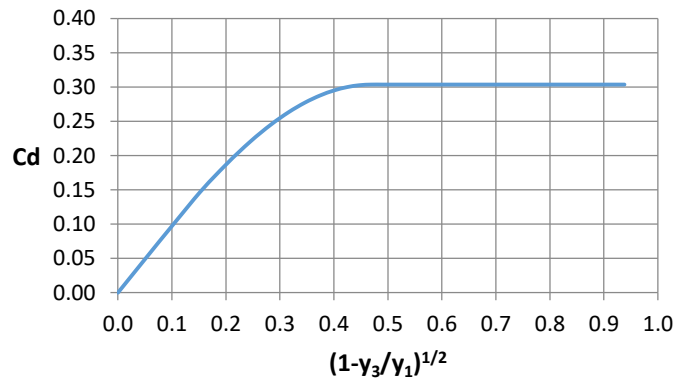


Figura 3.28 Coeficientes de descarga para sección trapecial con $b=0.50$ m y $k=1$

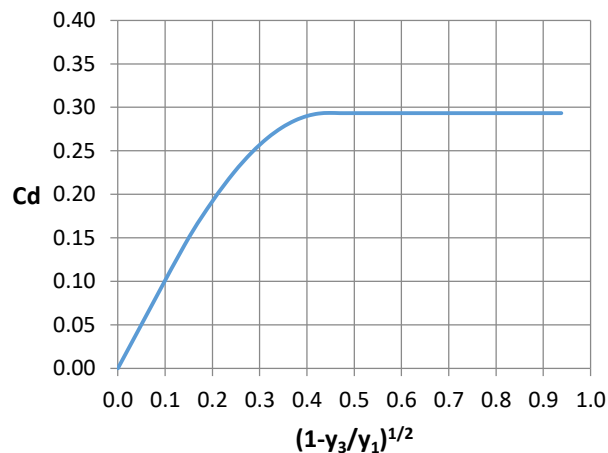


Figura 3.29 Coeficientes de descarga para sección trapecial con $b=0.30$ m y $k=2$

3.2 Comparación de ecuaciones por aproximación

En esta sección se hace un gráfico de las soluciones de todos los métodos. Se inicia con la parte de estructura tipo vertedor.

Sección rectangular

Para la sección rectangular, las ecuaciones generadas permiten estimar el coeficiente de gasto con una gran similitud entre ellas. La aproximación que tiene entre sí dependerá de los coeficientes α_i y β_i que se asignen, por lo que la determinación de los coeficientes es de suma importancia para obtener mejores aproximaciones a la realidad. Se muestra la comparación gráfica de las ecuaciones generadas para determinar el coeficiente de descarga empleando las diferentes aproximaciones de las ecuaciones de energía y cantidad de movimiento para la sección rectangular.

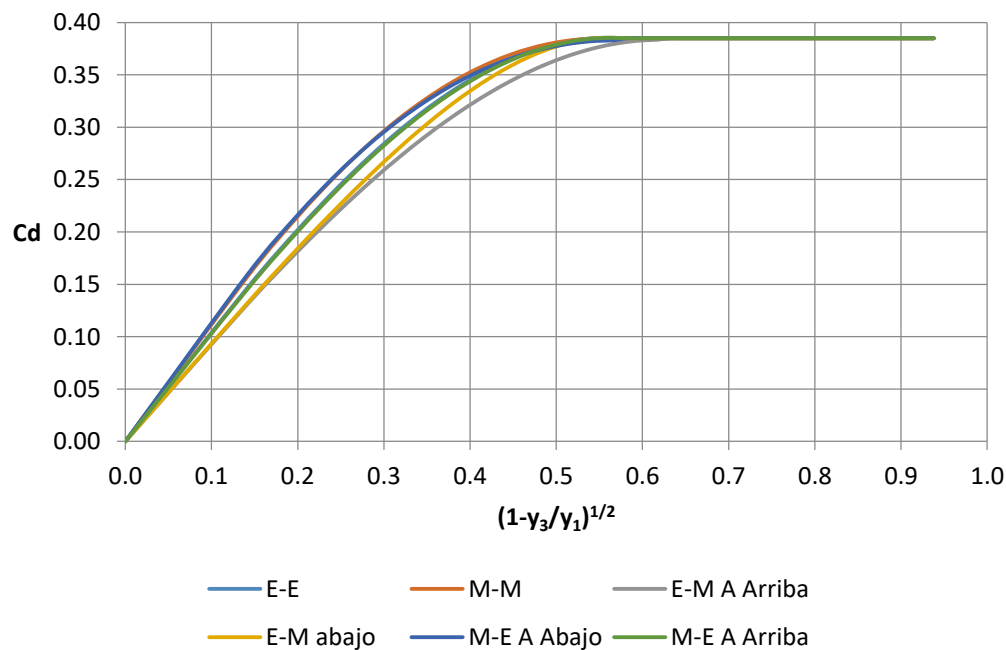


Figura 3.30 Comparación gráfica de los coeficientes obtenidos con las diferentes ecuaciones para sección rectangular

Se observa que las seis ecuaciones convergen en el cambio de régimen. Sin embargo, a descarga ahogada muestran pequeñas diferencias que se pueden minimizar realizando una adecuada determinación de los coeficientes α_i y β_i .

Sección triangular

En la sección triangular, al igual que en la rectangular, los coeficientes de descarga son muy semejantes al ser determinados con las seis ecuaciones desarrolladas.

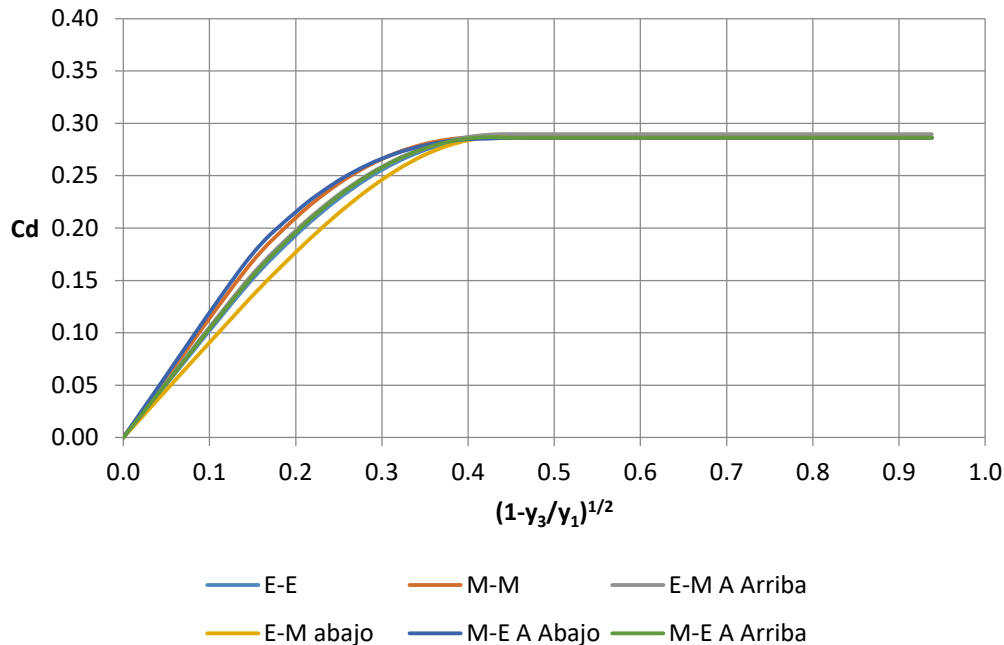


Figura 3.31 Comparación gráfica de los coeficientes obtenidos con las diferentes ecuaciones para sección triangular

Se pueden observar pequeñas diferencias cuando la descarga es ahogada. Al igual que en el caso de la sección rectangular, los coeficientes α_i y β_i fueron asignados de una manera ilustrativa, por lo que la correcta aproximación de las ecuaciones dependerá de la determinación de estos coeficientes.

Sección trapezoidal

Para la sección trapezoidal el coeficiente de descarga depende directamente de los exponentes n_i que se ajustan al modelo potencial del área, por lo que estos varían en función del ancho de la plantilla y del talud. Las gráficas que a continuación se presentan son exclusivas de estructuras de ancho de plantilla de 0.30 m y de talud 2. Sin embargo, las ecuaciones son generales para cualquier valor de plantilla y de talud, siempre y cuando se le pueda ajustar un modelo potencial al área, en función del tirante, con un coeficiente de determinación cercano a la unidad.

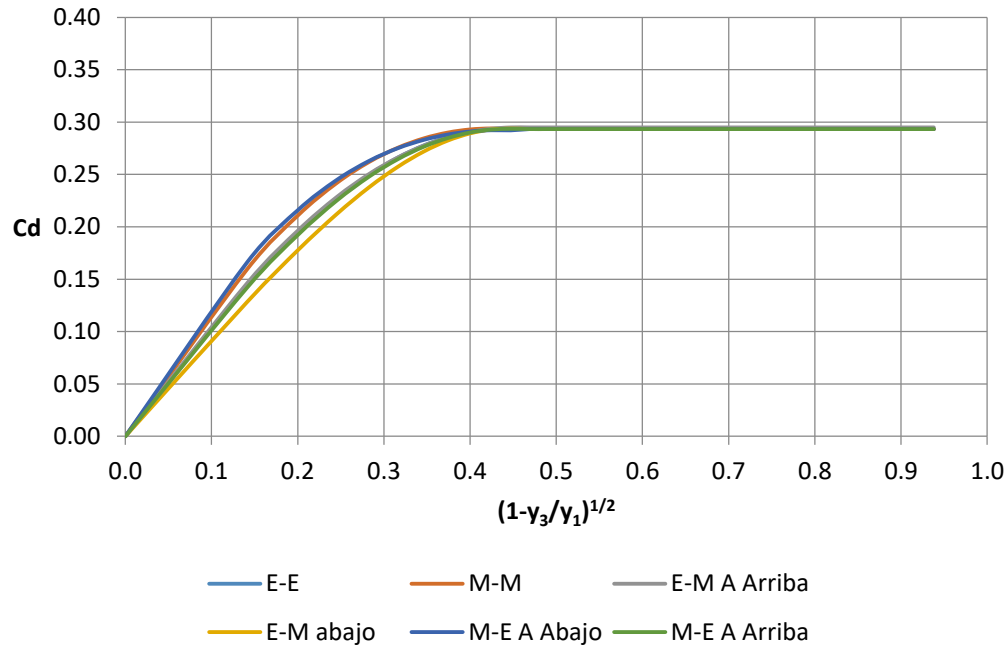


Figura 3.32 Comparación gráfica de los coeficientes obtenidos con las diferentes ecuaciones para sección trapecial $b=0.30$ y $k=2$

Al igual que en las demás secciones, las gráficas presentan pequeñas diferencias en el régimen ahogado, por lo que nuevamente se observa la importancia de una correcta determinación de los coeficientes α_i y β_i . De las comparaciones realizadas se puede observar que las seis ecuaciones obtenidas, al realizar las diferentes aproximaciones, presentan una gran similitud, lo que indica que la determinación del coeficiente de gasto con cualquiera de estas ecuaciones es adecuada, siempre y cuando se realice una correcta determinación de los coeficientes α_i y β_i .

3.3 Comparación de ecuaciones analíticas

3.3.1 Método E-M

Sección rectangular

Empleando la conservación de la energía y la de la cantidad de movimiento se tiene la expresión:

$$Q = \frac{\mu}{\sqrt{\alpha_2}} \sqrt{\frac{\left[\left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \mu^2\right) + 2 \frac{\beta_2}{\alpha_2} \mu \left(1 - \frac{\beta_3}{\beta_2} \mu \frac{y_1}{y_3}\right) \right] - \sqrt{\left[\left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \mu^2\right) + 2 \frac{\beta_2}{\alpha_2} \mu \left(1 - \frac{\beta_3}{\beta_2} \mu \frac{y_1}{y_3}\right) \right]^2 - \left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \mu^2\right)^2 \left(1 - \frac{y_3^2}{y_1^2}\right)}}{1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \mu^2}} \sqrt{2gy_1} b y_1$$

que es general para descarga ahogada.

De la ecuación anterior se obtiene que el coeficiente de descarga está dado por:

$$Cd = \frac{\mu}{\sqrt{\alpha_2}} \sqrt{\frac{\left[\left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \mu^2\right) + 2 \frac{\beta_2}{\alpha_2} \mu \left(1 - \frac{\beta_3}{\beta_2} \mu \frac{y_1}{y_3}\right) \right] - \sqrt{\left[\left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \mu^2\right) + 2 \frac{\beta_2}{\alpha_2} \mu \left(1 - \frac{\beta_3}{\beta_2} \mu \frac{y_1}{y_3}\right) \right]^2 - \left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \mu^2\right)^2 \left(1 - \frac{y_3^2}{y_1^2}\right)}}{1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \mu^2}}$$

Para descarga libre se tiene:

$$Q = \frac{\mu}{\sqrt{\alpha_2}} \sqrt{\frac{\left[\left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \mu^2\right) + 2 \frac{\beta_2}{\alpha_2} \mu \left(1 - \frac{\beta_3}{\beta_2}\right) \right] - \sqrt{\left[\left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \mu^2\right) + 2 \frac{\beta_2}{\alpha_2} \mu \left(1 - \frac{\beta_3}{\beta_2}\right) \right]^2 - \left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \mu^2\right)^2 (1 - \mu^2)}}{1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \mu^2}} \sqrt{2gy_1} b y_1$$

Y su respectivo coeficiente de descarga:

$$Cd = \frac{\mu}{\sqrt{\alpha_2}} \sqrt{\frac{\left[\left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \mu^2\right) + 2 \frac{\beta_2}{\alpha_2} \mu \left(1 - \frac{\beta_3}{\beta_2}\right) \right] - \sqrt{\left[\left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \mu^2\right) + 2 \frac{\beta_2}{\alpha_2} \mu \left(1 - \frac{\beta_3}{\beta_2}\right) \right]^2 - \left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \mu^2\right)^2 (1 - \mu^2)}}{1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \mu^2}}$$

Proponiendo valores a los coeficientes α de 0.90, 1.10 y 1.00; y β 1.00, 0.90 y 1.00 para las secciones 1, 2 y 3 respectivamente, se obtiene la siguiente curva para los coeficientes de descarga para la sección rectangular.

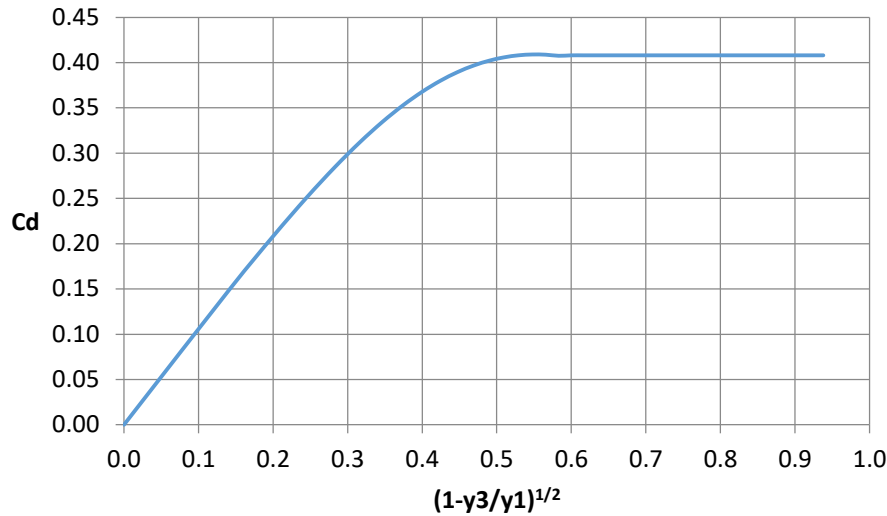


Figura 3.33 Coeficiente de descarga en sección rectangular

Sección triangular

Empleando la conservación de la energía y la de la cantidad de movimiento se tiene la expresión:

$$Q = \frac{\mu^2}{\sqrt{\alpha_2}} \sqrt[3]{\sqrt{R + \sqrt{S^3 + R^2}} + \sqrt[3]{R - \sqrt{S^3 + R^2}} + \frac{1}{\left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \mu^4\right)} \sqrt{2gy_1} m y_1^2}$$

$$\text{donde } S = -\frac{2\left(\mu^2 \frac{\beta_2}{\alpha_2}\right)\left(1 - \frac{\beta_3}{\beta_2} \mu^2 \frac{y_1^2}{y_3^2}\right)}{\left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \mu^4\right)^3} \text{ y } R = \frac{3\left(\mu^2 \frac{\beta_2}{\alpha_2}\right)\left(1 - \frac{\beta_3}{\beta_2} \mu^2 \frac{y_1^2}{y_3^2}\right)}{\left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \mu^4\right)^4} - \frac{\left(\frac{y_3^3}{y_1^3}\right)}{2\left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \mu^4\right)^3}$$

que es general para descarga ahogada.

De la ecuación anterior se obtiene que el coeficiente de descarga está dado por:

$$Cd = \frac{\mu^2}{\sqrt{\alpha_2}} \sqrt[3]{\sqrt{R + \sqrt{S^3 + R^2}} + \sqrt[3]{R - \sqrt{S^3 + R^2}} + \frac{1}{\left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \mu^4\right)}}$$

Para descarga libre se tiene que los valores de s y R están dados por:

$$S = -\frac{2\left(\mu^2 \frac{\beta_2}{\alpha_2}\right)\left(1 - \frac{\beta_3}{\beta_2}\right)}{\left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \mu^4\right)^3}$$

$$R = \frac{3 \left(\mu^2 \frac{\beta_2}{\alpha_2} \right) \left(1 - \frac{\beta_3}{\beta_2} \right)}{\left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \mu^4 \right)^4} - \frac{\mu^3}{2 \left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \mu^4 \right)^3}$$

Proponiendo valores a los coeficientes α de 1.20, 1.05 y 1.00, y β de 1.00, 0.90 y 1.20 para las secciones 1, 2 y 3 respectivamente, se obtienen las siguientes curvas para los coeficientes de descarga para la sección triangular.

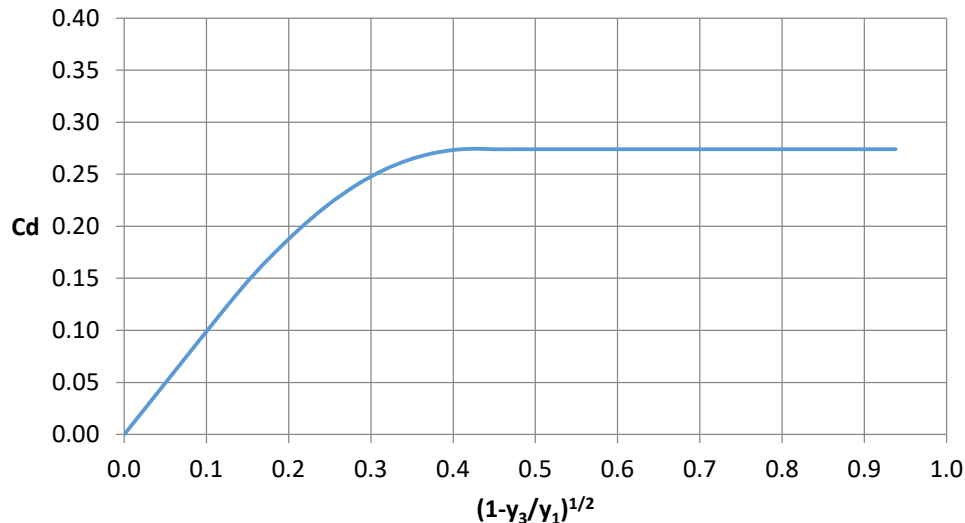


Figura 3.34 Coeficiente de descarga en sección triangular

3.3.2 Método M-E

Sección rectangular

Empleando la conservación de la cantidad de movimiento y energía se tiene la expresión:

$$Q = \frac{\mu}{\sqrt{\alpha_2}} \sqrt{\frac{\left(\frac{y_3}{y_1} \right) \left(1 - \frac{\alpha_3 y_1^2}{\alpha_2 y_3^2} \mu^2 \right) - 2 \frac{\beta_2}{\alpha_2} \mu \left(1 - \frac{\beta_1}{\beta_2} \mu \right)}{\left(1 - \frac{\alpha_3 y_1^2}{\alpha_2 y_3^2} \mu^2 \right)^2} + \frac{\left[\left(\frac{y_3}{y_1} \right) \left(1 - \frac{\alpha_3 y_1^2}{\alpha_2 y_3^2} \mu^2 \right) - 2 \frac{\beta_2}{\alpha_2} \mu \left(1 - \frac{\beta_1}{\beta_2} \mu \right) \right]^2 + \left(1 - \frac{\alpha_3 y_1^2}{\alpha_2 y_3^2} \mu^2 \right)^2 \left[\left(1 - \frac{y_3^2}{y_1^2} \right) \right]}{\left(1 - \frac{\alpha_3 y_1^2}{\alpha_2 y_3^2} \mu^2 \right)^2} \sqrt{2g y_1 c_2 y_1}}$$

Que es general para descarga ahogada.

De la ecuación anterior se obtiene que el coeficiente de descarga está dado por:

$$Cd = \frac{\mu}{\sqrt{\alpha_2}} \sqrt{\frac{\left(\frac{y_3}{y_1} \right) \left(1 - \frac{\alpha_3 y_1^2}{\alpha_2 y_3^2} \mu^2 \right) - 2 \frac{\beta_2}{\alpha_2} \mu \left(1 - \frac{\beta_1}{\beta_2} \mu \right)}{\left(1 - \frac{\alpha_3 y_1^2}{\alpha_2 y_3^2} \mu^2 \right)^2} + \frac{\left[\left(\frac{y_3}{y_1} \right) \left(1 - \frac{\alpha_3 y_1^2}{\alpha_2 y_3^2} \mu^2 \right) - 2 \frac{\beta_2}{\alpha_2} \mu \left(1 - \frac{\beta_1}{\beta_2} \mu \right) \right]^2 + \left(1 - \frac{\alpha_3 y_1^2}{\alpha_2 y_3^2} \mu^2 \right)^2 \left[\left(1 - \frac{y_3^2}{y_1^2} \right) \right]}{\left(1 - \frac{\alpha_3 y_1^2}{\alpha_2 y_3^2} \mu^2 \right)^2}}$$

Para descarga libre se tiene:

$$Q = \frac{\mu}{\sqrt{\alpha_2}} \sqrt{\frac{\mu \left(1 - \frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right) - 2 \frac{\beta_2}{\alpha_2} \mu \left(1 - \frac{\beta_1}{\beta_2} \mu\right)}{\left(1 - \frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)^2} + \frac{\left[\mu \left(1 - \frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right) - 2 \frac{\beta_2}{\alpha_2} \mu \left(1 - \frac{\beta_1}{\beta_2} \mu\right)\right]^2 + \left(1 - \frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)^2 [(1 - \mu^2)]}{\left(1 - \frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)^2}} \sqrt{2gy_1} c_2 y_1$$

Y su respectivo coeficiente de descarga:

$$C_d = \frac{\mu}{\sqrt{\alpha_2}} \sqrt{\frac{\mu \left(1 - \frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right) - 2 \frac{\beta_2}{\alpha_2} \mu \left(1 - \frac{\beta_1}{\beta_2} \mu\right)}{\left(1 - \frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)^2} + \frac{\left[\mu \left(1 - \frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right) - 2 \frac{\beta_2}{\alpha_2} \mu \left(1 - \frac{\beta_1}{\beta_2} \mu\right)\right]^2 + \left(1 - \frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)^2 [(1 - \mu^2)]}{\left(1 - \frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)^2}}$$

Proponiendo valores a los coeficientes α de 1.00, 1.00 y 0.90 y β de 0.90, 1.20 y 1.00 para las secciones 1, 2 y 3 respectivamente, se obtiene la siguiente curva para los coeficientes de descarga para la sección rectangular.

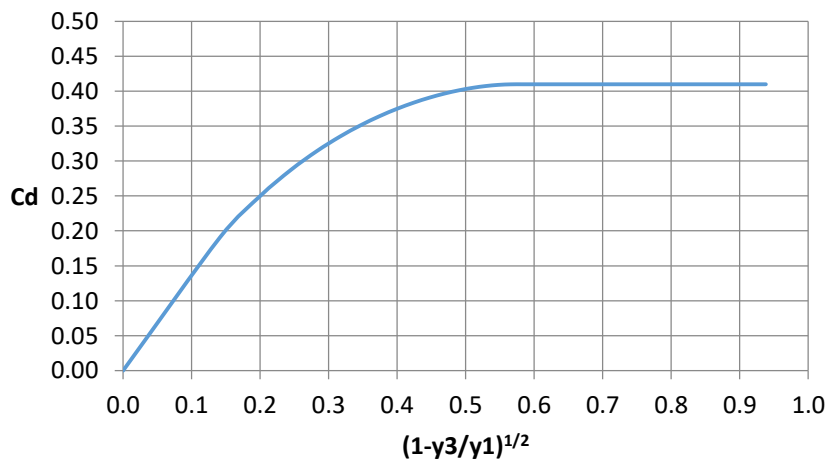


Figura 3.35 Coeficiente de descarga en sección rectangular

Sección triangular

Empleando la de la cantidad de movimiento y la conservación de la energía se tiene la expresión:

$$Q = \frac{\mu^2}{\sqrt{\alpha_2}} \sqrt{\sqrt[3]{R + \sqrt{S^3 + R^2}} + \sqrt[3]{R - \sqrt{S^3 + R^2}} + \frac{1}{\left(\frac{y_1}{y_3}\right) \left(1 - \frac{\alpha_3}{\alpha_2} \mu^4 \frac{y_1^4}{y_3^4}\right)}} \sqrt{2gy_1} c_2 y_1^2$$

$$\text{donde } S = -2 \frac{\left(\frac{\mu^2 \beta_2}{\alpha_2}\right) \left(1 - \frac{\beta_1}{\beta_2} \mu^2\right)}{\left(1 - \frac{\alpha_3}{\alpha_2} \mu^4 \frac{y_1^4}{y_3^4}\right)^3}, R = 3 \frac{\left(\frac{\mu^2 \beta_2}{\alpha_2}\right) \left(1 - \frac{\beta_1}{\beta_2} \mu^2\right)}{\left(\frac{y_1}{y_3}\right) \left(1 - \frac{\alpha_3}{\alpha_2} \mu^4 \frac{y_1^4}{y_3^4}\right)^4} - \frac{1}{2 \left(1 - \frac{\alpha_3}{\alpha_2} \mu^4 \frac{y_1^4}{y_3^4}\right)^3}$$

que es general para descarga ahogada.

De la ecuación anterior se obtiene que el coeficiente de descarga está dado por:

$$Cd = \frac{\mu^2}{\sqrt{\alpha_2}} \sqrt[3]{\sqrt[3]{R + \sqrt{S^3 + R^2}} + \sqrt[3]{R - \sqrt{S^3 + R^2}} + \frac{1}{\left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \mu^4 \frac{W^4}{y_1^4}\right)}}$$

Para descarga libre se tiene que los valores de s y R están dados por:

$$S = -2 \frac{\left(\frac{\mu^2 \beta_2}{\alpha_2}\right) \left(1 - \frac{\beta_1}{\beta_2}\right)}{\left(1 - \frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)^3}$$

$$R = 3 \frac{\left(\frac{\mu^3 \beta_2}{\alpha_2}\right) \left(1 - \frac{\beta_1}{\beta_2} \mu^2\right)}{\left(1 - \frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)^4} - \frac{1}{2 \left(1 - \frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)^3}$$

Proponiendo valores a los coeficientes α de 1.00, 0.50 y 1.25, y β de 1.35, 1.12 y 1.00 para las secciones 1, 2 y 3 respectivamente, se obtienen las siguientes curvas para los coeficientes de descarga para la sección triangular.

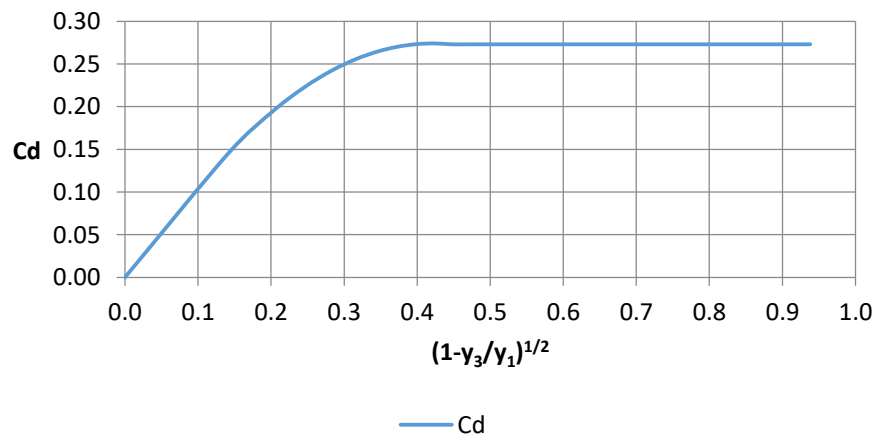


Figura 3.36 Coeficiente de descarga en sección triangular

3.4 Estructuras tipo orificio

Aproximaciones analíticas

3.4.1 Funciones E-E

Empleando la conservación de la energía entre las secciones 1 y 2 se tiene la expresión:

$$Q = \frac{1}{\sqrt{\alpha_2}} \frac{\mu^{n_2} \sqrt{1 - \mu \frac{W}{y_1}}}{\sqrt{1 - \frac{\alpha_1 c_2^2}{\alpha_2 c_1^2} \mu^{2n_2} \frac{W^{2n_2}}{y_1^{2n_1}}}} \sqrt{2gy_1} c_2 W^{n_2}$$

Al dividir entre el término $\sqrt{2gy_1} c_2 W^{n_2}$ se obtiene el coeficiente de gasto para descarga libre:

$$Cd = \frac{1}{\sqrt{\alpha_2}} \frac{\mu^{n_2} \sqrt{1 - \mu \frac{W}{y_1}}}{\sqrt{1 - \frac{\alpha_1 c_2^2}{\alpha_2 c_1^2} \mu^{2n_2} \frac{W^{2n_2}}{y_1^{2n_1}}}}$$

Sección rectangular

Proponiendo valores a los coeficientes α y β iguales a la unidad para las tres secciones, se obtiene la siguiente curva para los coeficientes de descarga para la sección rectangular, misma que se compara con los datos experimentales reportados por Cofré y Buchheister (1954).

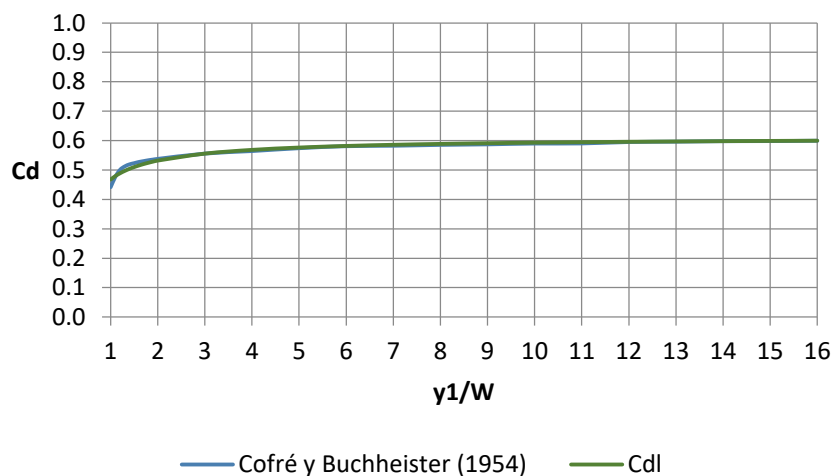


Figura 3.37 Coeficiente de gasto a descarga libre en sección rectangular

3.4.2 Funciones E-M

Desarrollo limitado aguas abajo

Empleando la conservación de la energía y la de la cantidad de movimiento se tiene la expresión:

$$Q = \frac{1}{\sqrt{\alpha_2}} \frac{\mu^{n_2} \sqrt{\left(1 - \frac{c_3 (n_2 + 1)}{c_2 (n_3 + 1)}\right)^{\frac{1}{1+n_2}} \frac{n_3 - n_2}{y_3^{1+n_2}} \frac{y_3}{y_1}}}{\sqrt{\left[1 - \frac{2 c_2^2 (n_3 + 1) \mu^{2n_2} W^{2n_2} \beta_3}{\alpha_2 c_3^2 (n_2 + 1) y_3^{2n_3}} \left\{\frac{c_3 (n_2 + 1)}{c_2 (n_3 + 1)}\right\}^{\frac{1}{1+n_2}} \frac{n_3 - n_2}{y_3^{1+n_2}} \left(\frac{\beta_2 c_3 y_3^{n_3}}{\beta_3 c_2 \mu^{n_2} W^{n_2}} - 1\right) - \frac{\alpha_1 c_2^2 \mu^{2n_2} W^{2n_2}}{\alpha_2 c_1^2 y_1^{2n_1}}\right]}} \sqrt{2gy_1 c_2 W^{n_2}}$$

Al dividir entre el término $\sqrt{2gy_1 c_2 W^{n_2}}$ se obtiene el coeficiente de gasto para descarga ahogada:

C_d

$$C_d = \frac{1}{\sqrt{\alpha_2}} \frac{\mu^{n_2} \sqrt{\left(1 - \frac{c_3 (n_2 + 1)}{c_2 (n_3 + 1)}\right)^{\frac{1}{1+n_2}} \frac{n_3 - n_2}{y_3^{1+n_2}} \frac{y_3}{y_1}}}{\sqrt{\left[1 - \frac{2 c_2^2 (n_3 + 1) \mu^{2n_2} W^{2n_2} \beta_3}{\alpha_2 c_3^2 (n_2 + 1) y_3^{2n_3}} \left\{\frac{c_3 (n_2 + 1)}{c_2 (n_3 + 1)}\right\}^{\frac{1}{1+n_2}} \frac{n_3 - n_2}{y_3^{1+n_2}} \left(\frac{\beta_2 c_3 y_3^{n_3}}{\beta_3 c_2 \mu^{n_2} W^{n_2}} - 1\right) - \frac{\alpha_1 c_2^2 \mu^{2n_2} W^{2n_2}}{\alpha_2 c_1^2 y_1^{2n_1}}\right]}}$$

Al tener la misma sección transversal el coeficiente de descarga se estima de la siguiente manera para descarga ahogada:

$$C_d = \frac{1}{\sqrt{\alpha_2}} \frac{\mu^n \sqrt{1 - \frac{y_3}{y_1}}}{\sqrt{\left[1 - 2 \frac{\beta_3}{\alpha_2} \left(\mu \frac{W}{y_3}\right)^{2n} \left(\frac{\beta_2}{\beta_3} \left(\frac{y_3}{\mu W}\right)^n - 1\right) - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \left(\mu \frac{W}{y_1}\right)^{2n}\right]}}$$

Y para descarga libre:

$$C_d = \frac{1}{\sqrt{\alpha_2}} \frac{\mu^n \sqrt{\left(1 - \mu \frac{W}{y_1}\right)}}{\sqrt{\left[1 - 2 \frac{\beta_3}{\alpha_2} \left(\frac{\beta_2}{\beta_3} - 1\right) - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \left(\mu \frac{W}{y_1}\right)^{2n}\right]}}$$

Sección rectangular

Proponiendo valores a los coeficientes α y β iguales a la unidad para las tres secciones, se obtienen las siguientes curvas para los coeficientes de descarga para la sección

rectangular, mismas que se comparan con los datos experimentales reportados por Cofré y Buchheister (1954).

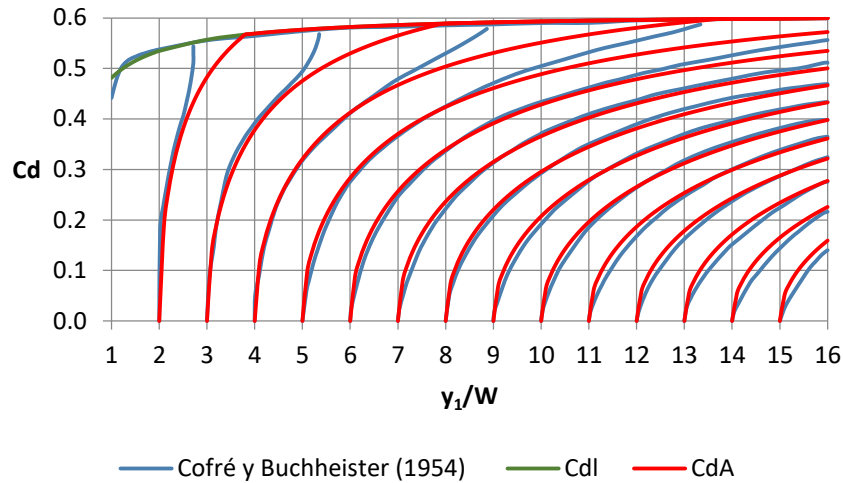


Figura 3.38 Coeficiente de descarga en sección rectangular

Sección triangular

Proponiendo valores a los coeficientes α y β iguales a la unidad para las tres secciones, se obtiene la siguiente curva para los coeficientes de descarga para la sección triangular.

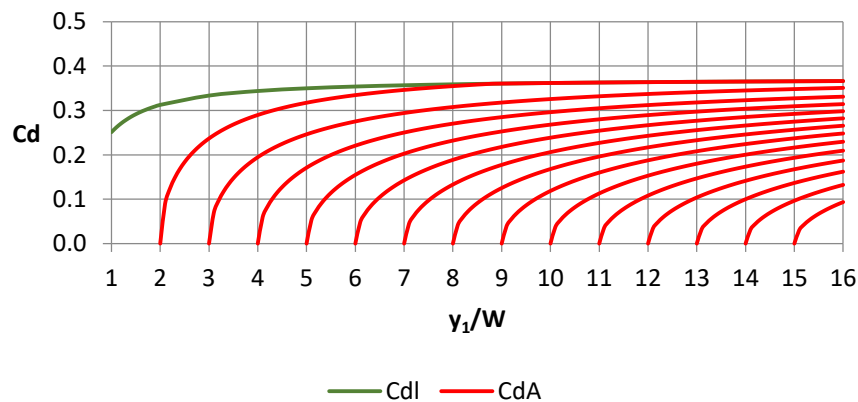


Figura 3.39 Coeficiente de descarga en sección triangular

Sección trapecial

Como ejemplo de canal trapecial se tiene aquel cuyo ancho de la plantilla es de 0.50 m y un talud de 1.00. Proponiendo valores a los coeficientes α y β iguales a la unidad para

las tres secciones, se obtiene la siguiente curva para los coeficientes de descarga para la sección trapecial.

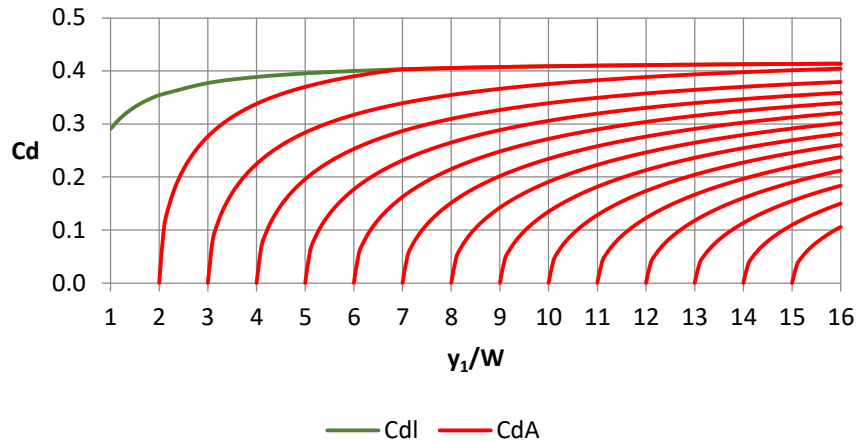


Figura 3.40 Coeficiente de descarga en sección trapecial $b=0.5$ y $k=1$

Para otro ejemplo de canal trapecial se tiene aquel cuyo ancho de la plantilla es de 0.30 m y un talud de 2.00. Proponiendo valores a los coeficientes α y β iguales a la unidad para las tres secciones, se tiene la gráfica de los coeficientes de descarga.

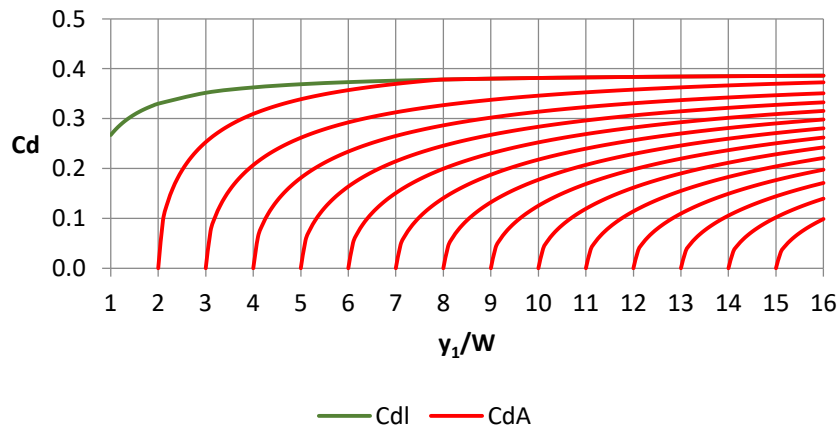


Figura 3.41 Coeficiente de descarga en sección trapecial $b=0.3$ y $k=2$

Desarrollo limitado aguas arriba

El desarrollo limitado aguas arriba no es una aproximación adecuada para el caso de estructuras tipo orificio, por lo que se omite en el presente trabajo.

3.4.3 Funciones M-M

Al emplear solamente la ecuación de cantidad de movimiento en las secciones 1 y 2, no se obtiene información adecuada para estimar el coeficiente de descarga, por lo que se omite los resultados de estas aproximaciones.

3.4.4 Funciones M-E

Al combinar cantidad de movimiento en la sección 1-2 y energía de 2-3, los desarrollos limitados, tanto aguas arriba como aguas abajo, no son aproximaciones adecuadas para el caso de estructuras tipo orificio, por lo que también se omiten en el presente trabajo.

3.5 Aproximaciones analíticas

3.5.1 Método E-M

Sección rectangular

Empleando la conservación de la energía y la de la cantidad de movimiento se tiene la expresión:

$$Q = \frac{\mu}{\sqrt{\alpha_2}} \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \mu^2 \frac{W^2}{y_1^2}\right) - 2\mu \frac{W}{y_1} \frac{\beta_2}{\alpha_2} \left(1 - \frac{\beta_3}{\beta_2} \mu \frac{W}{y_3}\right) - \sqrt{\left[2\mu \frac{W}{y_1} \frac{\beta_2}{\alpha_2} \left(1 - \frac{\beta_3}{\beta_2} \mu \frac{W}{y_3}\right) - \left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \mu^2 \frac{W^2}{y_1^2}\right)\right]^2} - \left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \mu^2 \frac{W^2}{y_1^2}\right)^2 \left(1 - \frac{y_3^2}{y_1^2}\right)}{\left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \mu^2 \frac{W^2}{y_1^2}\right)} \sqrt{2gy_1} bW}$$

que es general para descarga ahogada. De la ecuación anterior se obtiene que el coeficiente de descarga está dado por:

$$Cd = \frac{\mu}{\sqrt{\alpha_2}} \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \mu^2 \frac{W^2}{y_1^2}\right) - 2\mu \frac{W}{y_1} \frac{\beta_2}{\alpha_2} \left(1 - \frac{\beta_3}{\beta_2} \mu \frac{W}{y_3}\right) - \sqrt{\left[2\mu \frac{W}{y_1} \frac{\beta_2}{\alpha_2} \left(1 - \frac{\beta_3}{\beta_2} \mu \frac{W}{y_3}\right) - \left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \mu^2 \frac{W^2}{y_1^2}\right)\right]^2} - \left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \mu^2 \frac{W^2}{y_1^2}\right)^2 \left(1 - \frac{y_3^2}{y_1^2}\right)}{\left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \mu^2 \frac{W^2}{y_1^2}\right)}$$

Para descarga libre se tiene:

$$Q = \frac{\mu}{\sqrt{\alpha_2}} \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \mu^2 \frac{W^2}{y_1^2}\right) - 2\mu \frac{W}{y_1} \frac{\beta_2}{\alpha_2} \left(1 - \frac{\beta_3}{\beta_2}\right) - \sqrt{\left[2\mu \frac{W}{y_1} \frac{\beta_2}{\alpha_2} \left(1 - \frac{\beta_3}{\beta_2}\right) - \left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \mu^2 \frac{W^2}{y_1^2}\right)\right]^2} - \left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \mu^2 \frac{W^2}{y_1^2}\right)^2 \left(1 - \mu^2 \frac{W^2}{y_1^2}\right)}{\left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \mu^2 \frac{W^2}{y_1^2}\right)} \sqrt{2gy_1} bW}$$

Y su respectivo coeficiente de descarga:

$$C_d = \frac{\mu}{\sqrt{\alpha_2}} \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \mu^2 \frac{W^2}{y_1^2}\right) - 2\mu \frac{W}{y_1} \frac{\beta_2}{\alpha_2} \left(1 - \frac{\beta_3}{\beta_2}\right) - \sqrt{\left[2\mu \frac{W}{y_1} \frac{\beta_2}{\alpha_2} \left(1 - \frac{\beta_3}{\beta_2}\right) - \left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \mu^2 \frac{W^2}{y_1^2}\right)\right]^2 - \left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \mu^2 \frac{W^2}{y_1^2}\right)^2 \left(1 - \mu^2 \frac{W^2}{y_1^2}\right)}}{\left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \mu^2 \frac{W^2}{y_1^2}\right)}}$$

Proponiendo valores a los coeficientes α y β de 1.00 para las tres secciones, se obtienen las siguientes curvas para los coeficientes de descarga para la sección rectangular.

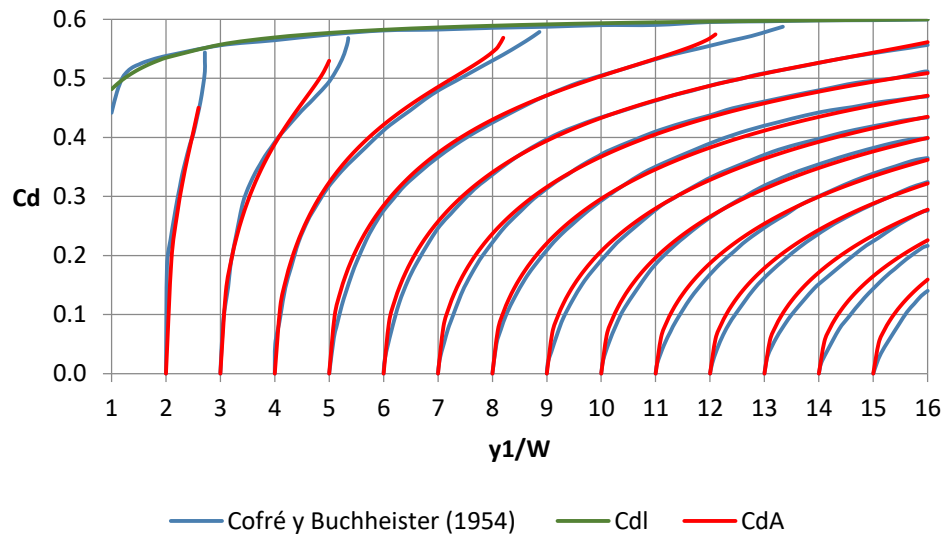


Figura 3.42 Coeficiente de descarga en sección rectangular

El método M-E queda fuera de este análisis debido a que no genera resultados adecuados para la descarga por medio de estructuras de tipo orificio.

Sección triangular

Empleando la conservación de la energía y la de la cantidad de movimiento se tiene la expresión:

$$Q = \frac{\mu^2}{\sqrt{\alpha_2}} \sqrt{\frac{3\sqrt{R + \sqrt{S^3 + R^2}} + 3\sqrt{R - \sqrt{S^3 + R^2}} + \frac{1}{\left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \mu^4 \frac{W^4}{y_1^4}\right)} \sqrt{2gy_1} mW^2}}{\left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \mu^4 \frac{W^4}{y_1^4}\right)}}$$

$$\text{donde } S = -\frac{2\left(\mu^2 \frac{W^2}{y_1^2} \frac{\beta_2}{\alpha_2}\right) \left(1 - \frac{\beta_3}{\beta_2} \mu^2 \frac{W^2}{y_3^2}\right)}{\left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \mu^4 \frac{W^4}{y_1^4}\right)^3}, \quad R = \frac{3\left(\mu^2 \frac{W^2}{y_1^2} \frac{\beta_2}{\alpha_2}\right) \left(1 - \frac{\beta_3}{\beta_2} \mu^2 \frac{W^2}{y_3^2}\right)}{\left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \mu^4 \frac{W^4}{y_1^4}\right)^4} - \frac{\left(\frac{y_3^3}{y_1^3}\right)}{2\left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \mu^4 \frac{W^4}{y_1^4}\right)^3}$$

que es general para descarga ahogada. De la ecuación anterior se obtiene que el coeficiente de descarga está dado por:

$$Cd = \frac{\mu^2}{\sqrt{\alpha_2}} \sqrt[3]{\sqrt[3]{R + \sqrt{S^3 + R^2}} + \sqrt[3]{R - \sqrt{S^3 + R^2}} + \frac{1}{\left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \mu^4 \frac{W^4}{y_1^4}\right)}}$$

Para descarga libre se tiene que los valores de s y R están dados por:

$$S = -\frac{2\left(\mu^2 \frac{W^2 \beta_2}{y_1^2 \alpha_2}\right)\left(1 - \frac{\beta_3}{\beta_2}\right)}{\left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \mu^4 \frac{W^4}{y_1^4}\right)^3}$$

$$R = \frac{3\left(\mu^2 \frac{W^2 \beta_2}{y_1^2 \alpha_2}\right)\left(1 - \frac{\beta_3}{\beta_2}\right)}{\left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \mu^4 \frac{W^4}{y_1^4}\right)^4} - \frac{\left(\mu^3 \frac{W^3}{y_1^3}\right)}{2\left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \mu^4 \frac{W^4}{y_1^4}\right)^3}$$

Proponiendo valores a los coeficientes α de 1.00, 1.20 y 1.00, y β de 1.00, 0.90 y 1.22 para las secciones 1, 2 y 3 respectivamente, se obtienen las siguientes curvas para los coeficientes de descarga para la sección triangular.

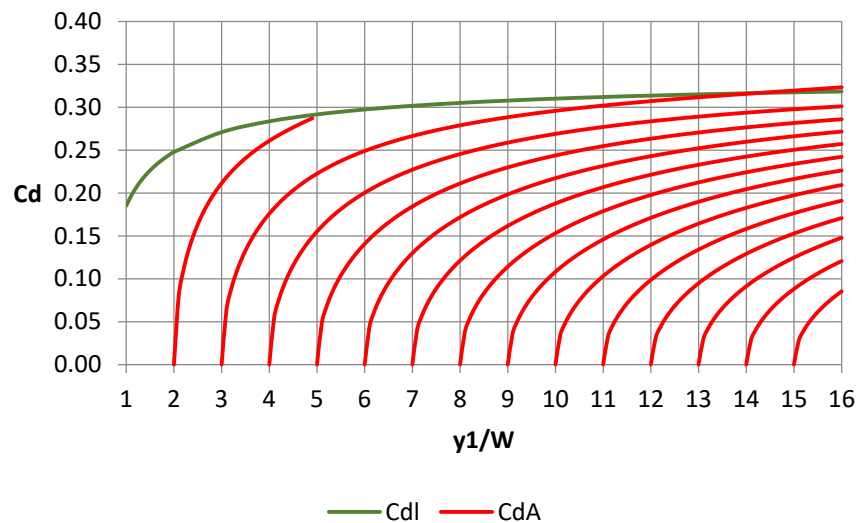


Figura 3.43 Coeficiente de descarga en sección triangular

El método M-E queda fuera de este análisis debido a que no genera resultados adecuados para la descarga por medio de estructuras de tipo orificio.

**Aplicaciones y experimentos de
laboratorio**

4

CAPÍTULO 4

APLICACIONES Y EXPERIMENTOS DE LABORATORIO

José Javier Ramírez Luna, Pablo Camacho Peralta, Ulises Dehesa Carrasco

4.1 Instrumentación de caudal

Se presentan equipos de desarrollo propio. El equipo SOLO puede ser utilizado para medir el caudal a descarga libre en un aforador o vertedor a descarga libre. El equipo DUO permite medir el gasto en las estructuras mencionadas a descarga ahogada y en compuerta deslizante en canal rectangular a descarga libre, y el TRIO en una compuerta deslizante en canal rectangular a descarga libre y ahogada. A continuación se describen someramente los caudalímetros.

4.1.1 Caudalímetro SOLO

El caudalímetro SOLO es un medidor ultrasónico de nivel para canales que puede ser programado tanto para medir nivel como para aplicaciones de flujo, las aplicaciones incluyen vertedores o aforadores de garganta larga trabajando a descarga libre. Cuenta con telemetría, con la cual se pueden hacer consultas en tiempo real a través de mensajes de texto (GSM), envíos de correos electrónicos cada hora (GPRS) o envío de información vía FTP o URL directo a un servidor. El caudalímetro SOLO tiene una pantalla LCD táctil de 4.5 pulgadas iluminada, lector de tarjetas SD para almacenamiento de la información, comunicación RS-232, SPI I2C, salidas digitales y entradas analógicas para comunicación con sensores y periféricos. Puede utilizarse en medición de flujo en canales abiertos, nivel de tanques de agua y cárcamos de bombeo hasta 4 metros.

Su principio de funcionamiento es la medición de tirante a través de un sensor ultrasónico y corregido por temperatura con ayuda de una estructura de medición ya sea un vertedor o un aforador de garganta larga (aplicaciones en canales). Se puede estimar el gasto (el cual se rige por una ecuación de tipo potencial), y con el gasto se puede obtener el volumen acumulado en el tiempo. Estos datos generan un registro con la fecha, hora, tirante, gasto, volumen y temperatura, que se almacena en la memoria micro SD instalada en el equipo, y se envía por mensaje de texto (GSM/SMS), FTP o URL (GPRS) o en un correo electrónico después de almacenar información por 1 hora.

Especificaciones técnicas del medidor

- Gabinete plástico a hermético
- 1 sensor ultrasónico
- Sensor de temperatura (corrección por temperatura)

- Resolución 1 mm
- Precisión ± 2 mm
- Rango 5-400 cm
- Calibración en campo (de ser necesario)
- Pantalla LCD táctil para lectura de nivel, gasto, volumen acumulado y temperatura
- Envío de mensajes de texto
- Envío de correos electrónicos
- Conexión FTP o URL
- Lector de tarjetas de memoria SD para almacenamiento de datos de medición
- Registro de nivel, gasto volumen y temperatura
- Alimentación 12V
- Microprocesador de 32 bits
- Entradas analógicas
- Salidas digitales



Figura 4.1 Caudalímetro SOLO

4.1.2 Caudalímetro DUO

El caudalímetro DUO es un medidor ultrasónico de nivel para canales que puede ser programado tanto para medir nivel como para aplicaciones de flujo. Sus aplicaciones incluyen vertedores o aforadores de garganta larga trabajando a descarga libre o ahogada. Cuenta con telemetría, con la cual se pueden hacer consultas en tiempo real a través de mensajes de texto (GSM), envíos de correos electrónicos cada hora (GPRS) o envío de información vía FTP o URL directo a un servidor.

Este caudalímetro tiene una pantalla LCD táctil de 4.5 pulgadas iluminada, lector de tarjetas SD para almacenamiento de la información, comunicación RS-232, SPI I2C, salidas digitales y entradas analógicas para comunicación con sensores y periféricos. Puede utilizarse en medición de flujo en canales abiertos, nivel de tanques de agua y cárcamos de bombeo hasta 4 metros.

Su principio de funcionamiento es la medición de tirante a través de dos sensores ultrasónicos, uno instalado aguas arriba y el otro instalado aguas abajo (estructura aforadora) y corregido por temperatura. Con ayuda de una estructura de medición ya sea un vertedor o un aforador de garganta larga (aplicaciones en canales), se puede estimar el gasto independientemente si la estructura está trabajando a descarga libre o a descarga ahogada.

Con el gasto se puede obtener el volumen acumulado en el tiempo; los datos generan un registro con la fecha, hora, tirante aguas arriba, tirante aguas abajo, gasto, volumen y temperatura, el cual es almacenado en la memoria micro SD instalada en el equipo, y enviado ya sea por mensaje de texto (GSM/SMS), FTP o URL (GPRS) o en un correo electrónico después de almacenar información por 1 hora.

Especificaciones técnicas del medidor

- Gabinete plástico a hermético
- 2 sensores ultrasónicos
- Sensor de temperatura (corrección por temperatura)
- Resolución 1 mm
- Precisión ± 2 mm
- Rango 5-400 cm (para cada sensor)
- Calibración en campo (de ser necesario)
- Pantalla LCD táctil para lectura de nivel, gasto, volumen acumulado y temperatura
- Envío de mensajes de texto
- Envío de correos electrónicos
- Conexión FTP o URL
- Lector de tarjetas de memoria SD para almacenamiento de datos de medición
- Registro de nivel, gasto volumen y temperatura
- Alimentación 12V
- Microprocesador de 32 bits
- Entradas analógicas
- Salidas digitales
- Límite de carga 3 cm



Figura 4.2 Caudalímetro DUO

4.1.3 Caudalímetro TRIO

Es un medidor ultrasónico de nivel para canales que puede ser programado tanto para medir nivel como para aplicaciones de flujo. Sus aplicaciones incluyen vertedores, aforadores de garganta larga y compuertas deslizantes trabajando a descarga libre o ahogada. Cuenta con telemetría, con la cual se pueden hacer consultas en tiempo real a través de mensajes de texto (GSM), envíos de correos electrónicos cada hora (GPRS) o envío de información vía FTP o URL directo a un servidor.

Este caudalímetro tiene una pantalla LCD táctil de 4.5 pulgadas iluminada, lector de tarjetas SD para almacenamiento de la información, comunicación RS-232, SPI I2C, salidas digitales y entradas analógicas para comunicación con sensores y periféricos. Puede utilizarse en medición de flujo en canales abiertos, nivel de tanques de agua y cárcamos de bombeo hasta 4 metros.

Su principio de funcionamiento es la medición de tirante a través de dos sensores ultrasónicos, uno instalado aguas arriba y el otro instalado aguas abajo (estructura aforadora) y un tercero monitorea apertura (compuertas deslizantes) y corregidos por temperatura. Con ayuda de una estructura de medición, ya sea un vertedor o un aforador de garganta larga o una compuerta deslizante (aplicaciones en canales), se puede estimar el gasto independientemente si la estructura está trabajando a descarga libre o a descarga ahogada. Con el gasto se puede obtener el volumen acumulado en el tiempo, y estos datos generan un registro con la fecha, hora, tirante aguas arriba apertura, tirante aguas abajo, gasto, volumen y temperatura, el cual es almacenado en la memoria micro SD instalada en el equipo, y enviado ya sea por mensaje de texto (GSM/SMS), FTP o URL (GPRS) o en un correo electrónico después de almacenar información por 1 hora.

Especificaciones técnicas del medidor

- Gabinete plástico a hermético
- 3 sensores ultrasónicos

- Sensor de temperatura (corrección por temperatura)
- Resolución 1 mm
- Precisión ± 2 mm
- Rango 5-400 cm
- Calibración en campo (de ser necesario)
- Pantalla LCD táctil para lectura de nivel, gasto, volumen acumulado y temperatura
- Envío de mensajes de texto
- Envío de correos electrónicos
- Conexión FTP o URL
- Lector de tarjetas de memoria SD para almacenamiento de datos de medición
- Registro de nivel, gasto volumen y temperatura
- Alimentación 12V
- Microprocesador de 32 bits
- Entradas analógicas
- Salidas digitales
- Límite de ahogamiento 5 cm de carga (compuerta deslizante)



Figura 4.3 Caudalímetro TRIO

4.2 Datos experimentales disponibles

En lo sucesivo se presenta una revisión sucinta de literatura de los diferentes modelos propuestos por diversos autores para obtener el coeficiente de calibración de la ecuación de gasto de una compuerta vertical plana. Usando las ecuaciones de continuidad y de energía, se deriva la ecuación de descarga en una compuerta rectangular.

$$Q = C_d b W \sqrt{2 g y_1} \quad (4.1)$$

donde Q es el caudal que fluye a través del orificio bajo la compuerta, b es el ancho de la compuerta, W es la apertura de la compuerta, g es la aceleración de la gravedad, y_1 es la carga aguas arriba de la compuerta y C_d es el coeficiente de descarga. El coeficiente C_d depende de diferentes parámetros como la profundidad aguas arriba y aguas abajo (y_3), apertura de la compuerta, coeficiente de contracción de la puerta (C_c) y la condición de flujo.

Henry (1950) obtuvo experimentalmente la variación de C_d bajo condiciones de flujo libre y sumergido, que más tarde fue confirmada por Rajaratnam y Subramanya (1967). Cofré y Buchheister (1954) comprobaron y ampliaron los resultados obtenidos por Henry (1950) (Figura 0-1).

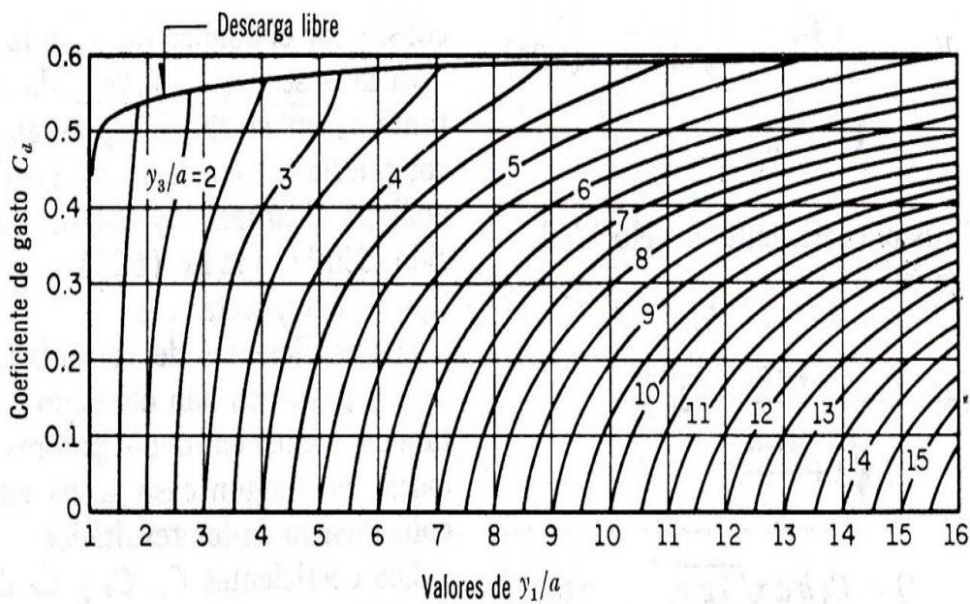


Figura 4.4 Coeficiente de gasto (C_d) de una compuerta plana vertical según Cofré y Buchheister

Swamee (1992) presenta dos fórmulas para distinguir las condiciones de flujo y determinar si el salto será libre o ahogado.

Descarga libre

$$y_1 \geq 0.81 y_3 \left(\frac{y_3}{W} \right)^{0.72} \quad (4.2)$$

Descarga ahogado

$$y_3 < y_1 < 0.81y_3 \left(\frac{y_3}{W}\right)^{0.72} \quad (4.3)$$

Swamee obtuvo ecuaciones para el coeficiente de descarga para flujo libre y sumergido, mediante la realización de una regresión no lineal de las curvas de Henry (1950).

Descarga libre

$$C_d = 0.611 \left(\frac{y_1 - W}{y_1 + 15W}\right)^{0.072} \quad (4.4)$$

Descarga ahogada

$$C_d = 0.611 \left(\frac{y_1 - W}{y_1 + 15W}\right)^{0.072} \left(0.32 \left(\frac{0.81y_3 \left(\frac{y_3}{W}\right)^{0.72} - y_1}{y_1 - y_3}\right)^{0.7} + 1\right)^{-1} \quad (4.5)$$

Sin embargo, las ecuaciones propuestas por Swamee (1992) muestran una amplia diferencia al ser comparada con las curvas de Cofré y Buchheister (1954), tal como se muestra en la **Figura 4.5**.

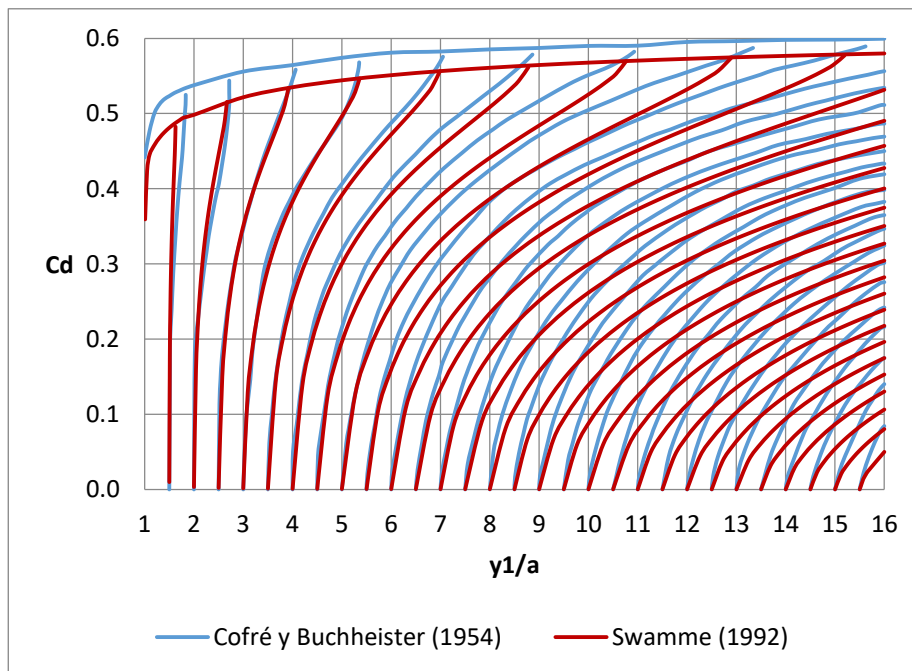


Figura 4.5 Comparación entre las curvas de Cofré y Buchheister (1954) y las ecuaciones de Swamee (1992)

Oskuni y Salmasi (2012) realizaron múltiples regresiones lineales y no lineales a través del paquete de Mathematica v.6, sus resultados para cada condición de flujo son como sigue:

Descarga libre

$$C_d = 0.4552 + 0.01197 \left(\frac{y_1}{W} \right) \quad (4.6)$$

$$C_d = 0.44457 \left(\frac{y_1}{W} \right)^{0.1219} \quad (4.7)$$

Descarga ahogada

$$C_d = 0.2663 + 0.0905 \left(\frac{y_3}{W} \right) - 0.0961 \left(\frac{y}{W} \right) \quad (4.8)$$

$$C_d = 0.7482 \left(\frac{y_3}{W} \right)^{-0.6825} \left(\frac{1}{Fr^2} \right)^{-0.3929} \quad (4.9)$$

La Ecuación 4.9 indica el flujo que pasa a través de una compuerta sumergida con fina precisión, por lo que es recomendable usar la ecuación no lineal para la condición de flujo sumergido. Al no tener una representación de la ecuación anterior dependiente de las variables de la gráfica, no se presentan los datos reproducidos por las mismas.

Henderson (1966) deriva dos ecuaciones para calcular el coeficiente de descarga en cada condición de flujo-

Descarga libre

$$C_d = \frac{C_c}{\sqrt{1 + \eta}} \quad (4.10)$$

Descarga ahogada

$$C_d = C_c \frac{\left(\xi - \sqrt{\xi^2 - \left(\frac{1}{\eta^2} - 1 \right)^2 \left(1 - \frac{1}{\lambda^2} \right)} \right)^{1/2}}{1/\eta - \eta} \quad (4.11)$$

donde $\eta = C_c W / y_1$, $\lambda = y_1 / y_3$ y $\xi = \left(\frac{1}{\eta} - 1 \right)^2 + 2(\lambda - 1)$.

Los modelos propuestos por Henderson (1966) se ajustan considerablemente a las curvas de Cofré y Buchheister (1954) en el régimen completamente sumergido y a valores pequeños de la relación y_1/a ; sin embargo, cercano al cambio de régimen el

modelo de Henderson (1966) subestima los valores del coeficiente, mientras que para valores de y_1/a sobreestima los resultados.

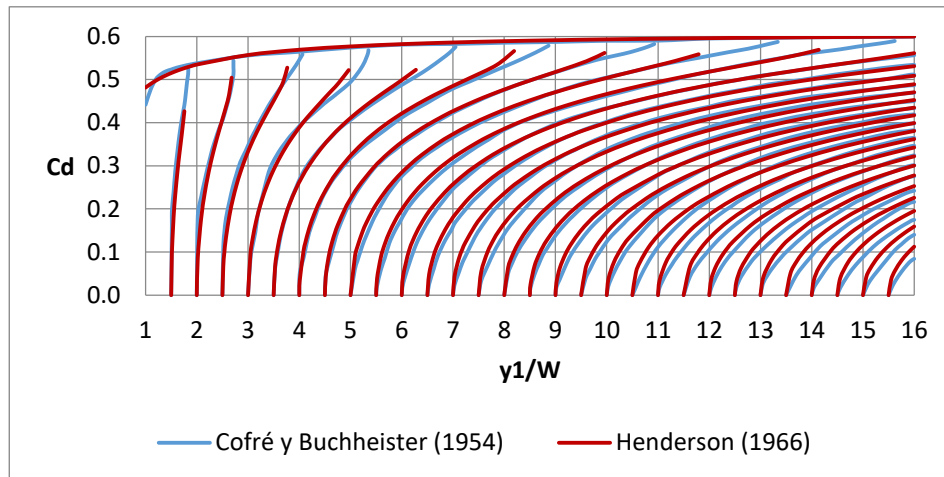


Figura 4.6 Comparación entre las curvas de Cofré y Buchheister (1954) y las de Henderson (1966)

El principal inconveniente de las ecuaciones de Henderson (1966) es que, al aproximarse al cambio de régimen, la solución se vuelve compleja en milésimas de milímetro debido a que la ecuación no está definida para esta zona, tal como se muestra en la **Figura 4.7**. Esto puede ser objeto de error de medición en estructuras en campo debido a la resolución (orden de milímetro) de la medida de los tirantes (aguas arriba y abajo) y la apertura.

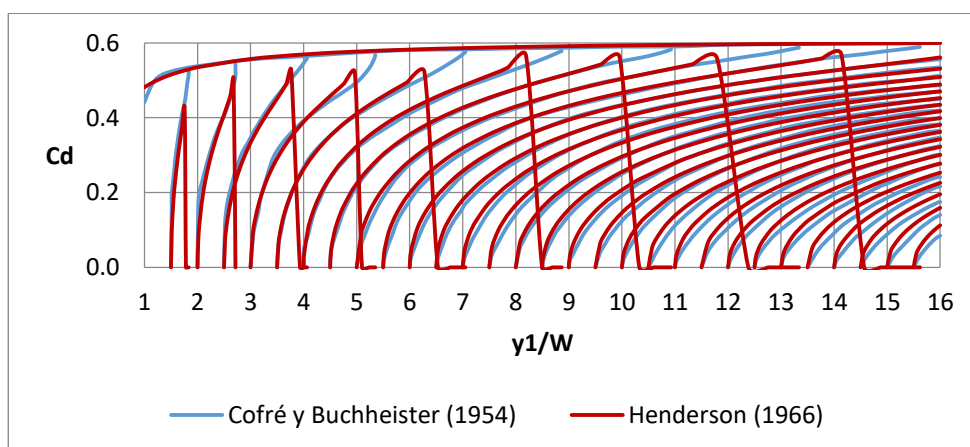


Figura 4.7 Comportamiento de las ecuaciones de Henderson (1966) cercano al cambio de régimen

Habibzadeh, Vatankhah y Rajaratnam (2011), resolviendo la ecuación de momentum y de pérdida de energía, encontraron que el coeficiente de descarga se calcula a partir de las siguientes expresiones.

Descarga libre

$$C_d = C_c \sqrt{(1 - 1/\beta)(1 + k - 1/\beta^2)} \quad (4.12)$$

Descarga ahogada

$$C_d = C_c \frac{\sqrt{\gamma - \sqrt{\gamma^2 - [\beta^2(1 + k) - 1]^2 \left(1 - \frac{1}{\delta^2}\right)}}}{\beta(1 + k) - \frac{1}{\beta}} \quad (4.13)$$

donde $\gamma = k\beta^2 + (\beta - 1)^2 + 2(\delta - 1)$, $\delta = y_1/y_3$ y $\beta = y_1/y_2 = y_1/C_c W$

Además de una ecuación que representa la condición de cambio de régimen basada en la cantidad de movimiento aguas abajo de la compuerta.

Las ecuaciones propuestas por Habibzadeh *et al.* (2011) subestiman el valor del C_d a descarga libre y en las proximidades al cambio de régimen, mientras que lo sobreestiman para valores de y_1/W grandes, semejante a las ecuaciones de Henderson (1966), además de que son objeto de los mismos errores de resolución de instrumentos de medición de tirante y apertura.

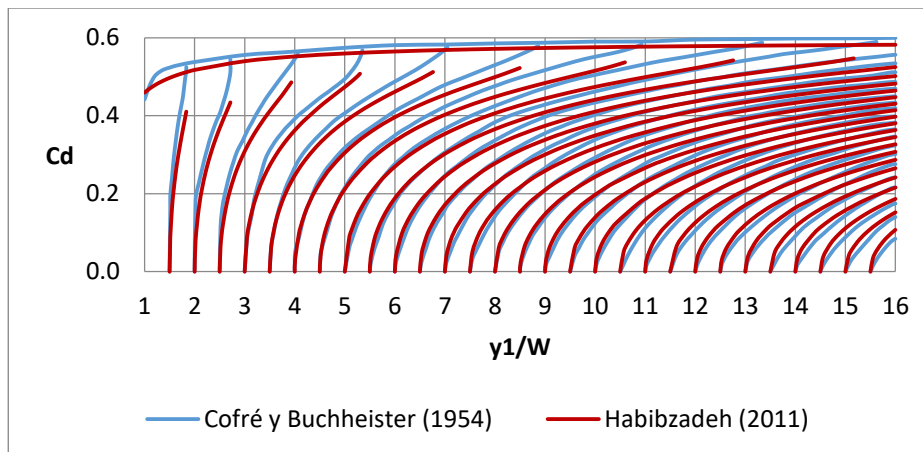


Figura 4.8 Comparación entre las curvas de Cofré y Buchheister (1954) y de Habibzadeh *et al.* (2011)

Al igual que las ecuaciones de Henderson (1966), el principal inconveniente de las ecuaciones de Habibzadeh *et al.* (2011) es que al aproximarse al cambio de régimen la ecuación se vuelve compleja en milímetros. Lo anterior se muestra en la **Figura 4.9**.

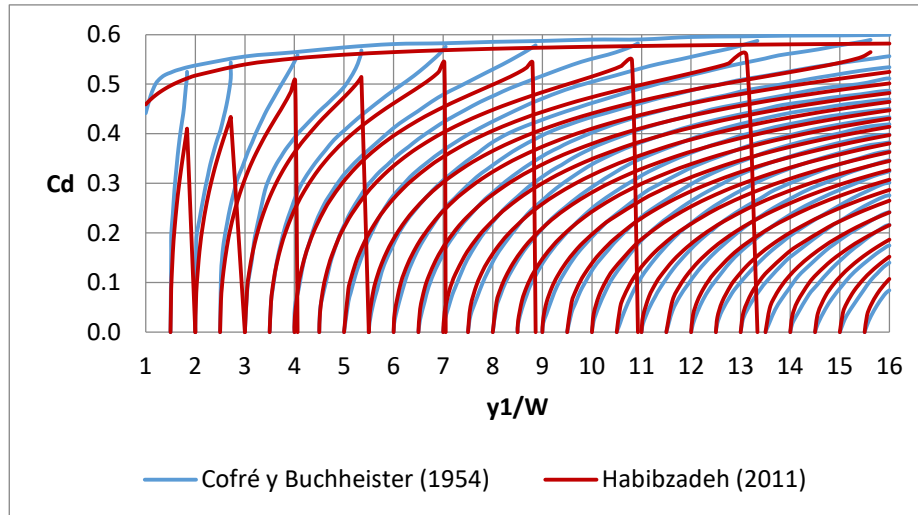


Figura 4.9 Comportamiento de las ecuaciones de Habibzadeh cercano al cambio de régimen

Javier Ramírez (2014-2015) obtuvo experimentalmente valores del coeficiente de descarga en el laboratorio de hidráulica Enzo Levi del Instituto Mexicano de Tecnología del Agua (IMTA). Les ajustó los siguientes modelos para cada uno de los regímenes de flujo. Se observó que los modelos propuestos permiten estimar el valor del C_d con un error siempre menor al 10 por ciento.

Para descarga libre obtuvo el siguiente modelo.

$$C_d = \frac{C_c}{\sqrt{K}} \sqrt{\frac{1 - \frac{C_c W}{y_1}}{\left(1 - \frac{k_1}{K}\right) \left(\frac{C_c W}{y_1}\right)^2}} \quad (4.14)$$

donde k_1 y K son coeficiente de corrección con valores de 1 y 1.062 respectivamente. Por su parte, para descarga ahogada presenta el siguiente modelo.

$$C_d = \frac{C_c}{\sqrt{K}} \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{y_3}{y_1}\right)}{1 + \frac{1}{K} \left[2 \left(\frac{C_c W}{y_3}\right)^2 - 3 \left(\frac{C_c W}{y_3}\right) \right] - \frac{k_1}{K} \left(\frac{C_c W}{y_1}\right)^2}} \quad (4.15)$$

donde k_1 y K son iguales 0.4 y 1.082 respectivamente.

Al realizar una comparación gráfica de los datos obtenidos experimentalmente en el IMTA con las curvas de Cofré y Buchheister (1954), como se muestra en la **Figura 4.10**, se observa que los resultados subestiman el valor de C_d para valores de y_1/W pequeños y lo sobreestiman para y_1/W grandes. Otra diferencia es que los datos obtenidos experimentalmente indican que el valor del coeficiente a descarga libre es menor.

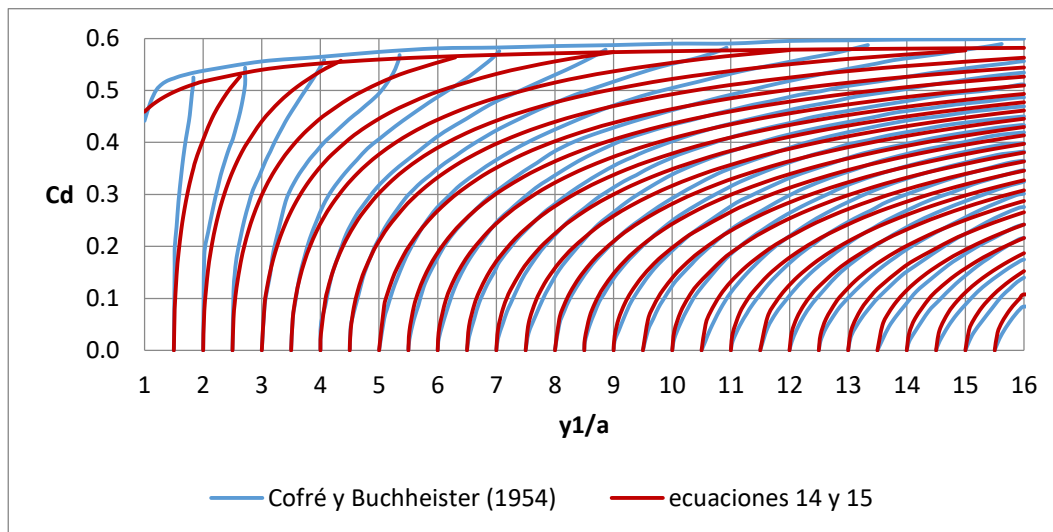


Figura 4.10 Comparación entre las curvas de Cofré y Buchheister (1954) y las de Ramírez (2014-2015)

La ventaja que presenta el modelo obtenido de los datos experimentales del IMTA es que no tiene problemas en el cambio de régimen, debido a que es una función continua en esa zona y por lo tanto para variaciones del orden del error milimétrico requerido por los instrumentos de medición de tirantes y apertura siempre determina valores reales y estima adecuadamente el gasto (sin discontinuidades). Para mejorar el ajuste a las curvas de Cofré y Buchheister (1954) a un modelo matemático, el mismo autor propone la siguiente expresión:

$$C_d = \frac{C_c}{\sqrt{K_2}} \sqrt{\left(\frac{1}{\delta} - \frac{4\beta C_c W}{K_2 \delta^2 y_1} \left(1 - 2 \frac{C_c W}{y_3}\right) \right) - \sqrt{\left(\frac{1}{\delta} - \frac{4\beta C_c W}{K_2 \delta^2 y_1} \left(1 - 2 \frac{C_c W}{y_3}\right) \right)^2 - \frac{1}{\delta^2} \left(1 - \frac{y_3^2}{y_1^2}\right)}} \quad (4.16)$$

donde $\delta = \left(1 - 2 \frac{K_1}{K_2} \left(\frac{C_c W}{y_1}\right)^2\right)$, β , K_1 y K_2 son coeficientes de corrección de las ecuaciones de energía y momentum, con valores de 0.96, 1.5 y 1.065 respectivamente.

La comparación de la ecuación 16 con las curvas de Cofré y Buchheister (1954) se muestra en la **Figura 4.11**. En ella se puede observar que el modelo propuesto por el autor se aproxima a las curvas de Cofré y Buchheister (1954) en la zona del cambio de régimen mejor que los modelos antes analizados.

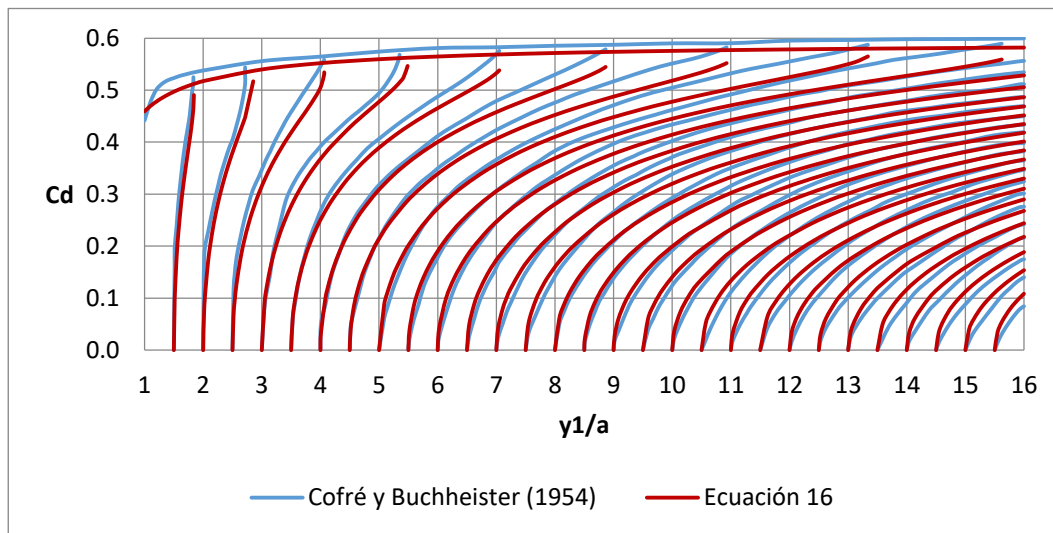


Figura 4.11 Comparación entre las curvas de Cofré y Buchheister (1954) y la ecuación de Ramírez (2014-2015)

Para mejorar la aproximación al cambio de régimen, el autor propone un modelo más, el cual se muestra en la Ecuación 4.17.

$$C_d = \frac{C_c}{\sqrt{K_2}} \sqrt{\frac{\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 - \delta^2 \left(1 - 2 \left(\frac{y_3}{y_1}\right)^2\right)}}{\delta^2}} \quad (4.17)$$

donde $\delta = 1 - 2(K_1/K_2)(C_c W/y_1)^2$, $\gamma = \beta_2 - \beta_3 C_c W/y_3$ y $\varepsilon = \delta - (2/K_2)(C_c w/y_1) \gamma$. β_2 y β_3 son coeficientes de corrección en las ecuaciones de cantidad de movimiento, con valores de 0.925 y 1.17; por su parte el valor de K_1 y K_2 son 1.18 y 0.985

respectivamente. En la **Figura 4.12** se muestra la comparación de la Ecuación 4.17 con las curvas de Cofré y Buchheister (1954), donde se puede observar un mejor ajuste en la zona del cambio de régimen para valores de la relación y_1/W mayores a 6.

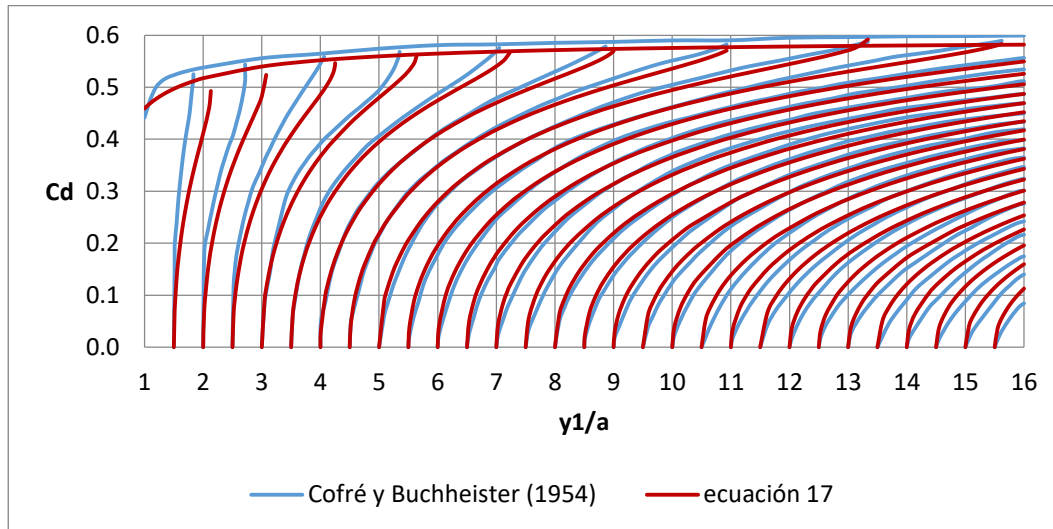


Figura 4.12 Comparación entre las curvas de Cofré y Buchheister (1954) y la ecuación de Javier Ramírez

4.3 Aplicaciones y datos experimentales

4.3.1 SOLO

En la estructura de medición, es decir, en el aforador de garganta larga, se debe estar desazolviendo continuamente para lograr mediciones precisas y también para que el agua de escurrimiento fluya libremente, y es que después de cierto número de eventos este se llega a azolvar, como se muestra en la **Figura 4.13**. En la **Figura 4.14** se presenta el aforador totalmente desazolvido, y es una actividad que se realiza de manera periódica en ambos aforadores.

Durante el año se realizó limpieza dentro del registro o casita techada donde están resguardados los sensores y el equipo de medición. Dentro del registro se llegaron a encontrar nidos de ratón, los mismos ratones, lagartijas y otros animales, los cuales se quitaban para evitar que afectaran el funcionamiento del equipo. Por otro lado, en este año se hizo el cambio de los equipos medidores en ambas microcuencas, ya que los nuevos cuentan con tecnología más robusta para el registro y envío de información vía GSM. En los siguientes testimonios fotográficos se muestra las actividades que se realizaron para el cambio de los equipos medidores.



Figura 4.13 Aforador de garganta larga azolvado en la microcuenca Malacate



Figura 4.14 Aforador de garganta larga desazolvado en la microcuenca Malacate



Figura 4.15 Revisión del funcionamiento de los paneles solares que proporcionan energía a los equipos medidores



Figura 4.16 Equipo de medición que se instaló en aforador de la microcuenca Malacate



Figura 4.17 Equipo de medición que se instaló en aforador de la microcuenca Ichupio



Figura 4.18 Configuración que se realizaba a los equipos cuando presentaba fallos en el envío de la información por GSM



Figura 4.19 Ejemplo de registro de información de un sensor ultrasónico durante la presencia de un evento de escurrimiento



Figura 4.20 Evento de escurrimiento que se presentó en el aforador de la microcuenca Malacate



Figura 4.21 Evento de escurrimiento que se presentó en el aforador de la microcuenca Ichupio

4.3.2 Recopilación de información de los medidores

Posterior a la limpieza y mantenimiento de los equipos se extrajo la memoria SD para recopilar la información registrada desde la última recopilación. La información se recopilaba al menos cada mes. Después de la recopilación de información se hacían pruebas en campo como la consulta de información en tiempo real a través de llamada y mensaje de texto al celular registrado en la configuración de cada equipo, al igual que de la telemetría a través de correo electrónico (**Figura 4.23**).

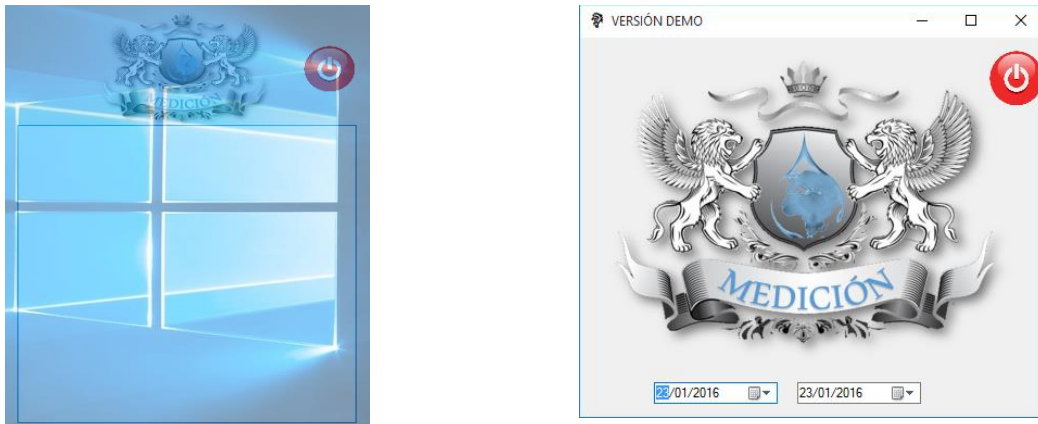


Figura 4.22 Sistema de telemetría

MEDIDOR	FECHA	HORA	TIRANTE	GASTO	TEMPERATURA
MALACATE	2015-08-06	19:36:00	3.25701	26.83888	20.5
MALACATE	2015-08-06	19:39:00	11.76766	229.2967	20.43
MALACATE	2015-08-06	19:42:01	12.43283	252.0243	20.37
MALACATE	2015-08-06	19:45:02	11.67773	226.3777	20.31
MALACATE	2015-08-06	19:48:00	10.95826	203.5702	20.31
MALACATE	2015-08-06	19:51:00	11.28758	213.889	20.31
MALACATE	2015-08-06	19:54:01	15.74088	372.7186	20.31
MALACATE	2015-08-06	19:57:01	18.46281	486.4731	20.31
MALACATE	2015-08-06	20:03:00	17.86951	460.6489	20.31
MALACATE	2015-08-06	20:06:01	17.04976	425.9042	20.31
MALACATE	2015-08-06	20:09:01	16.71397	411.9888	20.31
MALACATE	2015-08-06	20:12:01	16.40212	399.2321	20.31
MALACATE	2015-08-06	20:15:00	15.32681	356.49	20.37
MALACATE	2015-08-06	20:18:00	14.33432	318.7815	20.31
MALACATE	2015-08-06	20:24:00	12.57575	256.1925	20.31
MALACATE	2015-08-06	20:27:00	11.7819	229.7602	20.31
MALACATE	2015-08-06	20:30:01	11.1336	209.0389	20.31
MALACATE	2015-08-06	20:33:01	10.7454	197.0097	20.31
MALACATE	2015-08-06	20:45:01	10.3365	184.6502	20.25
MALACATE	2015-08-06	20:48:00	11.13037	208.9374	20.18
MALACATE	2015-08-06	20:54:01	12.51689	254.1929	20.12
MALACATE	2015-08-06	21:03:00	18.42269	484.7094	19.93
MALACATE	2015-08-06	21:15:00	16.43899	400.732	19.68
MALACATE	2015-08-06	21:24:00	14.86291	338.6544	19.56
MALACATE	2015-08-06	21:30:01	14.43782	322.6347	19.56
MALACATE	2015-08-06	21:33:01	13.49192	288.1161	19.56
MALACATE	2015-08-06	21:39:00	12.69093	260.1228	19.56
MALACATE	2015-08-06	21:45:01	11.77865	229.6543	19.56
MALACATE	2015-08-06	22:03:00	10.15922	179.392	19.56
MALACATE	2015-08-06	22:18:00	9.52128	160.9786	19.43

Figura 4.23 Ejemplo de datos recuperados por el sistema de telemetría

4.3.3 DUO

Se realizaron pruebas de funcionamiento para el equipo de medición DUO el cual tiene la finalidad de poder medir el gasto que transporta un canal a descarga libre y ahogada; en la siguiente figura se muestra un esquema de la instalación de los sensores.

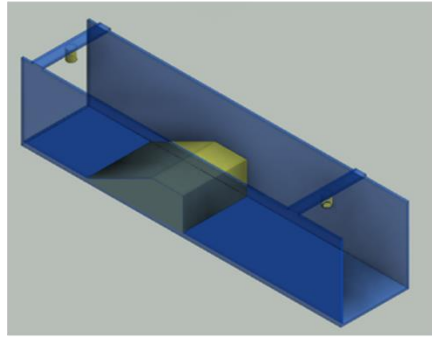


Figura 4.24 Esquema de AGL y sensores ultrasónicos

Para lograr esta versión del prototipo de estudiaron diversas ecuaciones, leyes y principios hidráulicos, como resultado de dicho estudio se programó y se hicieron las adecuaciones necesarias para poder hacer a las pruebas en el laboratorio. En las siguientes fotografías se ilustra dicha prueba, la cual consistió en evaluar el equipo de medición comparándolo con un medidor de tiempo de tránsito (Rittmeyer). La prueba se inició con un gasto pequeño y se fue elevando para comprobar que el equipo midiera en condiciones de descarga libre.

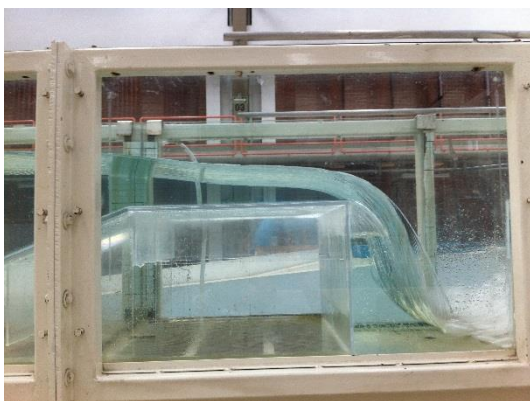




Figura 4.25 Fotos de pruebas realizadas

El canal en el que se hicieron las pruebas cuenta con una compuerta al final, la cual permite elevar el tirante de aguas abajo hacia aguas arriba, permitiendo tener condiciones de ahogamiento para la estructura de medición (AGL). Bajo estas condiciones de ahogamiento se hicieron varias pruebas las cuales también fueron comparadas con el medidor de tiempo de tránsito, y se obtuvieron mediciones muy similares.



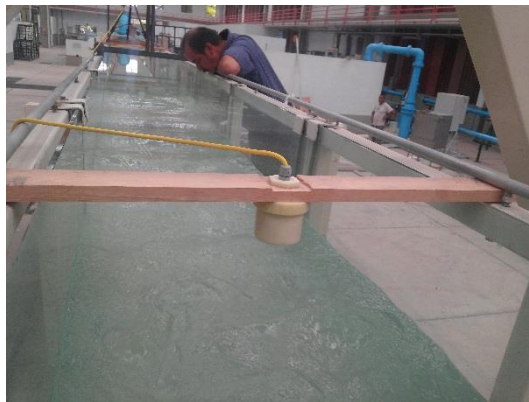


Figura 4.26 Fotos de pruebas realizadas

En las pruebas de funcionamiento que se realizaron al equipo de medición DUO se observó que, al tender a condiciones de ahogamiento, se presenta un salto hidráulico ondulante, y bajo estas condiciones es difícil medir con exactitud el tirante aguas abajo.

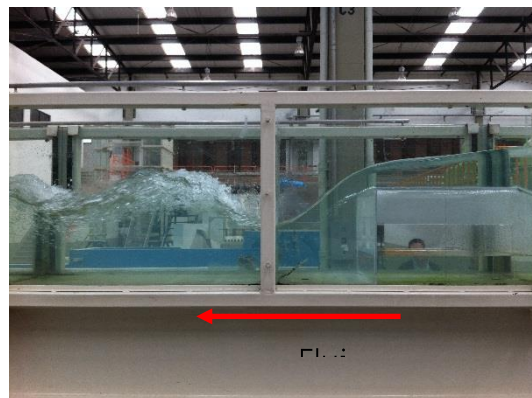
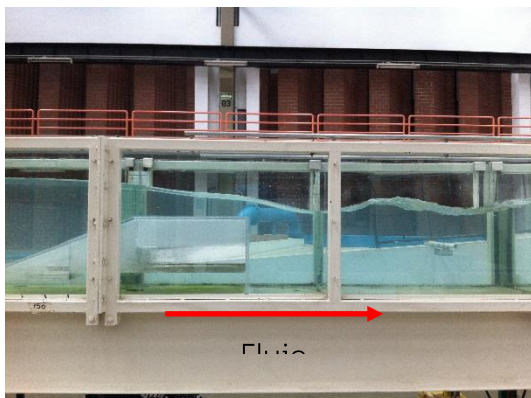


Figura 4.27 Turbulencia generada por salto hidráulico

Para resolver esto se estudiaron diferentes tipos de filtros digitales como filtros de paso bajo, paso alto, paso banda, FIR (filtro de respuesta finita) y IIR (respuesta impulso infinita) los cuales dejan pasar muestras que estén por encima, por debajo o dentro de un rango determinado. De estos se seleccionó el FIR, según el cual una muestra de la salida se puede definir como una combinación lineal de la entrada actual y pasada, y se expresa con la siguiente ecuación.

$$y[n] = a_0 \cdot x[n] + a_1 \cdot x[n - 1] + a_2 \cdot x[n - 2] + \dots + a_N \cdot x[n - N]$$

Este filtro solo se implementó para las muestras tomadas por el sensor colocado aguas debajo de la estructura, con lo que se notó una mejora sustantiva en el cálculo del gasto en condiciones de ahogamiento. Esta solución es aplicable para AGL ahogado y compuerta ahogada, equipos DUO y TRIO respectivamente.

En esta prueba se corroboró un punto descubierto en la parte de estudio, que el medidor tiene como limitante una pérdida de carga mínima de 2 cm, y esta también fue comprobada en la prueba realizada en el laboratorio. Las ecuaciones programadas en el equipo de medición para esta prueba se muestran a continuación.

Coefficiente de descarga libre:

$$C_d = \frac{1}{\sqrt{k_2 + k}} \cdot \frac{\mu^a \cdot \sqrt{1 - \mu}}{\sqrt{1 + \frac{k_1 \cdot \mu^{2a} \cdot c^2 \cdot y_1^2}{(k_2 + k) \cdot b^2}}}$$

Coefficiente de descarga ahogada:

$$C_d = \frac{\mu^{1.043} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{1.0105 \cdot y_3^{0.9789}}{y_1}\right)}}{\sqrt{k_2 + k} \cdot \sqrt{1 + \left[\left(2 \cdot \mu^{2.086} \cdot \frac{0.9789}{(k_2 + k)} \cdot \frac{y_1^{2.086}}{y_3^2} \cdot \frac{1.0105 \cdot y_3^{0.9789}}{y_3} \right) \cdot \left(1.5045 \cdot \frac{y_3}{y_1^{1.043}} + 1 \right) - \left(\frac{\mu^{2.086} \cdot y_1^{0.086} \cdot k_1}{(k_2 + k)} \right) \right]}}$$

El cambio de régimen se calcula con la siguiente expresión:

$$\left(\frac{1}{0.586 \cdot g} \cdot \frac{Q^2}{y_3} - \frac{0.586}{2} \cdot y_3^2 \right) \geq \left(\frac{1}{0.586 \cdot \mu^{1.043} \cdot g} \cdot \frac{Q^2}{y_1^{1.043}} + \frac{0.586 \cdot \mu^{2.043}}{2.043} \cdot y_1^{2.043} \right)$$

Y el gasto:

$$Q = Cd \cdot 0.586 \cdot y_1^{1.043} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot y_1}$$

4.3.4 Resultados de prueba de laboratorio

A continuación, se muestra un gráfico con los resultados de la prueba realizada, del cual la serie 1 representa la diferencia entre los puntos de medición aguas arriba y aguas abajo (escala derecha expresada en m), la serie 2 representa la media del equipo de tiempo de tránsito, la serie 3 representa el gasto del prototipo DUO, y la serie 4 representa la media del prototipo DUO (escala derecha expresada en lps).

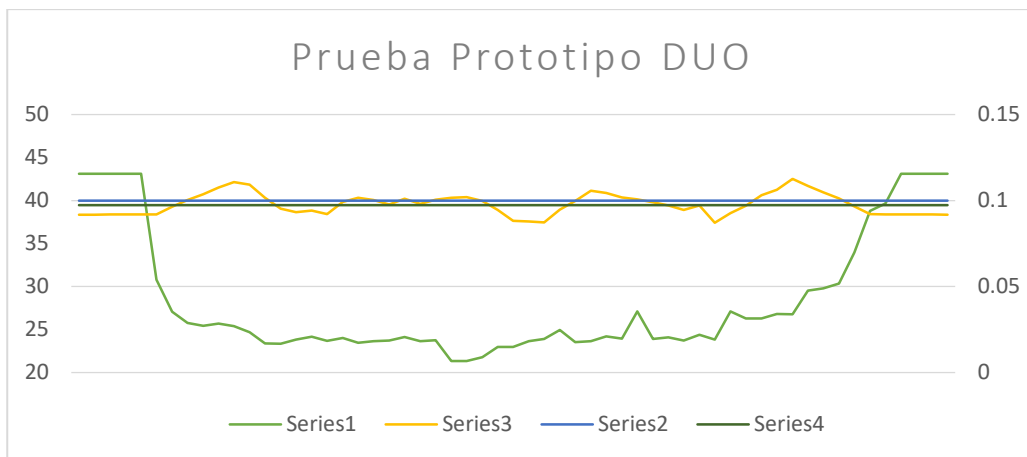


Figura 4.28 Prueba prototipo DUO

El siguiente gráfico compara los gastos medidos entre el equipo de tiempo de tránsito (Serie 3) contra el prototipo DUO (Serie 2), mientras que la Serie 1 representa la media del gasto medida por el equipo de tiempo de tránsito.

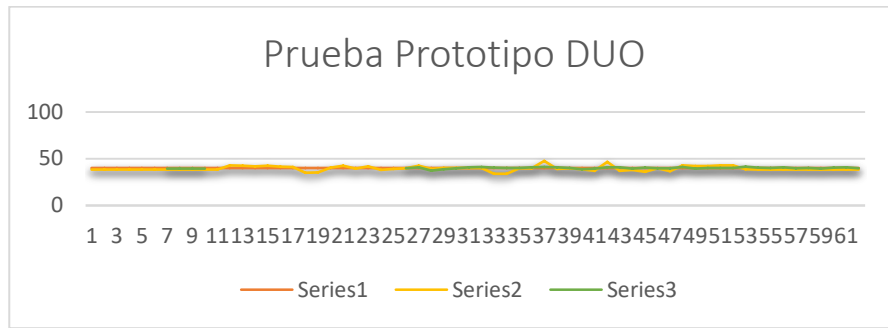


Figura 4.29 Prueba prototipo DUO

La siguiente grafica muestra que las lecturas del equipo de medición DUO están dentro del 10 % de error.

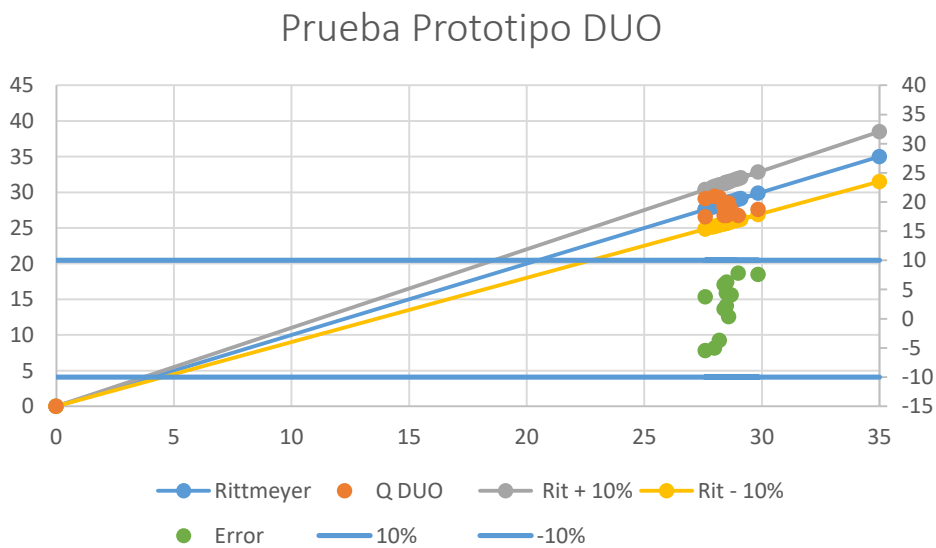


Figura 4.30 Prueba prototipo DUO

4.3.5 TRIO

Se emplean las siguientes figuras y fotografías para exponer los motivos sobre el diseño hidráulico de estructuras de medición donde se emplean los equipos TRIO.

4.3.5.1 Primera opción: caudal en régimen ahogado

Compuerta a descarga libre (figura parte superior) y ahogada (figura parte inferior) con objetivos de medición y control de gasto.

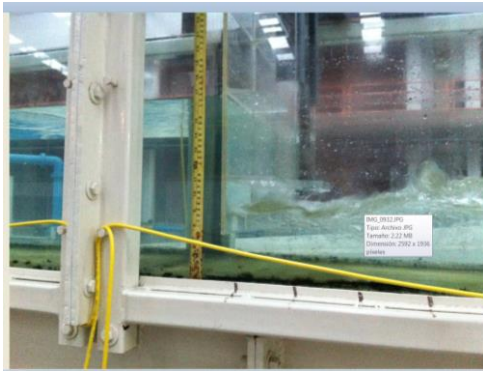


Figura 4.31 Pruebas experimentales descarga libre y ahogada

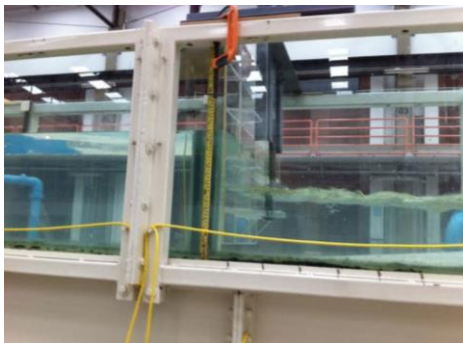


Figura 4.32 Pruebas experimentales descarga ahogada y libre

En la parte de experimentación, la compuerta deslizante fue hecha en acrílico con soportes de acero al carbón. Se observa que el cambio de régimen de descarga libre a ahogada tiene valores muy grandes en gasto libre, mientras a descarga ahogada, según la gráfica, se subestima el gasto con la ecuación de Ramíres (2014-2015). Se realiza un ajuste de los datos iniciales y se analizan los resultados. Los datos de ajuste de los parámetros de $(k_2 + k) = 1.062$ para descarga libre de $(k_2 + k) = 0.832$; los resultados del experimento aparecen en las siguientes gráficas. A descarga ahogada, los datos coinciden en dicho régimen en menos del 10 % en términos absolutos.

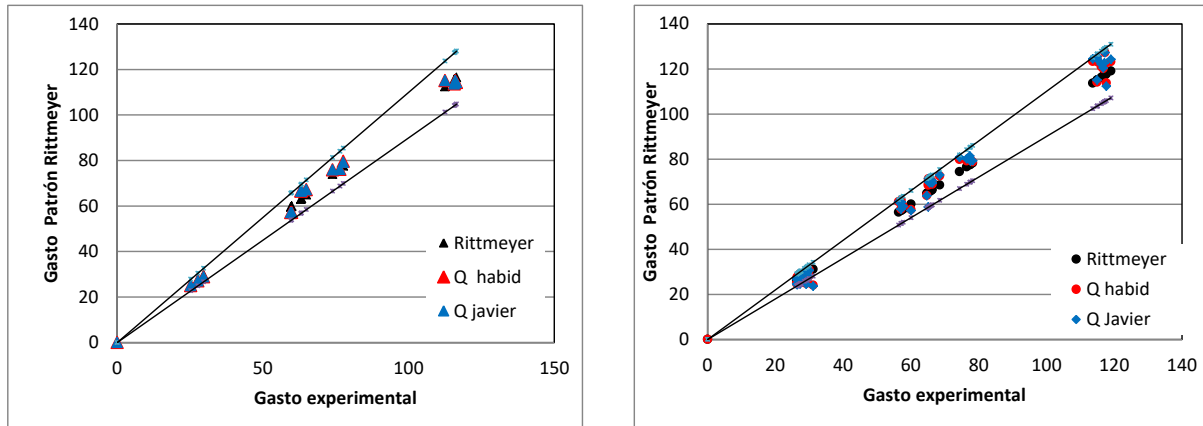


Figura 4.33 Valores experimentales

A descarga libre (izquierda) y ahogada (derecha). El error relativo porcentual a descarga libre es del 6.5 %, mientras que al exceptuar dos datos a descarga ahogada a muy bajo caudal como se observa en la imagen derecha, se tiene un error porcentual relativo de 9.7 %, inferior al 10 %. A bajo caudal, debido a que solo se tiene una trayectoria sumergida superficialmente en el canal con agua, se considera adecuado dejar dicho porcentaje como parte del error del patrón de medida

4.3.5.2 Diseño hidráulico

El tirante aguas arriba (y_1) de la compuerta está definido por la carga que se dispone en el canal y el tirante aguas abajo (y_2) está definido por la sección y el gasto que conducirá el canal, por ello solo es necesario definir el ancho y la abertura de la compuerta necesarios para el gasto de diseño, la ecuación que rige el gasto de una compuerta es la de un orificio:

$$Q = C_d b W \sqrt{2gy_1}$$

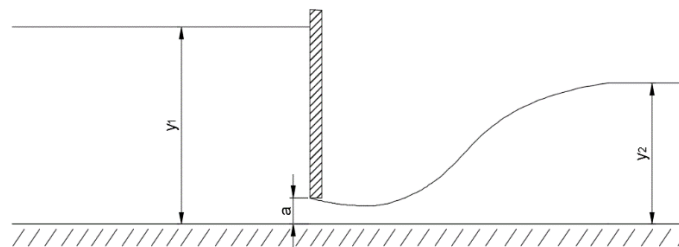


Figura 4.34 diagrama conceptual de una compuerta

Los tirantes y_1 y y_2 fueron obtenidos del levantamiento topográfico y el coeficiente se obtuvo con alguna de las ecuaciones ya existentes para compuertas, por ello solo es necesario obtener W y b a través de iteraciones, para ello primero se debe saber si la compuerta trabajara a descarga ahogada o a descarga libre, esto se concluye cuando $\frac{y^3}{W} \geq C$, para esto se hizo una plantilla de cálculo para cada canal donde se desea colocar el aforador, en seguida se muestra tal plantilla de cálculo.

Tabla 4.1 Ejemplo de cambio de régimen

Tirante aguas arriba (m)	Apertura de la compuerta (m)	Tirante aguas abajo (m)	Coefficiente de descarga (adimensional)	y^3/W (adimensional)	Conclusión
0.43	0.2	0.27	1.68	1.35	Libre

Se calcularon a través de tanteos la apertura y el ancho de la compuerta, necesarios para que pase el gasto máximo de diseño, con el tirante mínimo ya que es la condición más crítica.

Tabla 4.2 Ejemplo de plantilla de cálculo para descarga libre

Condición del gasto	Ancho de la compuerta (m)	Tirante aguas arriba (m)	Apertura de la compuerta (m)	Coefficiente de descarga (adimensional)	Gasto de la compuerta (l/s)
125	0.8	0.43	0.2	0.52	242.53
250	0.8	0.73	0.2	0.55	332.00

Como se muestra en el ejemplo para el tirante mínimo pasan casi los 250 lps que es el gasto máximo de diseño para esta compuerta. Como se dijo antes, esta es la condición crítica que se puede presentar en el campo. Todas las compuertas resultaron ser libres y a continuación se muestran las medidas de cada una de ellas (en cm).

Tabla 4.3 Dimensiones de estructuras de medición

Núm.	Ancho (B)	Altura (H)	Altura medidor (L)
1	80	90	40.00
2	60	90	45.00
3	60	90	40.00

Núm.	Ancho (B)	Altura (H)	Altura medidor (L)
4	80	90	45.00
5	90	90	40.00
6	70	90	45.00
7	70	90	45.00
8	80	90	35.00
9	60	85	60.00
10	60	85	50.00
11	80	65	40.00
12	90	60	45.00
13	60	90	50.00
14	60	110	75.00

Las estructuras serán construidas de ladrillo o tabique de acuerdo con la disponibilidad del material en el lugar, con una plantilla de concreto de 7 cm de grosor, reforzada con malla electro soldada. Las columnas y cadenas serán de concreto de $f'c=170 \text{ kg/cm}^2$ con armex de acero A36 de $f_y=2530 \text{ kg/cm}^2$. Los registros contarán con una profundidad de 5 cm respecto a la plantilla del canal para acumular azolve, así como la disponibilidad de 3 tubos de pvc de 4", 2" y 2" respectivamente, comenzando con el primero al nivel de la plantilla del canal.

El registro contará con un ángulo de 2" para sostener al sensor que mide el tirante aguas abajo, la altura de este con respecto a la plantilla del canal se presenta en el cuadro de medidas denotado con la letra "L". La compuerta se fabrica de acuerdo a las dimensiones que se presentan en el cuadro de medidas. Para un mayor entendimiento de lo mencionado arriba, se presenta un plano tipo.

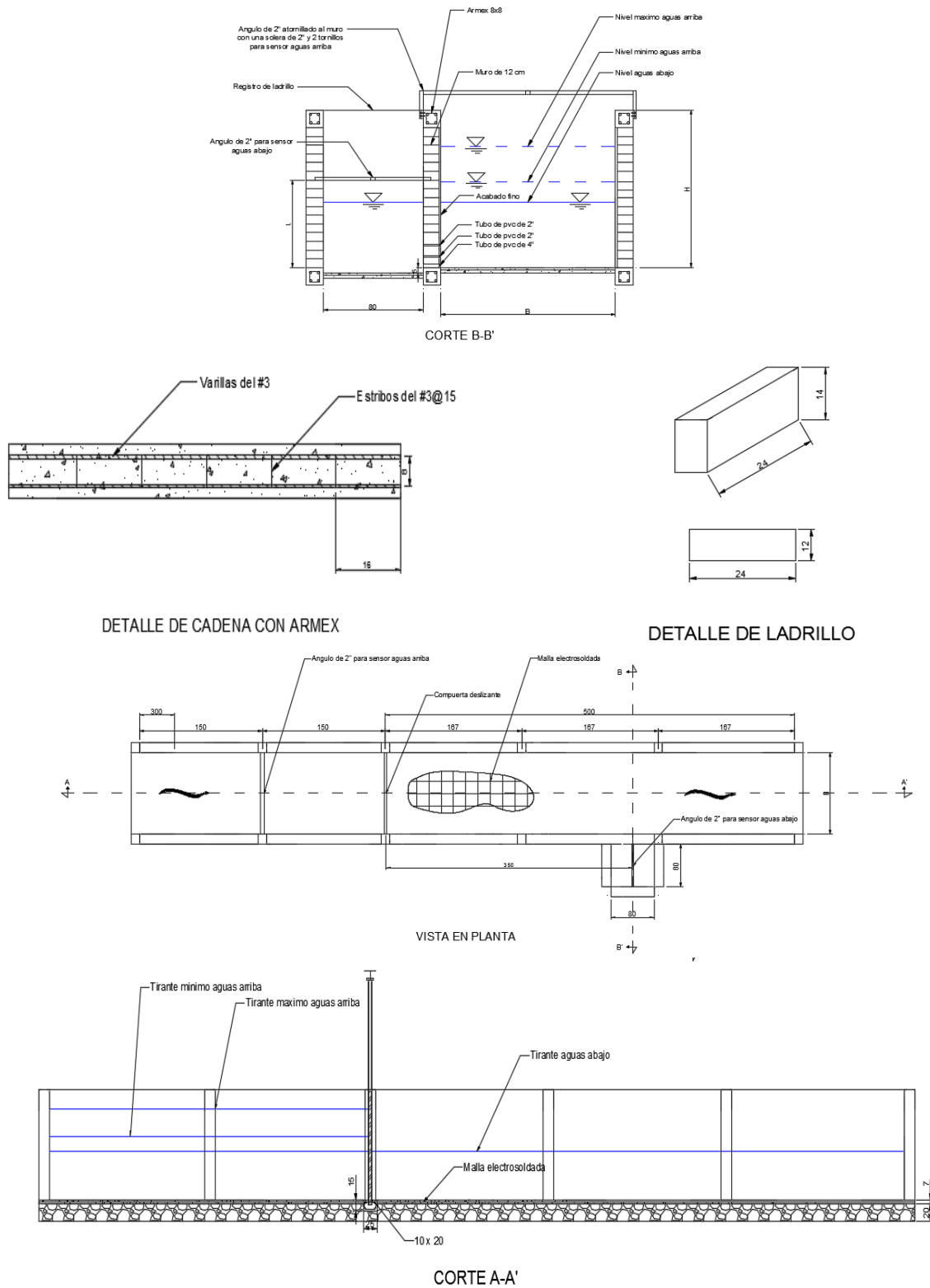


Figura 4.35 Dibujos de la compuerta

Los materiales de los que estará compuesta la compuerta serán de acero al carbón 5/16. Enseguida se muestra una compuerta deslizante, con una placa que servirá para que el sensor mida la apertura de la compuerta.

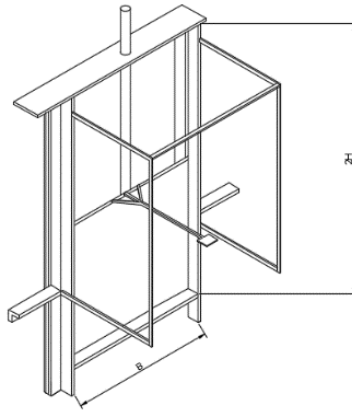


Figura 4.36 Diseño de la compuerta

4.3.5.3 Prototipo de diseño de compuerta para equipos de medición TRIO

La siguiente figura hace referencia a cómo se diseña una compuerta con fines de medición; el equipo asociado a la primera opción es el TRIO.

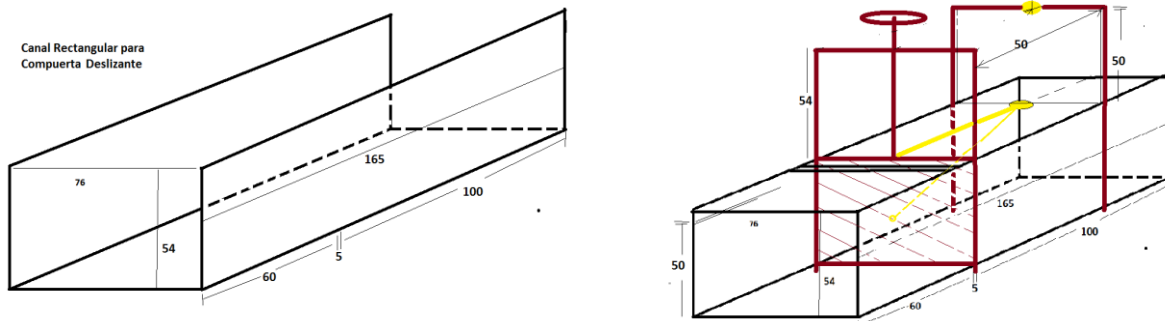


Figura 4.37 Prototipo de compuerta

Se trabaja para resolver la entrega por volumen en las áreas muy planas con escasa carga hidráulica. Eventualmente la compuerta limita las ondas estacionarias generadas por el viento en el flujo de un aforador.

4.3.6 Elaboración de estructuras de medición de caudal en condiciones de régimen mixto

Para comenzar a construir las estructuras de medición se trazaron con estacas e hilo las medidas de cada una de ellas. Una vez con el trazo de las estructuras, así como su localización y orientación, se comenzaron a escavar las estructuras a 27 cm. Ya que se tuvo lista la excavación, se colocó la grava y arena para formar una plantilla uniforme con espesor de 20 cm.



Figura 4.38 Trazo de estructuras con estacas e hilos, excavación de zanjas y colocación de la plantilla de grava y arena apisonada

Después de que se pusieron la grava y arena se colocó la malla electrosoldada para posteriormente verter el concreto.

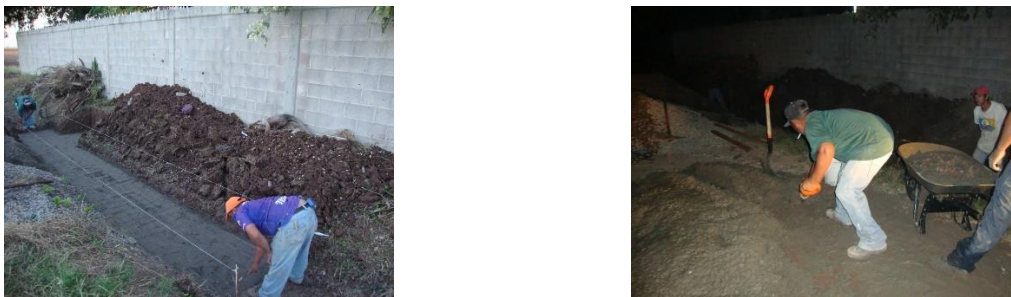


Figura 4.39 Colocación de malla electro soldada y colocación de concreto

Una vez teniendo la plantilla de concreto se colocaron los armex para formar las columnas y cadenas, con el fin de tener una estructura más resistente.

Estructura 1

Ubicación:

Geográfica		UTM			Altura	
Norte:	25° 49.558'	Este:	0711012	Zona:	12	15 msnm
Oeste:	108° 53.694'	Norte:	2858100	Letra:	R	

Progreso de la construcción:

- Compuerta instalada
- Acabado final completo
- Área de sensores completa
- Pruebas de medición completas

Su construcción se encuentra completa y en espera de riego

**Estructura 2**

Ubicación:

Geográfica		UTM			Altura	
Norte:	25° 49.393'	Este:	0711333	Zona:	12	12 msnm
Oeste:	108° 53.505'	Norte:	2857801	Letra:	R	

Progreso de la construcción:

- Compuerta instalada
- Acabado final completo
- Área de sensores completa
- Pruebas de medición completas

Su construcción se encuentra completa y en espera de riego



Estructura 3

Ubicación:

Geográfica		UTM			Altura	
Norte:	25° 49.203'	Este:	0711690	Zona:	12	13 msnm
Oeste:	108° 53.295'	Norte:	2857455	Letra:	R	

Progreso de la construcción:

- Compuerta instalada
- Acabado final completo
- Área de sensores completa
- Pruebas de medición completas

Su construcción se encuentra completa y en espera de riego

**Estructura 4**

Ubicación:

Geográfica		UTM			Altura	
Norte:	25° 48.834'	Este:	0712435	Zona:	12	15 msnm
Oeste:	108° 52.855'	Norte:	2856785	Letra:	R	

Progreso de la construcción:

- Compuerta instalada
- Acabado final completo
- Área de sensores completa
- Pruebas de medición completas

Su construcción se encuentra completa y en espera de riego



Estructura 5

Ubicación:

Geográfica		UTM			Altura	
Norte:	25° 48.346'	Este:	0712002	Zona:	12	12 msnm
Oeste:	108° 53.123'	Norte:	2855877	Letra:	R	

Progreso de la construcción:

- Compuerta instalada
- Acabado final completo
- Área de sensores completa
- Pruebas de medición completas

Su construcción se encuentra completa y en espera de riego

**Estructura 6**

Ubicación:

Geográfica		UTM			Altura	
Norte:	25° 47.872	Este:	0711552	Zona:	12	14 msnm
Oeste:	108° 53.401	Norte:	2854995	Letra:	R	

Progreso de la construcción:

- Compuerta instalada
- Acabado final completo
- Área de sensores completa
- Pruebas de medición completas

Su construcción se encuentra completa y en espera de riego



Estructura 7

Ubicación:

Geográfica		UTM			Altura	
Norte:	25° 49.096'	Este:	0710507	Zona:	12	15 msnm
Oeste:	108° 54.005'	Norte:	2857238	Letra:	R	

Progreso de la construcción:

- Compuerta instalada
- Acabado final completo
- Área de sensores completa
- Pruebas de medición completas

Su construcción se encuentra completa y en espera de riego

**Estructura 8**

Ubicación:

Geográfica		UTM			Altura	
Norte:	25° 48.622'	Este:	0710074	Zona:	12	17 msnm
Oeste:	108° 54.272'	Norte:	2856356	Letra:	R	

Progreso de la construcción:

- Compuerta instalada
- Acabado final completo
- Área de sensores completa
- Pruebas de medición completas

Su construcción se encuentra completa y en espera de riego



Estructura 9

Ubicación:

Geográfica

UTM

Altura

Norte:

Este:

Zona:

Oeste:

Norte:

Letra:

Progreso de la construcción:

- Compuerta instalada
- Acabado final completo
- Área de sensores completa
- Pruebas de medición completas

Su construcción se encuentra completa y en espera de riego

**Estructura 10**

Ubicación:

Geográfica

UTM

Altura

Norte:

Este:

Zona:

Oeste:

Norte:

Letra:

Progreso de la construcción:

- Compuerta instalada
- Acabado final completo
- Área de sensores completa
- Pruebas de medición completas

Su construcción se encuentra completa y en espera de riego



Estructura 11

Ubicación:

Geográfica	UTM		Altura
Norte:	Este:	Zona:	
Oeste:	Norte:	Letra:	

Progreso de la construcción:

- Compuerta instalada
- Acabado final completo
- Área de sensores completa
- Pruebas de medición completas

Su construcción se encuentra completa y en espera de riego

**Estructura 12**

Ubicación:

Geográfica	UTM		Altura
Norte:	Este:	Zona:	
Oeste:	Norte:	Letra:	

Progreso de la construcción:

- Compuerta instalada
- Acabado final completo
- Área de sensores completa
- Pruebas de medición completas
- Su construcción se encuentra completa y en espera de riego



Estructura 13

Ubicación:

Geográfica	UTM	Altura
Norte:	Este:	Zona:
Oeste:	Norte:	Letra:

Progreso de la construcción:

- Compuerta instalada
- Acabado final completo
- Área de sensores completa
- Pruebas de medición completas

Su construcción se encuentra completa y en espera de riego

**Estructura 14**

Ubicación:

Geográfica	UTM	Altura
Norte:	Este:	Zona:
Oeste:	Norte:	Letra:

Progreso de la construcción:

- Compuerta instalada
- Acabado final completo
- Área de sensores completa
- Pruebas de medición completas

Su construcción se encuentra completa y en espera de riego



4.3.7 Instalación y calibración de 14 equipos de medición de caudal en las estructuras de medición

Se realizó la toma de medidas y niveles para un óptimo funcionamiento de los sistemas de medición en cada una de las estructuras.



Figura 4.40 Toma de medidas para corroborar la calibración de equipo de medición

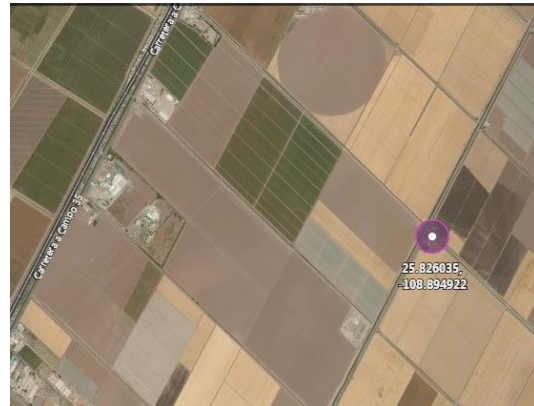
Se realizó el aforo con molinete en los canales de riego para obtener el gasto y comparar con el gasto obtenido a través de la ecuación de la compuerta de medición.



Figura 4.41 Aforo con molinete para obtención de gasto y parámetros de configuración de riego y de estructura de medición

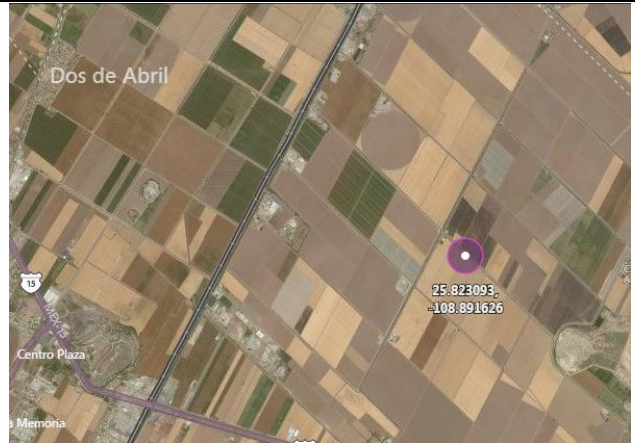
4.3.8 Instalación y ubicación de equipos de medición en campo

Estructura 1 (043001). Latitud, Longitud: 25.826035, -108.894922

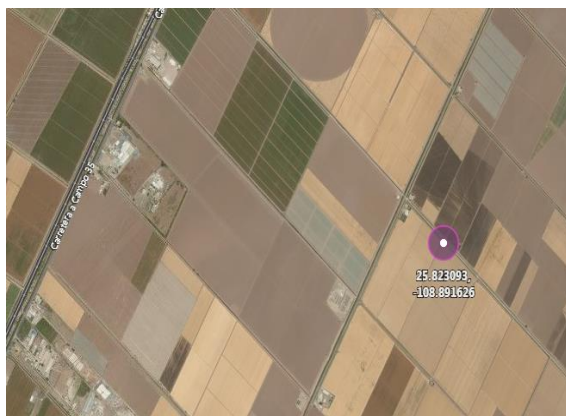


Estructura 2 (043002). Latitud, Longitud: 25.823093, -108.891626





Estructura 3 (043003). Latitud, Longitud: 25.823093, -108.891626

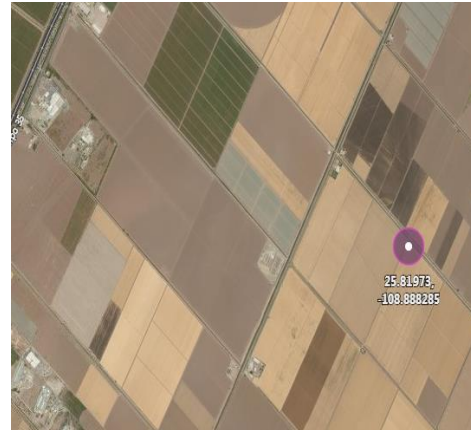


Estructura 4 (043004). Latitud, Longitud: 25.820051, -108.888327

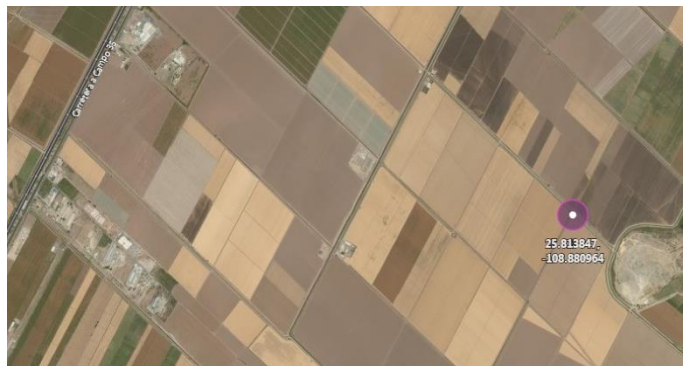


Estructura 5 (043005). Latitud, Longitud: 25.81973, -108.888285

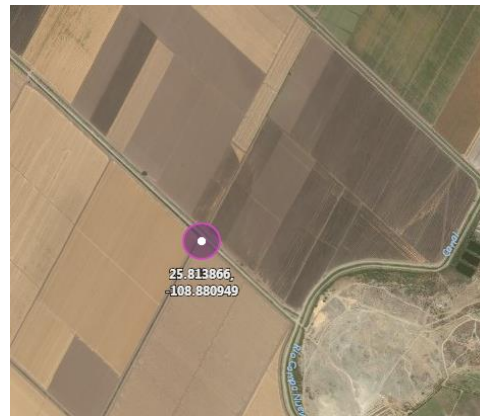




Estructura 6 (043006). Latitud, Longitud: 25.813847, -108.880964

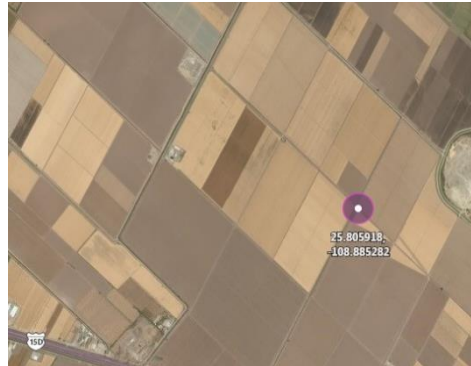


Estructura 7 (043007). Latitud, Longitud: 25.813866, -108.880949

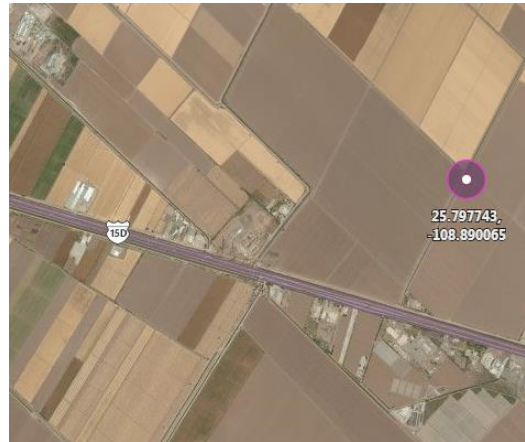


Estructura 8 (043008). Latitud, Longitud: 25.805918, -108.885282





Estructura 9 (043009). Latitud, Longitud: 25.797743, -108.890065

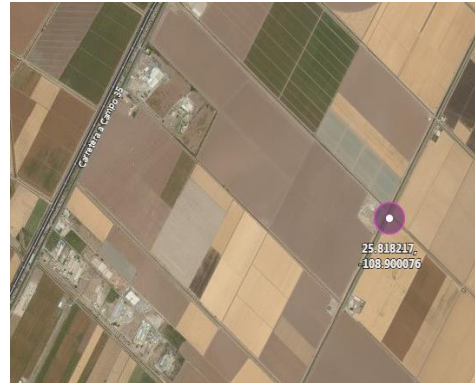


Estructura 10 (043010). Latitud, Longitud: 25.797831, -108.890059

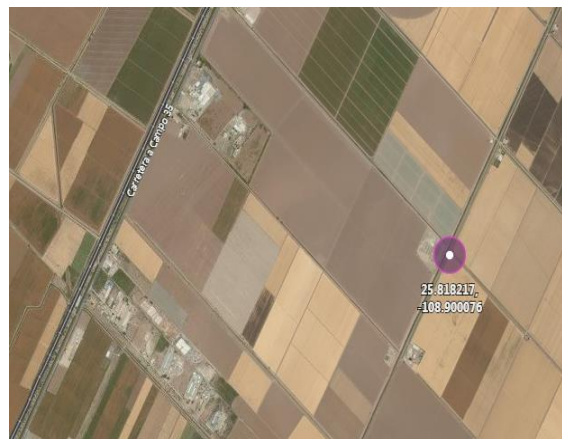


Estructura 11 (0430011). Latitud, Longitud: 25.818217, -108.900076

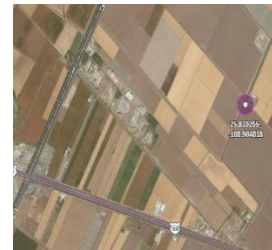




Estructura 12 (0430012). Latitud, Longitud: 25.818217, -108.900076



Estructura 13 (043013). Latitud, Longitud: 25.810265, -108.904818



Estructura 14 (No. Sistema 04301.4). Latitud, Longitud: 25.810142, -108.904322



Una vez instalados los equipos de medición en campo se procedió a realizar pruebas de funcionamiento y envío de información en campo.

4.3.9 Pruebas de envío de información equipos de medición de caudal instalados en campo

Se realizaron pruebas de medición en campo durante los riegos en las parcelas del módulo Sata Rosa como se muestra en las siguientes imágenes:



Figura 4.42 Puesta en marcha de equipo de medición para pruebas de envío de información



Figura 4.43 Información obtenida en campo a través de los equipos de medición de caudal



Figura 4.44 Recepción de información y archivo txt con información obtenida en campo a través de los equipos de medición de caudal

4.3.10 Alta de medidores en el sistema ICAM Riego

Fue necesario dar de alta en el sistema ICAM- Riego los medidores instalados para poder recibir la información obtenida en campo. En el sistema ICAM-Riego se capturan los parámetros para identificar las ecuaciones de gasto para determinar el volumen del servicio.

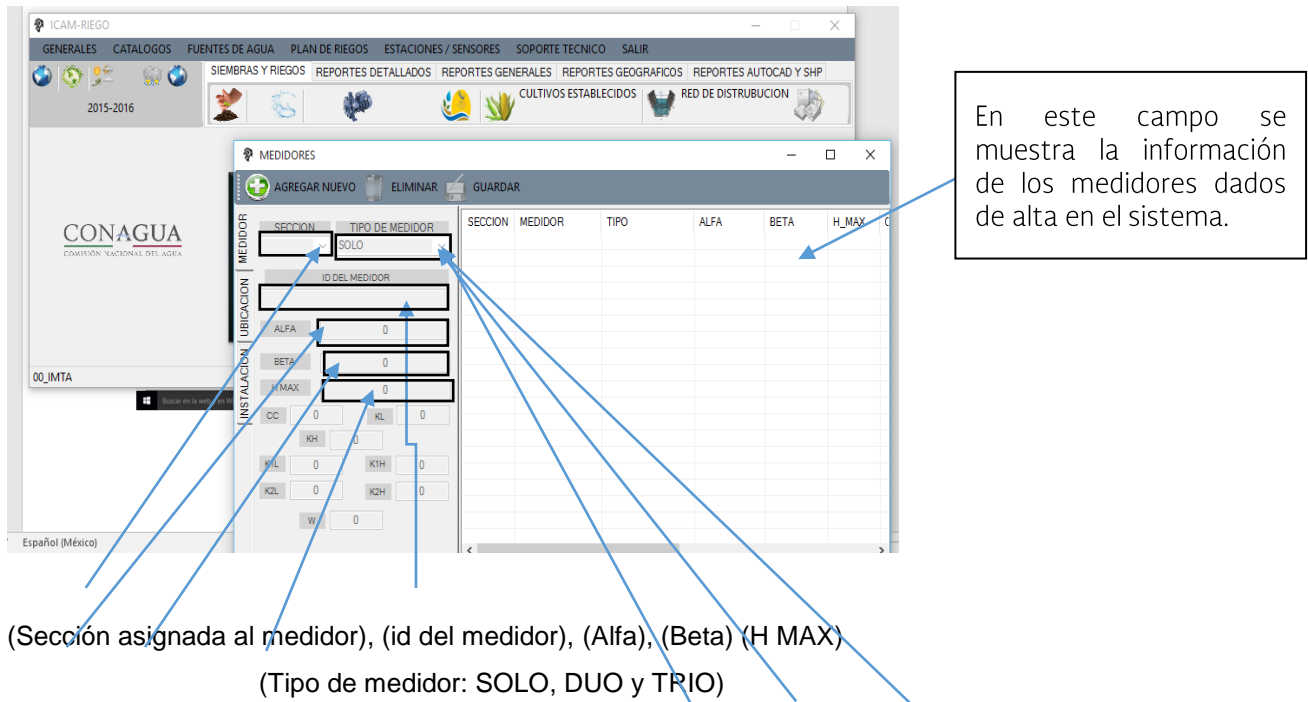


Figura 4.45 Formulario para dar de alta medidores en el sistema ICAM-RIEGO

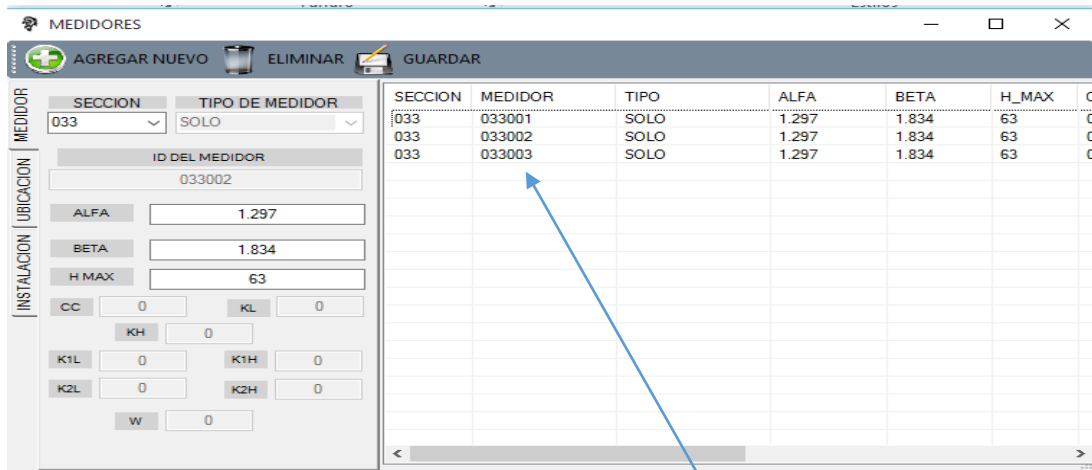


Figura 4.46 Base de datos de los medidores dados de alta

A continuación se muestran impresiones de pantalla para la captura y consulta de información correspondiente a la instalación, ubicación y descripción de cada medidor instalado en campo.

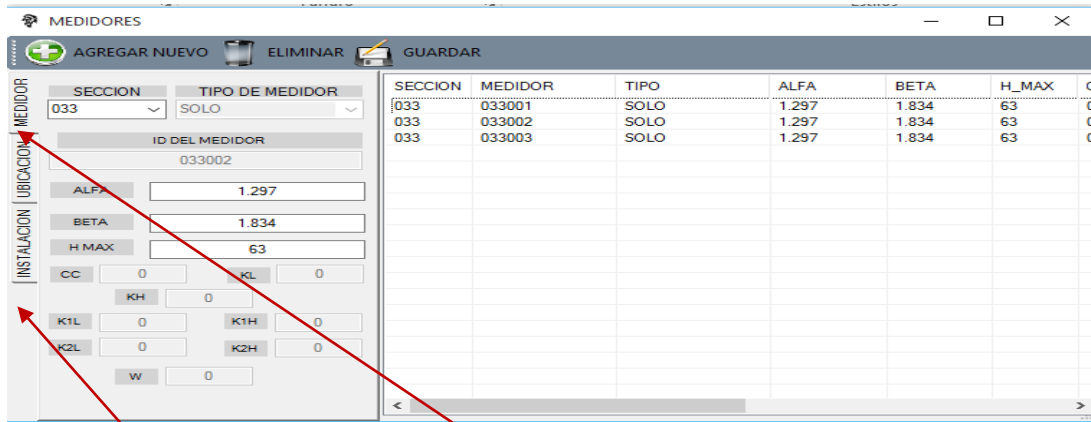


Figura 4.47 Pantalla que muestra los medidores dados de alta por sección

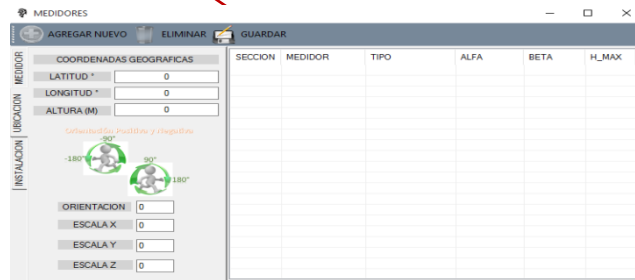


Figura 4.48 En la sección de Ubicación podemos consultar la ubicación de los medidores

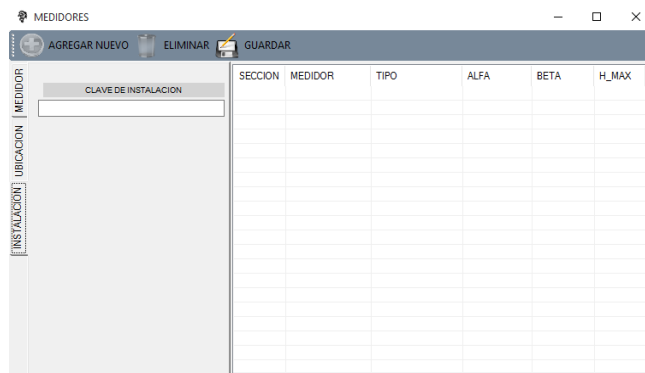


Figura 4.49 En la sección de instalación se pueden consultar, eliminar y agregar medidores de medición de caudal

4.3.11 Alta de riegos

Este módulo nos permite asignar parcelas a los medidores y programar riegos.

Para poder dar de alta los riegos debemos capturar la siguiente información:

- Parcela o producto
- Cultivo
- Superficie de riego
- Fecha de inicio del riego
- Fecha final del riego, etc.

Una vez capturados los datos para la programación del riego se desplegará el resultado de la información necesaria para que el sistema almacene la información proporcionada.

Figura 4.50 Captura de información para programación de riegos

FECHA INICIO	No. ESTRUCTURA	CLAVE DE INSTALACION	PARCELA	No. RIEGO	AÑO AGRICOLA	FECHA FINAL	No. MEDIDOR
09/12/2015 0...	033002	2033	11298-0	1	2015-2016	12/12/2015...	0002
09/12/2015 0...	033003	2033	11292-0	1	2015-2016	14/12/2015...	0003
09/12/2015 0...	033001	2033	11299-0	1	2015-2016	18/12/2015...	0001

En este módulo se busca la parcela a programar. Se agregan nuevos registros de cada estructura, y se le asigna una clave, el número de parcela, el año agrícola fecha inicial y fecha final

Figura 4.51 Captura de información para programación de riegos

Se muestra la composición de cómo fue estructurado el sistema y ya después se pondrá en ejecución el sistema



Figura 4.52 Captura de apagado

Se muestra la aplicación de la recepción del mensaje enviado por el telit al sistema ICAM-Riego y se reenvía la información directo al servidor del módulo Santa Rosa. Se muestra la aplicación del dispositivo de recepción de información.

Se muestra la información de la base de datos del servidor

La aplicación muestra los datos recibidos del equipo de medición instalado en campo

Sistema de medición en ejecución.

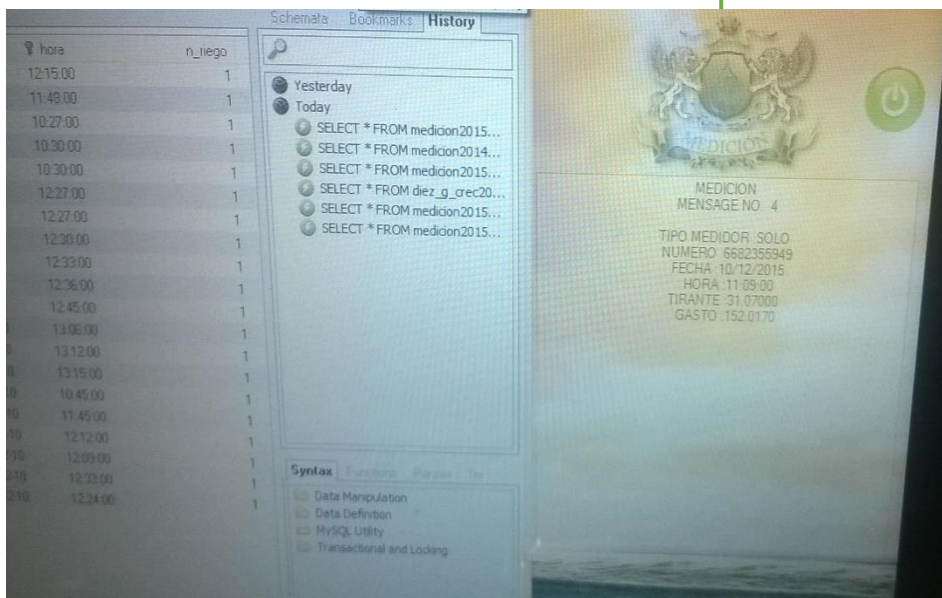


Figura 4.53 Captura de información

Se asignan los datos que solicita el sistema y automáticamente va almacenando la información de los medidores las 24 horas del día.

4.3.12 Envío de información al sistema ICAM-Riego de los equipos de medición de caudal

Se llevó a cabo el monitoreo del sistema de riego para comprobar la recepción de la información enviada por los medidores.



Figura 4.54 Pantalla del sistema de medición en funcionamiento

Se muestra la información obtenida de los medidores los cuales corresponden a:

- Tipo de medidor
- Identificador único del medidor
- Fecha de envío de datos
- Hora de envío de datos
- Tirante enviado por el medidor
- Gasto actual

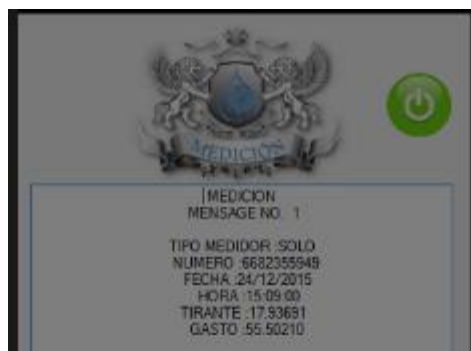


Figura 4.55 Pantalla del sistema de medición en funcionamiento

Se muestra un listado de la información obtenida de los medidores y almacenada en la base de datos



The image shows a screenshot of a data table with 12 rows and 6 columns. The columns represent different data points for each measurement. The data is as follows:

033002	033000016	2015-12-24	14:39:00		3
033002	033000016	2015-12-24	14:42:00		3
033002	033000016	2015-12-24	14:45:00		3
033002	033000016	2015-12-24	14:48:00		3
033002	033000016	2015-12-24	14:51:00		3
033002	033000016	2015-12-24	14:54:00		3
033002	033000016	2015-12-24	14:57:00		3
033002	033000016	2015-12-24	15:03:00		3
033002	033000016	2015-12-24	15:06:00		3
033002	033000016	2015-12-24	15:09:00		3
033002	033000016	2015-12-24	15:12:00		3

Figura 4.56 Datos proporcionados por un medidor instalado de tipo SOLO

Referencias



CAPÍTULO 5

REFERENCIAS

Habibzadeh, A., Vatankhah, A.R. y Rajaratnam, N., (2011). Role of energy loss on discharge characteristics of sluice gates. *Journal of Hydraulic Engineering*, 137(9), pp. 1079-1084.

Albertson, M.L., Dai, Y.B. y Jensen, R.A., (1950). Diffusion of submerged jets. *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, 115(1), pp. 687-694.

Rajaratnam, N. y Subramanya, K., (1967). Flow immediately below a submerged sluice gate. *Journal of the Hydraulics Division*, 93(4), pp. 57-77.

Swamee, P.K., (1992). Sluice-gate discharge equations. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, 118(1), pp. 56-60.



www.gob.mx/imta