

01162



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA

**RESISTENCIA AL FLUJO EN  
ESCURRIMIENTOS TURBULENTOS  
COMPLETAMENTE DESARROLLADOS  
CONDUCIDOS POR CANALES ABIERTOS**

**T E S I S**

PRESENTADA COMO REQUISITO PARA OBTENER EL GRADO DE

**MAESTRO EN INGENIERÍA HIDRÁULICA**

ALFREDO RANULFO OCÓN GUTIÉRREZ



DIRECTOR DE TESIS

DR. ÁLVARO A. ALDAMA RODRÍGUEZ

CAMPUS MORELOS, MÉXICO, 2005

m.345639

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el contenido de mi trabajo recepcional.

NOMBRE: Alfredo Ranulfo  
Ocón Gutiérrez

FECHA: 17 junio 2005

FIRMA: A. Ranulfo Ocón

*A mi esposa Margarita, por su apoyo y comprensión en todo momento.*

*A mis hermanos y en especial a mi madre, fuente de inspiración y de lucha.*

*Todo mi agradecimiento al Dr. Álvaro A. Aldama Rodríguez, quien con paciencia y gran sabiduría ha guiado el desarrollo de este trabajo.*

*Al Dr. Aldo I. Ramírez Orozco, por sus acertados comentarios y quien en todo momento me ha brindado su apoyo para la culminación de este trabajo.*

*A los doctores Nahun Hamed García Villanueva, Fco. Javier Aparicio Mijares y Ariosto Aguilar Chávez por fungir como revisores de este trabajo.*

*A los doctores Arturo Palacio y Alejandro Rodríguez y al M.I. José Alfredo González Verdugo por su apoyo para la culminación de este trabajo.*

*Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología y al Instituto Mexicano de Tecnología del Agua por el apoyo recibido durante mis estudios.*

# Índice

I.- Introducción	1
I.1 Tipos de flujo y su clasificación	4
I.2 Teoría de capa límite	8
I.2.1 Espesor de la capa límite	10
I.2.2 Comportamiento de las fronteras y perfiles de velocidad	12
I.3 Flujo uniforme	17
I.3.1 Ecuación de Chézy	17
I.3.2 Ecuación de Darcy-Weisbach	20
I.3.3 Ecuación de Manning	24
I.4 Comparación de las ecuaciones de flujo uniforme	25
I.5 Objetivo del trabajo	26
I.6 Descripción del contenido del trabajo	28
II.- Revisión bibliográfica	31
II.1 Ecuaciones del factor de fricción $f$	33
II.1.1 Flujo laminar	33
II.1.2 Flujo turbulento	34
II.1.2.1 Flujo hidráulicamente liso	34
II.1.2.2 Flujo hidráulicamente rugoso	45
II.1.2.3 Flujo en transición	49
II.2 Resumen histórico de las fórmulas de resistencia al flujo en canales	50
III.- Tratamiento analítico de los casos de canales circulares y canales anchos	59
III.1. El factor de fricción $f$ en conductos circulares	61
III.1.1 Conductos circulares con tirante igual a la mitad del diámetro	66

III.2 El factor de fricción $f$ para canales rectangulares anchos	67
III.3 Análisis de resultados	71
IV.- Modelación numérica del flujo en canales trapeciales	75
IV.1 Canal de sección trapecial	77
IV.2 Ecuación de Darcy-Weisbach	78
IV.3 Ecuaciones de Reynolds	79
IV.4 Flujo uniforme y aproximación de capa rígida	80
IV.5 Tensor de esfuerzos	82
IV.6 Condiciones de frontera	83
IV.7 Ecuaciones de movimiento y condiciones de frontera	89
IV.8 Modelo de cerradura y ecuaciones para $k$ y $\varepsilon$	91
IV.9 Condiciones de frontera para $k$ y $\varepsilon$	92
IV.10 Modelación numérica	94
IV.11 Resultados para canal ancho	97
IV.12 Resultados para canal trapecial	101
V.- Fórmula universal de resistencia al flujo en canales trapeciales	107
V.1 Ejemplo de aplicación	116
VI.- Conclusiones y recomendaciones	121
VI.1 Límites de aplicabilidad de la fórmula de Manning	119
VI.2 Ventajas de la fórmula de Darcy-Weisbach contra la fórmula de Manning	126
VI.3 Conclusiones finales	128
VI.4 Recomendaciones	129
VII.- Referencias bibliográficas	131
VIII.- Notación	139

## Índice de figuras

Figura 1.- Secciones transversales y sus características geométricas	3
Figura 2.- Clasificación de flujos	5
Figura 3.- Desarrollo de la capa límite en un canal abierto	9
Figura 4.- Rugosidad en las fronteras	12
Figura 5.- Comportamiento del factor $B$ para flujos turbulentos	16
Figura 6.- Flujo uniforme (volumen de control)	17
Figura 7.- Sección circular considerada para el cálculo de la velocidad media	34
Figura 8.- Sección rectangular de ancho unitario	37
Figura 9.- Sección circular donde se considera la subcapa viscosa	41
Figura 10.- Comparación de los valores de $f$ para conducto circular	65
Figura 11.- Comparación de los valores de $f$ para conducto circular (III.13) y canal ancho (III.14)	72
Figura 12.- Canal trapecial para simulación numérica	77
Figura 13.- Componentes del tensor de esfuerzos	82
Figura 14.- Esfuerzo actuante sobre una superficie	83
Figura 15.- Esfuerzos actuantes sobre las paredes sólidas	83
Figura 16.- Esfuerzos actuantes sobre la superficie libre	84
Figura 17.- Esfuerzos actuantes normales	84
Figura 18.- Dominio a resolver en el modelo numérico	89
Figura 19.- Comparación de los valores de $f$ para los resultados del modelo numérico y la solución analítica para canal ancho	99

Figura 20.- Comparación de los perfiles de velocidad generados por el modelo numérico y la ley universal de distribución de velocidades de Prandtl-von Kármán para la zona de capa límite turbulenta	101
Figura 21.- Comparación de los valores de $f$ para los resultados del modelo numérico en sus diferentes secciones y la solución analítica para canal ancho	104
Figura 22.- Comparación de los valores de $f$ para los resultados del modelo numérico sin incluir el caso del canal ancho	105
Figura 23.- Curvas para $f$ obtenidas a partir de los ajustes	115
Figura 24.- Curvas para $f$ obtenidas a partir de los resultados del modelo numérico y la curva para $f$ del ajuste seleccionado	116
Figura 25.- Ajuste de potencia para el factor $f$	123

## Índice de tablas

Tabla 1.- Coeficientes de la fórmula de $f$ para canales anchos	55
Tabla 2.- Valores de $\left(\frac{k_s}{h}\right)$ que explican la dispersión de $a$ y $b$	70
Tabla 3.- Valores de rugosidad reportados por Nikuradse	96
Tabla 4.- Datos para el modelo numérico para el caso de canal ancho	98
Tabla 5.- Perfiles de velocidad para el caso de canal ancho	100
Tabla 6.- Datos utilizados en las simulaciones numéricas	102
Tabla 7.- Resultados obtenidos de las simulaciones numéricas para las diferentes secciones	103
Tabla 8.- Datos utilizados para obtener la ecuación mediante ajuste	110
Tabla 9.- Resultados de los ajustes a los resultados numéricos	111
Tabla 10.- Porcentaje de error entre los ajustes y los resultados numéricos	112
Tabla 11.- Porcentaje de error entre los ajustes y los resultados numéricos sin considerar el caso del canal ancho	113
Tabla 12.- Porcentaje de error entre el ajuste seleccionado y los resultados numéricos sin considerar el caso del canal ancho	114
Tabla 13.- Resultados del ejemplo de aplicación	117
Tabla 14.- Límites de aplicabilidad de la fórmula de Manning	125
Tabla 15.- Resultados del ejemplo comparativo	128

# Capítulo I

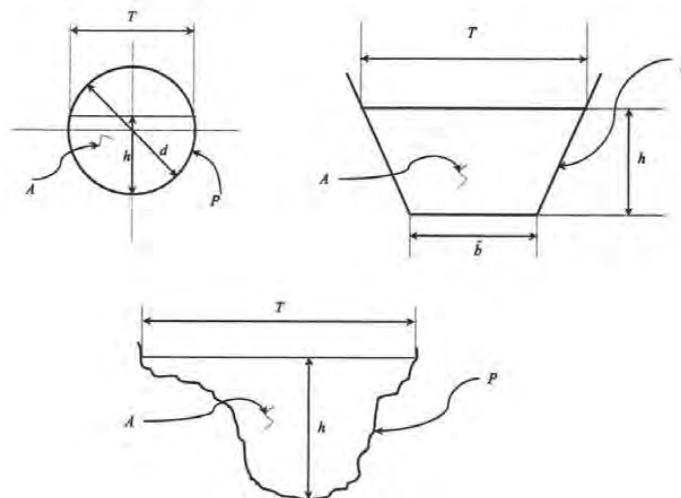
## *Introducción*

En la hidráulica se distinguen dos formas de conducir agua, la primera por medio de conductos cerrados ya sea trabajando a presión o en su caso a superficie libre y la segunda en conductos abiertos.

Los conductos pueden ser naturales o contruidos por el hombre. Por ejemplo los túneles y tuberías son conductos cerrados que pueden trabajar tanto a presión como a superficie libre; y los ríos, corrientes, canales, etc., son conductos abiertos que por su naturaleza trabajan necesariamente a superficie libre.

En este trabajo se enfocarán los esfuerzos a analizar principalmente los conductos que presentan una superficie libre, aunque como parte del marco teórico conceptual se revisarán y analizarán las condiciones de conductos cerrados completamente llenos.

Las características geométricas principales de un conducto abierto y de uno cerrado trabajando ya sea a presión o a superficie libre se muestran en la figura 1



*Figura 1.- Secciones transversales y sus características geométricas*

$A$  es el área hidráulica de la sección transversal;  $P$  es el perímetro mojado;  $T$  es el ancho de superficie libre;  $d$  es el diámetro de un conducto cerrado;  $h$  es el tirante y  $\tilde{b}$  el ancho de plantilla.

Además se pueden calcular las siguientes propiedades básicas de las secciones transversales; en primer término, el radio hidráulico que se define como

$$R_h = \frac{A}{P} \quad (\text{I.1})$$

y el tirante hidráulico que se determina con

$$Y = \frac{A}{T} \quad (\text{I.2})$$

### ***1.1 Tipos de flujo y su clasificación***

Los flujos a superficie libre se clasifican de acuerdo con diferentes criterios, uno de los cuales es el cambio de la velocidad con respecto al tiempo. En este sentido, si la velocidad del flujo en un punto no cambia con respecto al tiempo se considera flujo permanente, de lo contrario, se conoce como no permanente.

Por otro lado, si en un instante de tiempo dado la velocidad no cambia a lo largo del canal, el flujo se conoce como uniforme, de lo contrario se considera no uniforme o variado.

En forma general los flujos se clasifican en



*Figura 2.- Clasificación de flujos*

La clasificación anterior está basada en la variación de la velocidad con respecto al tiempo en una posición específica y con respecto a la distancia en un instante dado, lo que significa para un flujo unidimensional que  $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$  y  $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ , siendo  $u$  la velocidad en el sentido principal del flujo,  $t$  el tiempo y  $x$  la coordenada longitudinal alineada con el sentido principal del flujo.

Dentro de los flujos clasificados como variado o no uniforme existen los llamados gradualmente variados, que implican que el tirante varía a una tasa pequeña con respecto a la distancia y los rápidamente variados, en los que

por el contrario, el cambio del tirante es significativo en una distancia muy corta.

En el primer caso se distinguen los ya conocidos "perfiles" de flujo gradualmente variados que incluyen las subdivisiones de los tipo **M** para pendientes suaves, los **S** para pendientes pronunciadas, los **C** para cuando la pendiente del fondo es igual a la crítica, los **H** para pendiente nula y finalmente los **A** para pendiente adversa en el fondo. En el caso de flujo rápidamente variado se puede mencionar, por ejemplo, un salto hidráulico.

El caso de flujo uniforme no permanente se considera prácticamente imposible de que se presente en la práctica, puesto que se requiere que la superficie libre del agua cambie de un tiempo a otro pero a la vez se mantenga paralela al fondo.

Otra forma de clasificar el flujo es calculando la relación entre las fuerzas inerciales con las fuerzas gravitacionales, que es lo mismo que calcular el cociente de la velocidad del flujo entre la velocidad de una onda gravitacional o también llamada celeridad de onda, es decir, utilizando el número de Froude como criterio, el cual se define como (Chaudhry, 1993)

$$F_r = \frac{U}{\sqrt{gY}} \quad (I.3)$$

donde  $U$  es la velocidad media del flujo y  $g$  es la aceleración debida a la gravedad.

Haciendo uso de este parámetro adimensional, la clasificación del flujo resulta

a) Si  $F_r < 1$  el flujo es subcrítico; en este caso las ondas superficiales pueden trasladarse hacia aguas arriba en contra del flujo, puesto que la celeridad de onda es mayor que la velocidad del flujo.

b) Si  $F_r = 1$  el flujo es crítico.

c) Si  $F_r > 1$  el flujo es supercrítico; ya que la velocidad del flujo es mayor a la celeridad de onda, ésta no puede propagarse en contra del flujo, por lo que las condiciones hidráulicas de aguas abajo no afectan al flujo hacia aguas arriba.

Por otro lado, si en un flujo las partículas se mueven en rutas suaves y definidas y semejan capas delgadas una sobre la otra, éste se conoce como flujo laminar. Por el contrario, si las partículas del fluido siguen rutas irregulares que cambian con el tiempo y el espacio, entonces el flujo se conoce como turbulento.

La relación de las fuerzas viscosas e inerciales determina si el flujo es laminar o turbulento. Si las fuerzas viscosas dominan, el flujo es laminar, mientras que si las fuerzas inerciales son predominantes entonces el flujo es turbulento.

La relación entre las fuerzas viscosas e inerciales está definida por el número de Reynolds, el cual se puede calcular con la expresión (Chaudhry, 1993)

$$R_e = \frac{UL}{\nu} \quad (I.4)$$

donde  $L$  es la longitud característica y  $\nu$  la viscosidad cinemática del líquido.

Para flujos en conductos circulares cerrados usualmente se utiliza el diámetro del conducto  $d$  como longitud característica y para otros casos, incluidos los flujos a superficie libre el radio hidráulico  $R_h$  o el tirante hidráulico  $Y$ .

Los límites que determinan el tipo de flujo en canales a superficie libre respecto al número de Reynolds son (Sotelo, 2002)

- a) Si  $R_e < 500$  el flujo es laminar
- b) Se considera flujo en transición si se cumple  $500 \leq R_e \leq 12,500$  y por último
- c) Si  $R_e > 12,500$  el flujo se considera turbulento.

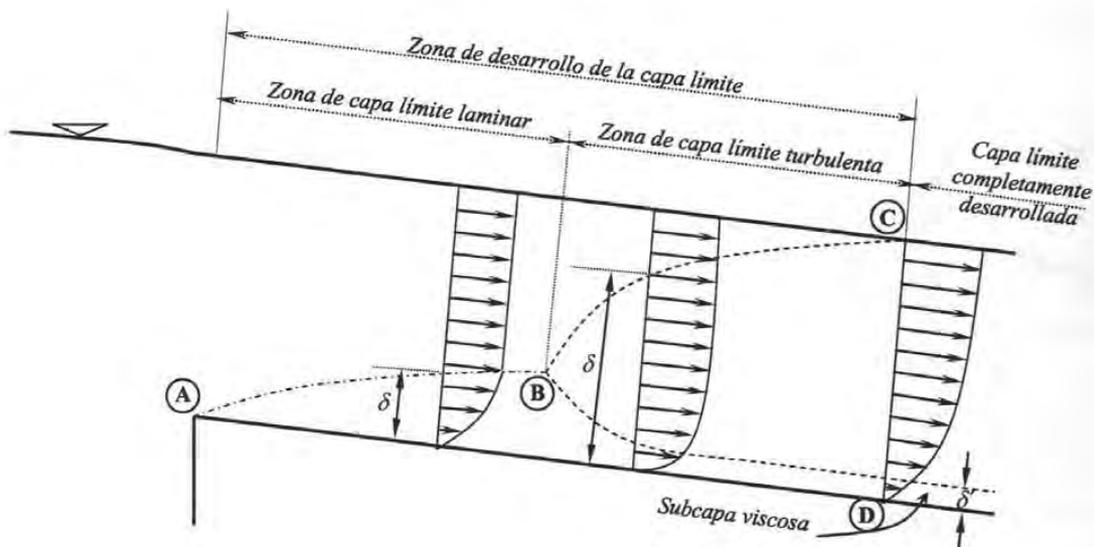
En aplicaciones prácticas los flujos laminares a superficie libre son muy raros debido a la baja viscosidad del agua. En esas condiciones en general se presentan comúnmente flujos turbulentos.

## ***1.2 Teoría de capa límite***

Una de las hipótesis normalmente aceptada en mecánica de fluidos es que la velocidad de las partículas en contacto con una frontera sólida en reposo es nula, la cual es conocida también como condición de no deslizamiento.

El hecho de que en la frontera sólida las partículas del fluido se adhieran da como resultado que los esfuerzos cortantes retardan el movimiento del fluido en una delgada capa cerca de la pared. En esta capa, la velocidad del flujo se incrementa desde un valor de cero en la pared hasta su valor máximo

prácticamente no afectado por la presencia de la pared. Esta capa descrita anteriormente se conoce como capa límite y es un concepto que fue desarrollado por Prandtl en 1928.



*Figura 3.- Desarrollo de la capa límite en un canal abierto*

Como se aprecia en la figura anterior, la capa límite inicia en el punto A y se desarrolla como capa límite laminar hasta el punto marcado como B donde inicia el desarrollo de la llamada capa límite turbulenta. Si la superficie del canal es hidráulicamente lisa, entonces se establece la llamada subcapa laminar o viscosa, si por el contrario la superficie es hidráulicamente rugosa, concepto que se revisará en la siguiente sección, entonces se desarrollará la capa límite turbulenta en toda la zona, es decir desde D hasta C, con lo que desaparecerá la subcapa viscosa.

Como en muchos fenómenos de la hidráulica, es muy difícil que los cambios de una condición a otra se realicen de manera abrupta, por lo que casi siempre encontramos las llamadas zonas de transición. En el caso que nos

ocupa la zona de transición se considera como una pequeña parte del desarrollo de la capa límite a partir del punto señalado con la letra B.

### ***1.2.1 Espesor de la capa límite***

El espesor de la capa límite se determina para cada una de las zonas presentadas en la figura 3 como se muestra a continuación.

Para el caso de la capa límite laminar el espesor sigue la ley (Sotelo, 2002)

$$\delta = \frac{5\hat{x}}{\sqrt{R_{e\hat{x}}}} \quad (\text{I.5})$$

definiendo

$$R_{e\hat{x}} = \frac{U\hat{x}}{\nu} \quad (\text{I.6})$$

donde  $\delta$  es el espesor de la capa límite y  $R_{e\hat{x}}$  es el número de Reynolds asociado con la distancia longitudinal  $\hat{x}$  medida a partir de la frontera donde inicia la formación de la citada capa límite.

La zona de transición ocurre aproximadamente en el intervalo

$$500,000 < R_{e\hat{x}} < 1'000,000$$

Para el caso de la capa límite turbulenta, el espesor está dado por (Sotelo, 2002)

$$\delta = \frac{0.37 \hat{x}}{R_{ex}^{0.2}} \quad (I.7)$$

En la zona de la capa límite turbulenta persiste, para el caso de frontera hidráulicamente lisa, una capa delgada llamada subcapa laminar o viscosa de espesor

$$\delta' = \frac{5\nu}{u_*} \quad (I.8)$$

donde  $u_*$  es la velocidad al cortante la cual se calcula con la expresión

$$u_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \quad (I.9)$$

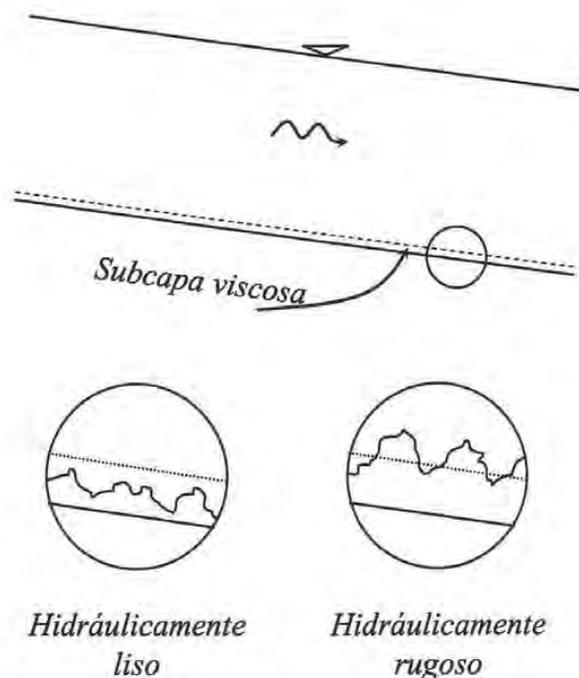
donde  $\tau_0 = g \rho R_h S_f$  es el esfuerzo tangencial medio en la pared debido a la fricción;  $\rho$  es la densidad del agua y  $S_f$  la pendiente de fricción. Por lo tanto, la ecuación (I.9) también puede expresarse como:

$$u_* = \sqrt{g R_h S_f} \quad (I.10)$$

### ***1.2.2 Comportamiento de las fronteras y perfiles de velocidad***

Por otro lado, la superficie de la frontera del flujo puede ser lisa o rugosa. El primer caso no se analiza a detalle por no ser de interés para los fines de este trabajo, además de ser poco común en la práctica.

En el segundo caso, si se compara el espesor de la subcapa viscosa con la altura de la rugosidad de la superficie en la frontera sólida y si los elementos de rugosidad quedan completamente cubiertos por la subcapa viscosa, la frontera se comporta como hidráulicamente lisa, de lo contrario, si los elementos de la rugosidad sobresalen hacia fuera de la subcapa viscosa entonces se comporta como hidráulicamente rugosa, tal y como se muestra en la figura 4.



***Figura 4.- Rugosidad en las fronteras***

Schlichting en 1968 determinó los criterios para clasificar el comportamiento hidráulico de la frontera rugosa (Sotelo, 2002), a saber

a) Hidráulicamente lisa si  $0 < \frac{u_* k_s}{\nu} \leq 5$

b) Transición si  $5 < \frac{u_* k_s}{\nu} \leq 70$

c) Hidráulicamente rugosa si  $\frac{u_* k_s}{\nu} > 70$

donde  $k_s$  es la rugosidad equivalente de Nikuradse.

El flujo turbulento a superficie libre ocurre cuando el número de Reynolds es mayor a 500. Para el caso de un fondo liso se presentan tres diferentes zonas con distinto comportamiento de la distribución de velocidades, acotados como

a) Subcapa viscosa  $0 < y \leq \frac{5\nu}{u_*}$

b) Transición  $\frac{5\nu}{u_*} \leq y \leq \frac{30\nu}{u_*}$

c) Turbulenta  $\frac{30\nu}{u_*} \leq y \leq h$

donde  $y$  es la distancia medida perpendicularmente desde la pared y  $h$  el tirante total.

Para canales anchos en la primera zona, la distribución de velocidades sigue la ley (Sotelo, 2002)

$$\frac{u}{u_*} = \frac{u_* y}{\nu} \quad (\text{I.11})$$

dentro de la zona de transición se utiliza para canales anchos (Sotelo, 2002)

$$\frac{u}{u_*} = 5 \ln \left( \frac{u_* y}{\nu} \right) - 3.05 \quad (\text{I.12})$$

y finalmente para la zona turbulenta la ley universal de distribución de velocidades de Prandtl-von Kármán para tuberías lisas aplicada a canales anchos es (Sotelo, 2002)

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \left( \frac{u_* y}{\nu} \right) + 5.5 \quad (\text{I.13})$$

donde  $\kappa$  es conocida como la constante de von Kármán y el valor comúnmente aceptado es de 0.4 (Schlichting, 1979).

En el caso de flujo turbulento a superficie libre sobre un fondo hidráulicamente rugoso se distingue únicamente la zona turbulenta abarcando la totalidad de la sección transversal, en este caso las rugosidades de la frontera son mayores que el espesor de la subcapa laminar o viscosa, eliminando tanto la subcapa viscosa como las zonas analizadas en el caso de fondo liso.

En esta zona se utiliza la ley universal de distribución de velocidades para tubos rugosos, válida para canales anchos que es

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln\left(\frac{y}{k_s}\right) + B \quad (\text{I.14})$$

El coeficiente  $B$  varía a lo largo del eje y de la sección transversal y manifiesta tres comportamientos diferentes, a saber

a) cuando  $\frac{u_* k_s}{\nu} \leq 5$  el fondo rugoso se asemeja en su comportamiento a uno liso y  $B$  se calcula como (Sotelo, 2002)

$$B = 2.5 \ln\left(\frac{u_* k_s}{\nu}\right) + 5.5 \quad (\text{I.15})$$

que al ser sustituida en la ley universal resulta

$$\frac{u}{u_*} = 2.5 \ln\left(\frac{u_* y}{\nu}\right) + 5.5 \quad (\text{I.16})$$

b) Cuando se cumple que  $5 < \frac{u_* k_s}{\nu} \leq 70$  que es lo mismo que  $\frac{5\nu}{u_*} < k_s \leq \frac{70\nu}{u_*}$

se considera una zona de transición y  $B$  se comporta según Fuentes y Carrasquel (1978) como

$$B = -2.5 \ln\left[ \frac{1}{9.025 \frac{u_* k_s}{\nu}} + \frac{1}{30} e^{\frac{-10.78\nu}{u_* k_s}} \right] \quad (\text{I.17})$$

si se supone que  $\frac{u_* k_s}{\nu} = 70$  se obtiene  $B = 8.75$

c) Cuando  $\frac{u_* k_s}{\nu} > 70$  el fondo del canal se comporta como hidráulicamente rugoso y  $B$  adquiere un valor constante de 8.5, independientemente del valor de  $\frac{u_* k_s}{\nu}$ , es decir, independientemente de la viscosidad del líquido, por lo que la expresión válida para flujo hidráulicamente rugoso resulta (Sotelo, 2002)

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln\left(\frac{y}{k_s}\right) + 8.5 \quad (\text{I.18})$$

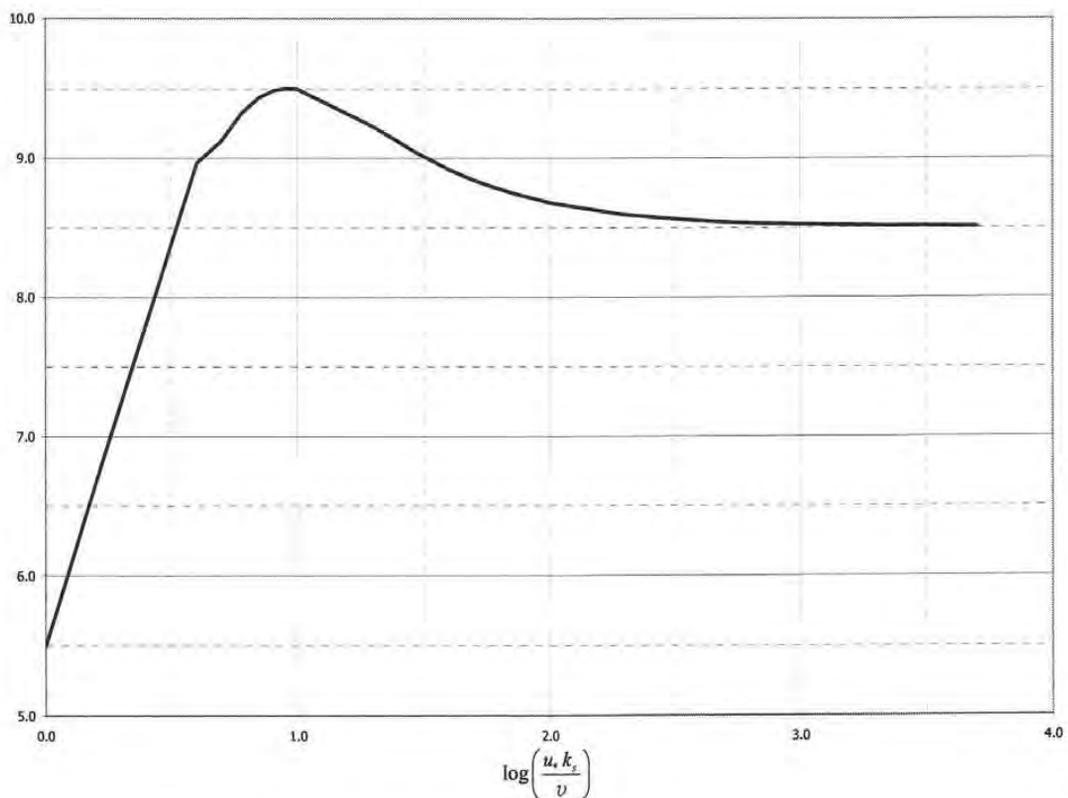


Figura 5.- Comportamiento del factor B para flujos turbulentos

### 1.3 Flujo uniforme

Este tipo de flujo define las condiciones mínimas que debe tener una sección transversal para un gasto, pendiente y rugosidad conocidos, puesto que, aunque existan otro tipo de condiciones o controles que determinen cambios en el tirante, siempre existe la tendencia natural del flujo a alcanzar el estado de flujo uniforme.

Por definición en el flujo uniforme se cumple que todas sus características como son la velocidad, tirante y área hidráulica permanecen constantes en cada sección y que las líneas de energía  $S_f$ , superficie libre del agua  $S_w$  y plantilla del fondo del canal  $S_0$  son paralelas.

#### 1.3.1 Ecuación de Chézy

Considerese el volumen de control mostrado en la figura siguiente

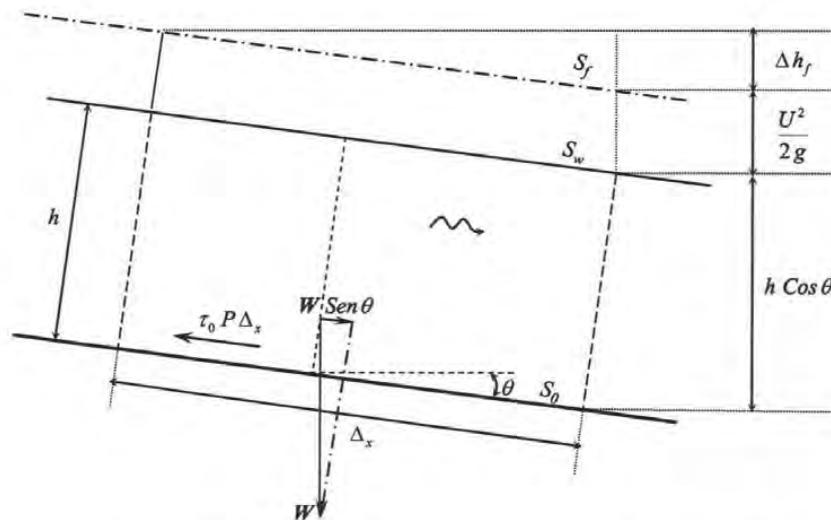


Figura 6.- Flujo uniforme (volumen de control)

donde  $W$  es el peso del líquido confinado en el volumen de control,  $\Delta h_f$  es la pérdida de carga por fricción en el tramo de longitud  $\Delta x$  y  $\theta$  es el ángulo de inclinación del fondo con respecto a la horizontal.

Si se aplica la ecuación de cantidad de movimiento al volumen mostrado de longitud  $\Delta x$  se cumple que

$$g \rho A \Delta x \text{Sen } \theta - \tau_0 P \Delta x = 0 \quad (\text{I.19})$$

De la figura se observa que

$$\text{Sen } \theta = \frac{\Delta h_f}{\Delta x} = S_f$$

como para el caso de flujo uniforme se cumple que

$$S_f = S_w = S_0$$

entonces simplificando la ecuación (I.19) se obtiene

$$\tau_0 = g \rho R_h S_f \quad (\text{I.20})$$

que coincide con la definición utilizada para derivar la ecuación (I.10).

Como  $u_* = \overline{g R_h S_f}$  entonces, utilizando (I.20) en la expresión anterior, ésta

se puede escribir también como  $u_* = \frac{\overline{\tau_0}}{\rho}$ .

Por otro lado, por medio de un análisis dimensional para flujo turbulento se puede obtener que

$$\tau_0 = \hat{a} \rho U^2 \quad (\text{I.21})$$

donde  $\hat{a}$  es un número adimensional no necesariamente constante que depende de la rugosidad, del número de Reynolds y de la forma de la sección transversal.

Igualando las ecuaciones para  $\tau_0$  (I.20 y I.21) se obtiene

$$g \rho R_h S_f = \hat{a} \rho U^2$$

de donde, despejando para la velocidad media se tiene

$$U = \sqrt{\frac{g}{\hat{a}} R_h S_f} \quad (\text{I.22})$$

si hacemos  $C = \sqrt{\frac{g}{\hat{a}}}$  entonces se obtiene la fórmula

$$U = C \sqrt{R_h S} \quad (\text{I.23})$$

donde  $S$  puede ser para el caso de flujo uniforme la pendiente del fondo  $S_0$  o la pendiente de fricción  $S_f$  indistintamente. En caso de flujo no uniforme se debe considerar siempre como la pendiente de fricción.

La ecuación anterior es conocida como la ecuación de Chézy, quien la desarrolló experimentalmente en 1775 siendo  $C$  un factor de resistencia o fricción que puede estimarse por medio de diferentes expresiones como las propuestas por Ganguillet y Kutter, Bazin y Kozeny, entre otros, (Sotelo, 2002).

### ***1.3.2 Ecuación de Darcy-Weisbach***

Esta ecuación cuenta con una larga historia en su desarrollo y lleva por nombre el de dos grandes ingenieros hidráulicos de mediados del siglo XIX, pero vale la pena mencionar que otros más contribuyeron de manera importante para llegar a ella.

La ecuación que conocemos en la actualidad fue propuesta en 1845; sin embargo, su uso fue limitado puesto que no se contaba en ese momento con buenas estimaciones del factor de fricción o resistencia al flujo  $f$ . Así por ejemplo, era de uso más frecuente la ecuación empírica de Prony  $h_f = \frac{l}{d}(\tilde{a}U + \tilde{b}U^2)$  donde  $h_f$  es la pérdida de carga por fricción,  $\tilde{a}$  y  $\tilde{b}$  son factores de fricción empíricos y  $d$  es el diámetro de la tubería.

Como se sabe los trabajos de Julius Weisbach (1806-1871) no fueron los primeros en el área, Antonio Chézy (1718-1798) publicó una ecuación para flujo en canales abiertos, desafortunadamente el trabajo de Chézy se dejó a un lado hasta que fue retomado por un alumno suyo, Gaspard de Prony (1755-1839).

Henry Darcy (1803-1858) quien a su vez fue estudiante de Prony publicó en 1857 nuevas relaciones para los coeficientes de la ecuación que lleva su nombre basado en un gran número de experimentos proponiendo así la nueva ecuación 
$$h_f = \frac{l}{d} \left[ \left( \check{c} + \frac{\check{d}}{d^2} \right) U + \left( \check{d} + \frac{\check{e}}{d} \right) U^2 \right]$$
 donde  $\check{c}$ ,  $\check{d}$  y  $\check{e}$  son coeficientes empíricos para un tipo dado de tubería.

Fue entonces cuando Darcy introdujo el concepto de rugosidad del tubo escalada por el diámetro, que ahora conocemos como rugosidad relativa, por lo que es común llamar al factor  $f$  como el factor de fricción  $f$  de Darcy, sin embargo, Darcy nunca propuso una relación entre este nuevo concepto (rugosidad relativa) y el factor de fricción.

Aparentemente Fanning fue el primero en relacionar los dos conceptos de manera eficiente. En 1877 publicó una gran recopilación de valores de  $f$  en función del material del tubo, su diámetro y velocidad del flujo, sin embargo, Fanning usó el radio hidráulico en lugar del diámetro del tubo en su ecuación de fricción, por lo que los valores de  $f$  de Fanning corresponden a valores de  $f$  de Darcy de una cuarta parte de la rugosidad relativa usada por Fanning, debido a que para un conducto circular se cumple que  $R_h = d/4$ .

Paralelamente los conceptos de viscosidad y flujo laminar fueron definidos por Jean Poiseuille (1799-1869) y por Gotthilf Hagen (1797-1884), mientras que Osborne Reynolds (1842-1912) describía la transición entre flujo laminar y turbulento en 1883.

Durante los primeros años del siglo XX Ludwig Prandtl (1875-1953) y sus estudiantes Theodore von Kármán (1881-1963), Paul Blasius (1883-1970) y

Johann Nikuradse (1894-1979) intentaron proveer una solución analítica para el factor de fricción  $f$  usando para esto consideraciones teóricas además de resultados experimentales.

Estos trabajos fueron complementados por los análisis efectuados por Colebrook y White en tuberías con rugosidad no uniforme en 1939. Sin embargo, la ecuación de Darcy-Weisbach no se popularizó en su uso sino hasta el desarrollo del conocido diagrama de Moody en 1944, este trabajo sirvió como base importante a los trabajos de Hunter Rouse quien en 1946 publicó desarrollos sobre el factor de fricción  $f$ , pero sin referenciar a Moody.

Por otro lado cabe la pena mencionar que a mediados del siglo XX la ecuación referida era llamada la ecuación de Darcy, generando una confusión con la ley de Darcy para el flujo en medios porosos. Aparentemente Rouse en 1946 fue el primero en llamarla la ecuación de Darcy-Weisbach, pero esto no se generalizó sino hasta la parte final de la década de los años 1980's.

Después de haber reseñado brevemente el origen de la ecuación en comento, se procede a revisar los detalles técnicos de la misma. Como ya se mencionó anteriormente, en 1845 Darcy y Weisbach dedujeron la siguiente expresión para el cálculo de la pérdida por fricción en un conducto circular de diámetro constante y con flujo permanente

$$h_f = \frac{f l U^2}{d 2g} \quad (I.24)$$

donde  $h_f$  es la pérdida de carga por fricción,  $f$  es el factor de fricción,  $l$  es la longitud a considerar para el cálculo de la pérdida de carga por fricción.

Como se sabe, esta fórmula fue originalmente desarrollada para conductos circulares, pero es posible reconocer que la ecuación de Chezy (I.23) y la de Darcy-Weisbach (I.24) son esencialmente similares, puesto que las dos se fundamentan en que la resistencia al flujo varía con el cuadrado de la velocidad. Dicha resistencia es balanceada por la fuerza que produce el movimiento, la cual es directamente proporcional a la pendiente. Por lo anterior, se puede extender el uso de la ecuación de Darcy-Weisbach a conductos de sección transversal arbitraria introduciendo el concepto de radio hidráulico  $R_h$ . En el caso de un conducto circular,  $d = 4R_h$ , que si se substituye en la ecuación (I.24) resulta:

$$h_f = \frac{f l U^2}{4 R_h 2 g}$$

como  $h_f = S_f l$ ,

$$S_f l = \frac{f l U^2}{8 g R_h} \tag{I.25}$$

despejando la velocidad se obtiene:

$$U = \sqrt{\frac{8 g}{f} R_h S_f} \tag{I.26}$$

### ***1.3.3 Ecuación de Manning***

La fórmula de Manning (1895) es quizá la más ampliamente utilizada para estimar la resistencia al flujo en canales, sin embargo uno de los principales inconvenientes que exhibe dicha expresión es que no es dimensionalmente homogénea. En efecto, es común que la ecuación de Manning, para evaluar la resistencia al flujo en escurrimiento uniforme en canales abiertos se escriba como sigue

$$U = \frac{C_m}{n} R_h^{2/3} S_f^{1/2} \quad (I.27)$$

donde  $C_m$  es un factor de conversión igual a 1 para el sistema internacional de unidades, e igual a 1.486 para el sistema inglés de unidades y  $n$  el factor de rugosidad o fricción de Manning.

Para fines de diseño de canales es común que se suponga que el flujo es hidráulicamente rugoso con turbulencia desarrollada. Por otra parte, es bien sabido que la fórmula de Manning es aplicable precisamente para este tipo de régimen.

En este sentido, las consideraciones presentadas en este trabajo se limitarán a flujo hidráulicamente rugoso.

#### ***1.4 Comparación de las ecuaciones de flujo uniforme***

Resulta conveniente en este momento presentar la comparación de las tres ecuaciones para flujo uniforme descritas en los párrafos anteriores, lo cual permitirá establecer la relación que existe entre los diferentes coeficientes de rugosidad de cada una de ellas.

Se tiene entonces que las ecuaciones de Chézy, Darcy-Weisbach y Manning se pueden escribir respectivamente como

$$U = C\sqrt{R_h S_f} \quad (\text{I.28})$$

$$U = \sqrt{\frac{8g}{f}} \sqrt{R_h S_f} \quad (\text{I.29})$$

$$U = \frac{C_m R_h^{1/6}}{n} \sqrt{R_h S_f} \quad (\text{I.30})$$

de donde se deduce que

$$C = \sqrt{\frac{8g}{f}} = \frac{C_m R_h^{1/6}}{n} \quad (\text{I.31})$$

Que representa la relación que existe entre los diferentes coeficientes de rugosidad o fricción de las ecuaciones para flujo uniforme presentadas.

### ***1.5 Objetivo del trabajo***

La fórmula de Manning es la expresión más comúnmente utilizada para estimar la resistencia al flujo en canales, pero tiene los significativos inconvenientes de tener un origen totalmente empírico y no poseer homogeneidad dimensional.

En contraste con esta situación, la fórmula de Darcy-Weisbach es dimensionalmente homogénea y es posible desarrollar expresiones con base teórica para el factor de fricción  $f$  que aparece en ella.

En este trabajo se revisan los procedimientos empleados por diversos investigadores para determinar relaciones funcionales que expresen a  $f$  en términos de la rugosidad relativa para flujo hidráulicamente rugoso con turbulencia desarrollada. En particular, se modifica el análisis presentado por Schlichting (1979) y se demuestra que al cambiar los límites de integración para calcular la velocidad media en conductos circulares, se obtiene una expresión teórica que se ajusta muy bien a la información experimental, más precisamente, a la fórmula modificada que propone Schlichting para lograr un mejor ajuste a los datos experimentales de Nikuradse.

En forma similar, se introduce una modificación al análisis clásico de Keulegan (1938), que permite explicar la dispersión en los valores experimentales observados por diversos autores en los parámetros que están presentes en la expresión para el coeficiente de fricción de la fórmula de Darcy-Weisbach,  $f$ , para canales anchos.

Este análisis permite, además, comprobar que la fórmula de Manning representa un ajuste de potencia a la referida expresión teórica para  $f$ . Con base en este resultado, se demuestra que valores relativamente altos de la rugosidad de Manning,  $n$ , equivalen a valores físicamente inviables de la rugosidad absoluta de Nikuradse. Esta conclusión pone de manifiesto la aplicabilidad de la fórmula de Manning sólo para un rango determinado de valores de la rugosidad relativa, mismo que se determina en este documento.

En relación con este último punto, lo que ocurre es que valores altos de  $n$  no representan procesos de resistencia al flujo en la capa límite, sino que capturan efectos asociados con cambios de geometría y de dirección de flujo, los cuales no necesariamente pueden representarse adecuadamente a través de una fórmula del tipo de la de Manning.

Adicionalmente, explorando las evidencias en el sentido de que la forma geométrica de la sección transversal de un canal no tiene un papel importante en la estimación de la resistencia al flujo en canales, quedando ésta bien representada a través del radio hidráulico, se desarrolló una fórmula para el factor de fricción  $f$ , válida para cualquier sección transversal trapecial.

## ***1.6 Descripción del contenido del trabajo***

En este primer capítulo se presenta una breve introducción donde se abordan y describen algunos los fundamentos básicos de la hidráulica de canales que son de interés para el desarrollo de este trabajo, como la clasificación de los flujos, la teoría de capa límite, los perfiles de velocidad y las fórmulas para el cálculo del flujo uniforme, así como la descripción del objetivo del trabajo.

En el segundo capítulo se presenta una revisión bibliográfica donde se destacan los desarrollos llevados a cabo por diferentes autores para establecer las fórmulas para estimar el factor de fricción  $f$ , tema central de este documento, haciendo un recuento de varios trabajos disponibles en la literatura referentes al tema, enfatizando en los comentarios y conclusiones de los autores y sobre todo en las coincidencias y discrepancias encontradas entre estos trabajos.

Para el tercer capítulo se presentan los desarrollos propios para la obtención de las fórmulas del factor de fricción  $f$  para los casos de conducto circular completamente lleno  $h = d$ , con un tirante igual a un medio del diámetro  $h = \frac{d}{2}$  y para canales anchos, en todos los casos para flujos con turbulencia completamente desarrollada.

En el capítulo cuatro se presentan los resultados que se obtuvieron de la modelación numérica de los casos de canales trapeziales, modelación llevada a cabo para obtener una ecuación general para estimar  $f$  en este tipo de canales.

En el capítulo cinco se presenta la aportación quizá más importante de este trabajo, consistente en una fórmula universal para estimar el factor de fricción  $f$  en canales trapeciales.

En el capítulo seis se anotan las principales conclusiones y recomendaciones derivadas de este trabajo y posteriormente se enumeran las referencias bibliográficas y un listado de la notación utilizada en este documento.

## Capítulo II

### *Revisión bibliográfica*

## **II.1 Ecuaciones del factor de fricción $f$**

### **II.1.1 Flujo laminar**

El flujo laminar ocurre a superficie libre con números de Reynolds menores a 500, por lo que en la práctica es extremadamente difícil encontrarlo. Sin embargo, para este tipo de flujo se ha obtenido que el factor de fricción  $f$  queda expresado por la ley

$$f = \frac{K}{R_e} \quad (\text{II.1})$$

donde  $K$  es una constante adimensional que depende de la forma de la sección transversal, para el flujo en tuberías se ha determinado que  $K = 64$ , (Sotelo, 1974), para un canal ancho liso se ha encontrado que  $K = 24$ , para canales triangulares con paredes lisas y ángulos entre  $30^\circ$  y  $150^\circ$  se ha encontrado que  $K = 14$ . Para canales rugosos  $K$  varía entre 33 y 60 según la forma de la sección transversal (Sotelo, 2002).

Cabe mencionar que, a diferencia de los flujos a superficie libre, en tuberías se ha determinado el número de 2,300 como valor crítico límite del número de Reynolds para considerar válida la ecuación anterior.

## II.1.2 Flujo turbulento

### II.1.2.1 Flujo hidráulicamente liso

Para tubos lisos Blasius determinó empíricamente la expresión (Sotelo, 1974)

$$f = \frac{0.3164}{R_e^{1/4}} \quad (\text{II.2})$$

válida para flujo turbulento con números de Reynolds menores a 100,000, puesto que se observó en pruebas experimentales para valores mayores a este límite, una gran divergencia de los resultados obtenidos con la ecuación anterior y las mediciones reportadas por Nikuradse.

Para flujo en tubos lisos fluyendo en un conducto circular completamente lleno como el que se muestra en la figura 7 y números de Reynolds mayores a 100,000 se tiene

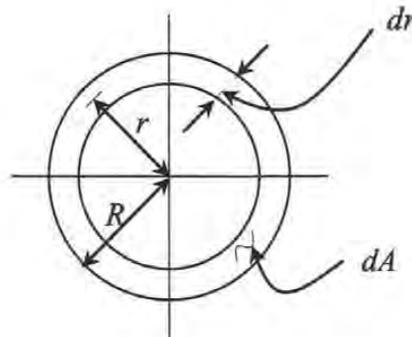


Figura 7.- Sección circular considerada para el cálculo de la velocidad media

$$A = \pi R^2; \quad dA = 2\pi r dr; \quad y = R - r$$

donde  $R$  es el radio del conducto circular.

Calculando la velocidad media como

$$U = \frac{1}{A} \int_0^R u dA \quad (\text{II.3})$$

y utilizando la ley universal de distribución de velocidades de Prandtl-von Kármán para tubos lisos y zona de capa límite turbulenta

$$u = u_* \left[ 2.5 \ln \left( \frac{u_* y}{\nu} \right) + 5.5 \right] \quad (\text{II.4})$$

tenemos que, al utilizar a  $r$  como variable de integración, se obtiene

$$U = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R u_* \left\{ 2.5 \ln \left[ \frac{u_* (R-r)}{\nu} \right] + 5.5 \right\} 2\pi r dr \quad (\text{II.5a})$$

o en el caso de utilizar como variable de integración a  $y$

$$U = -\frac{1}{\pi R^2} \int_R^0 u_* \left\{ 2.5 \ln \left[ \frac{u_* y}{\nu} \right] + 5.5 \right\} 2\pi (R-y) dy \quad (\text{II.5b})$$

resolviendo la integral se obtiene

$$U = u_* \left[ 2.5 \ln \left( \frac{u_* R}{\nu} \right) + 1.75 \right] \quad (\text{II.6})$$

Por otro lado, combinando las ecuaciones (I.10) y (I.26) y despejando para  $f$  se obtiene

$$f = 8 \left( \frac{u_*}{U} \right)^2 \quad (\text{II.7})$$

substituyendo la ecuación (II.6) en (II.7) resulta

$$f = 8 \left\{ \frac{u_*}{u_* \left[ 2.5 \ln \left( \frac{u_* R}{\nu} \right) + 1.75 \right]} \right\}^2$$

despejando de (II.7) para  $u_*$  tenemos

$$u_* = U \cdot \sqrt{\frac{f}{8}} \quad (\text{II.8})$$

sabiendo que  $d = 2R$  y  $R_e = \frac{Ud}{\nu}$  y haciendo uso de la expresión anterior, simplificando se obtiene

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2.035 \log \left( R_e \sqrt{f} \right) - 0.913 \quad (\text{II.9})$$

que es la fórmula para calcular el factor de fricción en tubos completamente llenos e hidráulicamente lisos, (Schlichting, 1979).

Prandtl propone modificar ligeramente los valores de la ecuación anterior para obtener un mejor ajuste a los datos experimentales como se muestra en la ecuación siguiente

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2.0 \log(R_e \sqrt{f}) - 0.8 \quad (\text{II.10})$$

la expresión anterior también puede ser escrita como

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2.0 \log\left(\frac{2.51}{R_e \sqrt{f}}\right) \quad (\text{II.11})$$

que es conocida como la ley universal de fricción de Prandtl para tuberías lisas, (Schlichting, 1979).

Para flujo turbulento hidráulicamente liso en un canal ancho (donde se cumple  $\frac{b}{h} \geq 10$ ) como el mostrado en la figura 8 y considerando un ancho unitario para el cálculo de la velocidad media se tiene

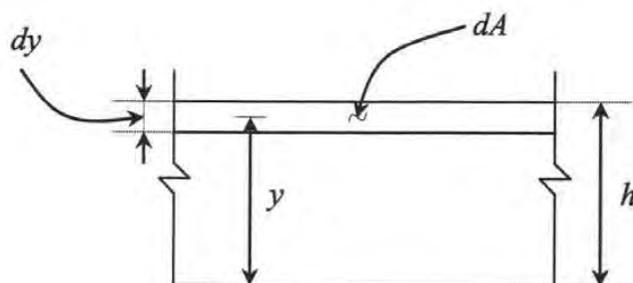


Figura 8.- Sección rectangular de ancho unitario

$$U = \frac{1}{A} \int_0^h u \, dA \quad (\text{II.12})$$

donde  $A = h$  y  $dA = dy$

Utilizando nuevamente la ley universal de distribución de velocidades de Prandtl-von Kármán para zona de capa límite turbulenta

$$u = u_* \left[ 2.5 \ln \left( \frac{u_* y}{\nu} \right) + 5.5 \right]$$

sustituyendo esta expresión para calcular la velocidad media se tiene

$$U = \frac{1}{h} \int_0^h u_* \left[ 2.5 \ln \left( \frac{u_* y}{\nu} \right) + 5.5 \right] dy \quad (\text{II.13})$$

resolviendo la integral obtenemos

$$U = u_* \left[ 2.5 \ln \left( \frac{u_* h}{\nu} \right) + 3 \right] \quad (\text{II.14})$$

usando nuevamente la ecuación  $f = 8 \left( \frac{u_*}{U} \right)^2$  se obtiene

$$f = 8 \left\{ \frac{u_*}{u_* \left[ 2.5 \ln \left( \frac{u_* h}{\nu} \right) + 3 \right]} \right\}^2$$

sabiendo que  $R_e = \frac{U h}{\nu}$  y  $u_* = U \sqrt{\frac{f}{8}}$  y simplificando se obtiene

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2.035 \log(R_e \sqrt{f}) + 0.141 \quad (\text{II.15})$$

Estos primeros dos resultados (ecuaciones II.9 y II.15) representan las expresiones para calcular el factor de fricción en un conducto circular trabajando completamente lleno y un canal ancho respectivamente, en ambos casos con flujo turbulento y frontera hidráulicamente lisa, pero aún sin considerar la contribución al cálculo del factor de fricción de la subcapa viscosa, puesto que se integró la ley universal de distribución de velocidades de Prandtl-von Kármán para el cálculo de la velocidad media, desde cero hasta el límite superior que en el primer caso es el radio del conducto  $R$  y para el segundo caso el tirante total  $h$ .

En estricto sentido, como se revisó anteriormente, para este tipo de flujos se presentan diferentes zonas de desarrollo de la capa límite, cada una de ellas con una ley de distribución de velocidades diferente, por lo que resulta conveniente revisar la importancia de tomar en cuenta el efecto de la subcapa viscosa en el cálculo de la velocidad media del flujo, ya que de acuerdo con Schlichting (1979), los errores en lo que se incurre al suponer que el perfil logarítmico universal de velocidades es válido para toda la sección transversal de la tubería son despreciables.

Para tal efecto, en principio se debe definir la altura a considerar para dicha subcapa, una vez hecho lo anterior se estará en posibilidad de modificar los límites de integración para calcular dicha velocidad media.

Como se anotó en el punto (I.2.2) la ley que rige la distribución de velocidades del flujo que se presenta en la subcapa viscosa, según la ecuación (I.11) es

$$\frac{u}{u_*} = \frac{u_* y}{\nu}$$

y para el flujo en la capa límite turbulenta e hidráulicamente liso la ecuación que rige la distribución de velocidades es (I.16)

$$\frac{u}{u_*} = 2.5 \ln \left( \frac{u_* y}{\nu} \right) + 5.5$$

resolviendo simultáneamente las ecuaciones anteriores para encontrar el valor de  $y$  donde intersectan se obtiene

$$\frac{u_* y}{\nu} = 11.635$$

por lo que

$$y = 11.635 \frac{\nu}{u_*} \tag{II.16}$$

que define para fines prácticos la altura de la subcapa viscosa.

Entonces ahora se está en posibilidad de modificar los límites de integración en la integral que define la velocidad media, separando claramente las dos zonas con diferente ley del perfil de velocidad.

En el caso de conducto circular como el mostrado en la figura 9, la velocidad media ahora queda definida como

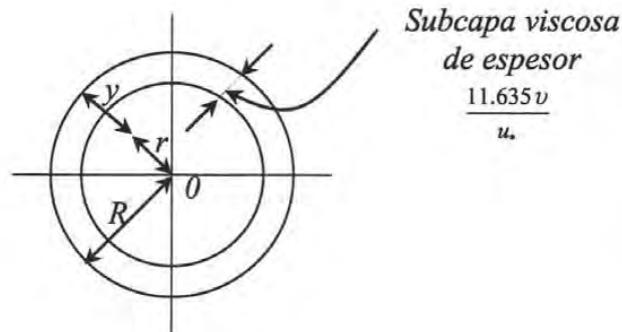


Figura 9.- Sección circular donde se considera la subcapa viscosa

$$U = \frac{1}{A} \left( \int_0^{R-11.635 \frac{\nu}{u_*}} u dA + \int_{R-11.635 \frac{\nu}{u_*}}^R u dA \right) \quad (\text{II.17})$$

utilizando para la segunda integral la siguiente expresión que corresponde a la subcapa viscosa

$$u = \frac{u_*^2 y}{\nu}$$

y para la primera integral la siguiente expresión, que es válida para el resto del flujo

$$u = u_* \left[ 2.5 \ln \left( \frac{u_* y}{\nu} \right) + 5.5 \right]$$

y notando además que de acuerdo con la figura 9, se tiene que

$$A = \pi R^2; \quad y = R - r; \quad dA = 2\pi r dr; \quad r = R - y; \quad dr = -dy; \quad dA = -2\pi(R - y) dy$$

por lo que se obtiene, usando a  $r$  como variable de integración

$$U = \frac{1}{\pi R^2} \left\{ \int_0^{R-11.635\frac{v}{u_*}} u_* \left[ 2.5 \ln \left[ \frac{u_* (R-r)}{v} \right] + 5.5 \right] 2\pi r dr + \int_{R-11.635\frac{v}{u_*}}^R \frac{u_*^2 (R-r)}{v} 2\pi r dr \right\} \quad (\text{II.18a})$$

ahora bien, si se utiliza a  $y$  como variable de integración los límites de integración y las expresiones a integrar cambiarían como se muestra a continuación

$$U = -\frac{1}{\pi R^2} \left\{ \int_R^{11.635\frac{v}{u_*}} u_* \left[ 2.5 \ln \left[ \frac{u_* y}{v} \right] + 5.5 \right] 2\pi (R-y) dy - \int_{11.635\frac{v}{u_*}}^0 \frac{u_*^2 y}{v} 2\pi (R-y) dy \right\} \quad (\text{II.18b})$$

resolviendo la integral obtenemos

$$U = u_* \left[ 2.5 \ln \left( \frac{u_* R}{v} \right) + 355.81 \left( \frac{v}{u_* R} \right)^2 - 77.19 \left( \frac{v}{u_* R} \right) + 1.75 \right] \quad (\text{II.19})$$

usando nuevamente la ecuación  $f = 8 \left( \frac{u_*}{U} \right)^2$  se obtiene

$$f = 8 \left\{ \frac{u_*}{u_* \left[ 2.5 \ln \left( \frac{u_* R}{\nu} \right) + 355.81 \left( \frac{\nu}{u_* R} \right)^2 - 77.19 \left( \frac{\nu}{u_* R} \right) + 1.75 \right]} \right\}^2$$

sabiendo que  $d = 2R$  ;  $R_e = \frac{Ud}{\nu}$  ;  $u_* = U \sqrt{\frac{f}{8}}$  y simplificando se obtiene

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2.035 \log(R_e \sqrt{f}) + 4025.60 (R_e \sqrt{f})^{-2} - 154.38 (R_e \sqrt{f})^{-1} - 0.912 \quad (\text{II.20})$$

De la misma forma, pero ahora haciendo los cambios necesarios en la integral para calcular la velocidad media en un canal ancho, se tiene:

$$U = \frac{1}{A} \left( \int_0^{\frac{11.635 \nu}{u_*}} \frac{u_*^2 y}{\nu} dA + \int_{\frac{11.635 \nu}{u_*}}^h u_* \left[ 2.5 \ln \left( \frac{u_* y}{\nu} \right) + 5.5 \right] dA \right) \quad (\text{II.21})$$

donde  $A = h$  y  $dA = dy$

$$U = \frac{1}{h} \left( \int_0^{\frac{11.635 \nu}{u_*}} \frac{u_*^2 y}{\nu} dy + \int_{\frac{11.635 \nu}{u_*}}^h u_* \left[ 2.5 \ln \left( \frac{u_* y}{\nu} \right) + 5.5 \right] dy \right) \quad (\text{II.22})$$

Resolviendo la integral

$$U = u_* \left[ 2.5 \ln \left( \frac{u_* h}{\nu} \right) - 38.6 \left( \frac{\nu}{u_* h} \right) + 3 \right] \quad (\text{II.23})$$

como  $f = 8 \left( \frac{u_*}{U} \right)^2$

$$f = 8 \left\{ \frac{u_*}{u_* \left[ 2.5 \ln \left( \frac{u_* h}{\nu} \right) - 38.6 \left( \frac{\nu}{u_* h} \right) + 3 \right]} \right\}^2$$

sabiendo que  $R_e = \frac{U h}{\nu}$  y  $u_* = U \sqrt{\frac{f}{8}}$  y simplificando se obtiene

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2.035 \log(R_e \sqrt{f}) - 38.60 (R_e \sqrt{f})^{-1} + 0.141 \quad (\text{II.24})$$

Si se revisan las ecuaciones (II.9) y (II.20) para el caso de conductos circulares y (II.15) y (II.24) para canales anchos, observamos que aparecen términos adicionales que toman en cuenta la contribución de la subcapa viscosa en el cálculo del coeficiente de fricción, además se puede comprobar que si  $R_e \rightarrow \infty$  la contribución de estos términos tiende a cero.

Del análisis de los resultados que arrojan las ecuaciones (II.9) y (II.20) así como las ecuaciones (II.15) y (II.24) se desprende que las diferencias entre ellos no es superior al 0.25% en el primer caso y 0.07% en el segundo caso para números de Reynolds de 100,000; siendo prácticamente nulas las diferencias para números de Reynolds de 100'000,000; lo que permite verificar el argumento de Schlichting de que los errores en que se incurre al suponer que el perfil logarítmico universal de velocidades es válido para toda

la sección transversal son despreciables, por lo menos en lo que corresponde a ignorar la subcapa viscosa.

Para el caso de las ecuaciones (II.9) y (II.10), las diferencias calculadas son menores al 2% en todo el rango de valores del número de Reynolds mencionado en el párrafo anterior.

### **II.1.2.2 Flujo hidráulicamente rugoso**

En el caso de flujo hidráulicamente rugoso, procediendo de manera semejante a lo realizado para flujo hidráulicamente liso, se tiene que para un conducto circular de radio  $R$  como el mostrado en la figura 7, la velocidad media se calcula como

$$U = \frac{1}{A} \int_0^R u dA \quad (\text{II.25})$$

donde  $A = \pi R^2$ ;  $dA = 2\pi r dr$  y  $y = R - r$

Utilizando la ley universal de distribución de velocidades de Prandtl-von Kármán para tubos hidráulicamente rugosos y zona de capa límite turbulenta

$$u = u_* \left[ 2.5 \ln \left( \frac{y}{k_s} \right) + 8.5 \right] \quad (\text{II.26})$$

tenemos

$$U = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R u_* \left[ 2.5 \ln \left( \frac{R-r}{k_s} \right) + 8.5 \right] 2\pi r dr \quad (\text{II.27})$$

resolviendo la integral se obtiene

$$U = u_* \left[ 2.5 \ln \left( \frac{R}{k_s} \right) + 4.75 \right] \quad (\text{II.28})$$

como  $f = 8 \left( \frac{u_*}{U} \right)^2$  se tiene

$$f = 8 \left\{ \frac{u_*}{u_* \left[ 2.5 \ln \left( \frac{R}{k_s} \right) + 4.75 \right]} \right\}^2 \quad (\text{II.29})$$

sabiendo que  $d = 2R$  y simplificando se obtiene

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2.035 \log \left( \frac{k_s}{d} \right) + 1.066 \quad (\text{II.30})$$

De nuevo Schlichting (1979) señala que para lograr un mejor ajuste a los datos experimentales de Nikuradse pueden modificarse ligeramente los coeficientes numéricos de la expresión anterior, de donde resulta la expresión

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2.0 \log \left( \frac{k_s}{d} \right) + 1.139 \quad (\text{II.31})$$

que puede expresarse también como

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2.0 \log \left( \frac{k_s}{3.71d} \right) \quad (\text{II.32})$$

Ahora desarrollando el análisis para un canal ancho con fondo hidráulicamente rugoso y considerando un ancho unitario como el mostrado en la figura 8, se tiene para el cálculo de la velocidad media la expresión

$$U = \frac{1}{A} \int_0^h u dA$$

donde  $A = h$  y  $dA = dy$

utilizando nuevamente la ley universal de distribución de velocidades de Prandtl-von Kármán para zona de capa límite turbulenta

$$u = u_* \left[ 2.5 \ln \left( \frac{y}{k_s} \right) + 8.5 \right]$$

sustituyendo esta expresión para calcular la velocidad media se tiene

$$U = \frac{1}{h} \int_0^h u_* \left[ 2.5 \ln \left( \frac{y}{k_s} \right) + 8.5 \right] dy \quad (\text{II.33})$$

resolviendo la integral obtenemos

$$U = u_* \left[ 2.5 \ln \left( \frac{h}{k_s} \right) + 6 \right] \quad (\text{II.34})$$

utilizando nuevamente la expresión  $f = 8 \left( \frac{u_*}{U} \right)^2$  se tiene

$$f = 8 \left\{ \frac{u_*}{u_* \left[ 2.5 \ln \left( \frac{h}{k_s} \right) + 6 \right]} \right\}^2$$

simplificando

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2.035 \log \left( \frac{k_s}{h} \right) + 2.121 \quad (\text{II.35})$$

o bien, para que coincida con la presentada por Keulegan en 1938, tomando en cuenta sólo dos cifras significativas en el primer coeficiente y aceptando que para un canal ancho  $R_h \approx h$ , resulta

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2.03 \log \left( \frac{k_s}{11.09 R_h} \right) \quad (\text{II.36})$$

### II.1.2.3 Flujo en transición

Por otra parte, frecuentemente la resistencia al flujo en tuberías para el escurrimiento permanente y unidireccional, se evalúa por medio de la ecuación de Darcy-Weisbach como se anotó en el punto I.3.2. Si se despeja la velocidad media de la ecuación (I.25) se obtiene

$$U = \left( \frac{8g R_h S_f}{f} \right)^{1/2} \quad (\text{II.37})$$

Evidentemente, la expresión (II.37) tiene la enorme ventaja de ser dimensionalmente homogénea. En la práctica, cuando el flujo es turbulento, el factor  $f$  se determina empleado en diagrama de Moody o bien, la representación matemática del mismo a través de la formula de Colebrook (Sotelo, 1974):

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left( \frac{2.51}{R_e \sqrt{f}} + \frac{k_s}{3.71d} \right) \quad (\text{II.38})$$

Colebrook (1939) propuso la ecuación (II.38) para la transición entre flujo turbulento hidráulicamente liso e hidráulicamente rugoso. Como se puede observar, dicha ecuación se comporta asintóticamente como la ecuación (II.11) para flujo hidráulicamente liso  $\frac{k_s}{d} \rightarrow 0$ , y como la ecuación (II.32) para flujo hidráulicamente rugoso o con turbulencia completamente desarrollada  $R_e \rightarrow \infty$ .

## **II.2 Resumen histórico de las fórmulas de resistencia al flujo en canales**

El interés por la resistencia al flujo en canales tiene una larga historia; sin embargo, muchos de los esfuerzos por establecer una fórmula para el cálculo del factor de fricción  $f$  se fundamentan en mediciones de laboratorio y/o de campo, que a pesar de ser valiosas son limitadas, sobre todo por que en las fechas en que se realizaron no se contaba con los instrumentos y la tecnología con la que se cuenta actualmente. Además, en muchos de los casos se han hecho ajustes a las expresiones obtenidas mediante procedimientos analíticos con base en estos mismos resultados experimentales ya mencionados.

El francés Antoine Chézy en su reporte acerca del canal L'Yvette que realizara junto con Jean-Rodolphe Perronete en 1775, presentó su famosa ecuación  $U = C\sqrt{R_h S}$ , la cual fue desarrollada y verificada mediante experimentos hechos en un canal de tierra, específicamente en el canal Courpalet y en el río Sena a finales de 1769.

A partir de esta ecuación se han desarrollado varias más, sin embargo una que especialmente resalta por su amplio uso hasta nuestros días es la ecuación de Manning.

El 4 de diciembre de 1889 el ingeniero irlandés Robert Manning presentó su famosa ecuación durante una reunión del *Institute of Civil Engineers* de Irlanda, este trabajo fue posteriormente publicado en un artículo en 1895.

Cabe mencionar que la forma que conocemos actualmente de la fórmula de Manning fue sugerida de manera independiente por Hagen en 1876. También se sabe que Philippe-Gaspard Gauckler hizo una propuesta similar en 1868 y que Strickler hizo lo propio en 1923.

Diversos autores han desarrollado expresiones para determinar el factor de fricción  $f$ . Por ejemplo, para el caso de flujo hidráulicamente liso Prandtl, en 1932, propuso

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2.0 \log(R_e \sqrt{f}) - 0.8 \quad (\text{II.39})$$

ecuación que se obtiene efectuando un pequeño ajuste de los coeficientes a la expresión que resulta de integrar, para un conducto circular, el perfil de velocidades correspondiente a flujo hidráulicamente liso, como se muestra en el punto II.1.2.1.

Por su parte Keulegan en 1938 desarrolló para canales lisos la expresión

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2.03 \log(R_e \sqrt{f}) - 1.08 \quad (\text{II.40})$$

De manera muy similar a la expresión anterior, Reinius, en 1961, desarrolló para canales anchos lisos la ecuación

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2.0 \log(R_e \sqrt{f}) - 1.06 \quad (\text{II.41})$$

Mientras que Tracy y Lester en ese mismo año de 1961 determinaron para canales rectangulares anchos con relación ancho-profundidad entre 7 y 40 la expresión

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2.03 \log(R_e \sqrt{f}) - 1.30 \quad (\text{II.42})$$

Rao (1967) propone en su tesis doctoral "Efectos de la forma sobre las características medias del flujo en flujos turbulentos a través de canales abiertos rectangulares lisos" para la relación ancho-profundidad entre 1 y 30 la expresión

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2.12 \log(R_e \sqrt{f}) - 1.83 \quad (\text{II.43})$$

Como se aprecia la forma funcional de esta serie de ecuaciones es la misma en todos los casos, pero no así el valor de las constantes.

Por otro lado, algunos investigadores han observado la influencia de la relación ancho-profundidad sobre el factor de fricción, pero ninguno ha alcanzado conclusiones satisfactorias.

Reinus (1961) y Shih y Grigg (1967) sostienen que el factor de fricción se reduce cuando decrece la relación ancho-profundidad. Rao en su ya citada tesis doctoral, concluye que existe una relación compleja entre el factor de fricción y la relación ancho-profundidad, probablemente influenciada por los efectos de la forma de la sección transversal y las corrientes secundarias.

Por otro lado Pillai (1970) y Kazemipour y Apelt (1979) intentan calcular factores de corrección que aplicados a los factores de fricción en canales abiertos permitan utilizar las ecuaciones para conductos cerrados para estimar el factor de fricción en canales abiertos.

Pillai utiliza la relación perímetro mojado–radio hidráulico como factor significativo de la forma de la sección transversal mientras que Kazemipour y Apelt usan dos factores de forma, la relación entre perímetro mojado-ancho y la relación profundidad-ancho.

Por su parte Costa y Cabral (2004), utilizando como base el trabajo de Kazemipour y Apelt obtienen la siguiente expresión para calcular la velocidad para flujo uniforme en un canal circular hidráulicamente liso

$$U = 5.16 \sqrt{g R_h S_f} \log \left( 4.51 R_h \sqrt{\frac{g R_h S_f}{\nu}} \right).$$

Myers (1982) encontró en sus experimentos que para el caso de flujo hidráulicamente liso, los factores de fricción para canales rectangulares resultaron mayores en un 8.3% en promedio que para tuberías para un número de Reynolds similar, los rangos en que se efectuaron las mediciones fueron de  $1,000 \leq R_e \leq 100,000$ . A este respecto, cabe señalar que dentro de los resultados reportados se encontraron puntos con un comportamiento opuesto, es decir con valores del coeficiente de rugosidad menores para el caso de canales abiertos comparado con el de tuberías con igual número de Reynolds, dichos puntos corresponden a valores del número de Reynolds cercanos al límite superior utilizado. En referencia a esto, Myers menciona que lo anterior puede deberse al inicio de la transición entre flujo hidráulicamente liso a hidráulicamente rugoso.

De los datos experimentales de Myers se desprende como mejor ajuste la expresión

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2.10 \log(R_e \sqrt{f}) - 1.56 \quad (\text{II.44})$$

Myers también encontró que los métodos de Kazemipour y Apelt y Pillai aplicados a sus mediciones mejoraban los resultados de una diferencia promedio del 8% al 2% con respecto a la ecuación de Prandtl, aunque menciona que estos dos métodos son criticados porque sólo toman en cuenta la forma de la sección transversal.

Lo anterior nos da una idea de que el error inducido por utilizar una expresión de este tipo en el cálculo del factor de fricción para canales abiertos debería rondar por el 6% aproximadamente.

Por otro lado, para el caso de interés de este trabajo, es decir, para el flujo turbulento hidráulicamente rugoso y completamente desarrollado, muchos investigadores (Keulegan, 1938; Zegzhda, 1938; Rouse, 1946; Thijsse, 1949; Sayre y Albertson, 1961; Reinius, 1961, Henderson, 1966, y Graf, 1971, por mencionar sólo algunos) han destinado sus esfuerzos a desarrollar expresiones para el factor de fricción adimensional,  $f$ , que aparece en la fórmula de Darcy-Weisbach, aplicables a flujo en canales (ASCE, 1963; Yen, 1992, Sinhg, 1996 y Yen, 2002), lo anterior motivado principalmente por el origen totalmente empírico de la fórmula de Manning y por la falta de homogeneidad dimensional de la misma.

Dichos esfuerzos han empleado como base el trabajo teórico seminal de Keulegan (1938), quien llevó a cabo la integración del perfil logarítmico de velocidades para flujo turbulento hidráulicamente rugoso en la sección transversal de un canal muy ancho obteniendo una expresión tipo Colebrook para  $f$ , tal y como se muestra en el apartado II.1.2.2. Las fórmulas de este tipo que están disponibles en la literatura despliegan una dispersión notable en los valores de los coeficientes numéricos propuestos por diversos autores, valores que se enumeran en la tabla siguiente, asumiendo que la forma básica de estas expresiones es:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = k_1 \log \left( \frac{k_s}{k_2 R_h} \right) \quad (\text{II.45})$$

donde  $k_1$  y  $k_2$  son coeficientes numéricos con valores según la tabla siguiente

Geometría	Autor	Año	$k_1$	$k_2$
Canal ancho	Keulegan	1938	-2.03	11.09
Canal ancho	Zegzhda	1938	-2.03	11.55
Canal ancho	Rouse	1946	-2.03	10.95
Canal ancho	Thijsse	1949	-2.03	12.20
Canal ancho	Sayre y Albertson	1961	-2.14	8.888
Canal ancho	Reinius	1961	-2.00	12.40
Canal ancho	Henderson	1966	-2.00	12.00
Canal ancho	Graf	1971	-2.00	12.90

*Tabla 1.- Coeficientes de la fórmula para  $f$  para canales anchos*

Se observa que en general el valor del coeficiente  $k_1$  es muy aproximado al valor originalmente planteado por Keulegan de 2.03, salvo en el caso de la fórmula de Sayre y Albertson en la cual este coeficiente toma un valor notablemente mayor 2.14; sin embargo, el coeficiente  $k_2$  si presenta una mayor dispersión variando desde el valor mínimo de 8.888 hasta 12.9 como máximo, comparado con el 11.09 obtenido originalmente.

Cabe mencionar que repitiendo el procedimiento planteado por Keulegan tal y como se muestra en el apartado II.1.2.2, y si se utilizan todas las cifras significativas que manejan las calculadoras actuales, los coeficientes cambian a los valores de 2.035 y 11.023. Es probable entonces, como se menciona en párrafos anteriores, que la variación se deba a que el autor sólo utilizó dos cifras significativas al realizar los cálculos.

Con respecto al comportamiento de las fórmulas desarrolladas para estimar el factor de fricción  $f$  en tuberías aplicadas a canales abiertos, Arthur C.E. Knight (1988) encontró que el utilizar estas fórmulas en canales abiertos substituyendo la relación  $d = 4R_h$  subestima la fricción en los canales comparado con una tubería, pero también asegura el autor que, el error cometido por el efecto de la forma de la sección transversal es pequeño comparado con los errores que se pueden cometer al estimar la rugosidad misma.

En efecto, en un estudio realizado por un grupo de trabajo sobre factores de fricción en canales para el Comité de Hidromecánica de la División de Hidráulica de la Sociedad Americana de Ingenieros Civiles (ASCE, 1963) se afirma la existencia de cierta información empírica que sugiere que los valores de los factores de fricción  $f$  usados en la fórmula de Darcy-Weisbach

(ecuación II.37), podrían ser relativamente insensibles a la forma geométrica de la sección transversal del canal, siendo el radio hidráulico la única característica geométrica que tendría un papel importante en la estimación de la resistencia al flujo en canales. No obstante lo anterior, el estudio citado no ofrece evidencia concreta en ese sentido.

Por todo lo anterior, en los siguientes capítulos se trabajará en la determinación de una fórmula para el factor de fricción  $f$  para canales anchos, así como una fórmula para canales trapeciales, buscando de esta manera comprobar las hipótesis planteadas.

## Capítulo III

*Tratamiento analítico de los casos de  
canales circulares y canales anchos*

En este capítulo se analiza en primer término el caso de flujo en un canal circular completamente lleno, corrigiendo el proceso de integración propuesto por Schlichting (1979) y presentado a detalle en el capítulo anterior, con el objeto de explicar la dispersión de los coeficientes numéricos que dan lugar a la ecuación (II.11).

Posteriormente se revisa el trabajo de Keulegan (1938) que de igual manera se presentó a detalle en el capítulo anterior, pero ahora corrigiendo el proceso de integración empleado por dicho autor para explicar la dispersión observada en los coeficientes numéricos de las fórmulas tipo Colebrook (II.45) propuestas por diversos autores para flujo uniforme en canales anchos.

Una vez hecho lo anterior, se demuestra que la fórmula de Manning es un ajuste de potencia a la expresión que verdaderamente describe el comportamiento del factor de fricción de Darcy-Weisbach para canales anchos. Dicho ajuste es razonable para un cierto rango de valores de la rugosidad relativa y se muestra que valores altos del factor de fricción de Manning corresponden a rugosidades sin sentido físico.

### ***III.1. El factor de fricción $f$ en conductos circulares***

En flujo unidireccional, turbulento, uniforme, permanente e hidráulicamente rugoso, la subcapa viscosa no existe, y la ley de pared toma la forma de la distribución logarítmica universal de velocidades de Schlichting (1979)

$$\frac{u}{u_*} = 2.5 \ln \left( \frac{y}{k_s} \right) + 8.5$$

La distribución logarítmica dada por la ecuación (I.18), válida en el interior de la capa límite, se traslapa asintóticamente con la llamada ley de déficit (o defecto) de velocidad, que también posee carácter logarítmico (Panton, 1984), la cual aplica en el resto de la región de flujo.

Ahora bien, es conocido que el error que se comete al considerar que la ecuación (I.18) es aplicable fuera de la capa límite, con el propósito de determinar la velocidad media en la sección transversal, es pequeño (Yen, 1992). Con base en una observación de este tipo, Schlichting (1979) realizó la integración de la ecuación (I.18) en la sección transversal de la tubería circular, como se presentó en el apartado II.1.2.2, de donde se obtuvo la ecuación siguiente

$$f = \left[ -2.035 \log \left( \frac{k_s}{d} \right) + 1.066 \right]^{-2} \quad (\text{III.1})$$

Como se recordará, para reproducir los datos experimentales de Nikuradse, Schlichting propone modificar ligeramente los coeficientes numéricos presentes en dicha fórmula, para finalmente obtener la expresión, que es equivalente a las ecuaciones (II.31) y (II.32)

$$f = \left[ -2.0 \log \left( \frac{k_s}{d} \right) + 1.139 \right]^{-2} \quad (\text{III.2})$$

Ahora bien, el límite del integrado indicado en la ecuación (II.27) cuando  $r \rightarrow R$  es  $-\infty$ , lo cual proviene del hecho que la ecuación (II.26) implica que  $\lim_{y \rightarrow 0} u(y) = -\infty$ , que evidentemente es físicamente inviable.

De hecho, la ecuación (I.18) no es válida para  $y=0$  ( $r=R$ ) y tomar los límites de integración en la ecuación (II.27) como  $r=0$  a  $r=R$  produce una contribución negativa al cálculo de la velocidad media  $U$ . Esto demuestra que es erróneo calcular  $U$  integrando el perfil logarítmico de velocidades tomando como límite superior a  $r=R$ .

En estricto sentido, la ecuación  $\frac{u}{u_*} = 2.5 \ln \left( \frac{y}{k_s} \right) + 8.5$  es válida a partir del valor  $y = \psi k_s$ , que corresponde a  $u=0$  esto es  $0 = 2.5 \ln \left( \frac{\psi k_s}{k_s} \right) + 8.5$ , que implica que  $\psi = 0.033373629$ .

De manera similar a lo desarrollado en el punto II.1.2.2, pero con la diferencia de que una pequeña zona cercana a la pared del tubo de espesor  $\psi k_s$  no se considera para el cálculo del área total a través de la cual se mueve el flujo y por consecuencia, se modifica el límite superior de integración para el cálculo de la velocidad media restándole al radio del conducto circular el espesor antes mencionado. De la figura 7 se obtiene

$$A = \pi(R - \psi k_s)^2; \quad dA = 2\pi r dr; \quad y = R - r$$

Por lo que, utilizando la definición de velocidad media  $U = \frac{1}{A} \int_0^R u dA$ , en este trabajo se propone el cálculo de ésta velocidad media  $U$  en la sección transversal circular como:

$$U = \frac{1}{\pi(R - \psi k_s)^2} \int_0^{R - \psi k_s} u_* \left[ 2.5 \ln \left( \frac{R - r}{k_s} \right) + 8.5 \right] 2\pi r dr \quad (\text{III.3})$$

Al comparar las ecuaciones (II.27) y (III.3) se observa que no sólo se modifica el límite superior de integración, sino también el área a través de la cual se mueve el fluido. Al resolver la integral se llega a la expresión

$$U = \frac{u_* R^2}{(R - \psi k_s)^2} \left\{ 2.5 \ln \left( \frac{R}{k_s} \right) - 1.25 \left( \frac{\psi k_s}{R} \right)^2 - 3.5 \left( \frac{\psi k_s}{R} \right) + 4.75 \right\} \quad (\text{III.4})$$

como  $f = 8 \left( \frac{u_*}{U} \right)^2$  y  $d = 2R$ , simplificando resulta

$$f = \left\{ \frac{1}{\left( 1 - \frac{2\psi k_s}{d} \right)^2} \left[ -2.035 \log \left( \frac{k_s}{d} \right) - 1.76 \left( \frac{\psi k_s}{d} \right)^2 - 2.47 \left( \frac{\psi k_s}{d} \right) + 1.066 \right] \right\}^{-2} \quad (\text{III.5})$$

Como es de esperarse, las ecuaciones (II.30) y (III.5) coinciden cuando  $\psi = 0$ . En la figura 10 se muestra la comparación de los resultados producidos por la ecuación (II.32), cuyos coeficientes fueron modificados empíricamente para ajustar los datos experimentales y los que corresponden a la ecuación (III.5) recién obtenida.

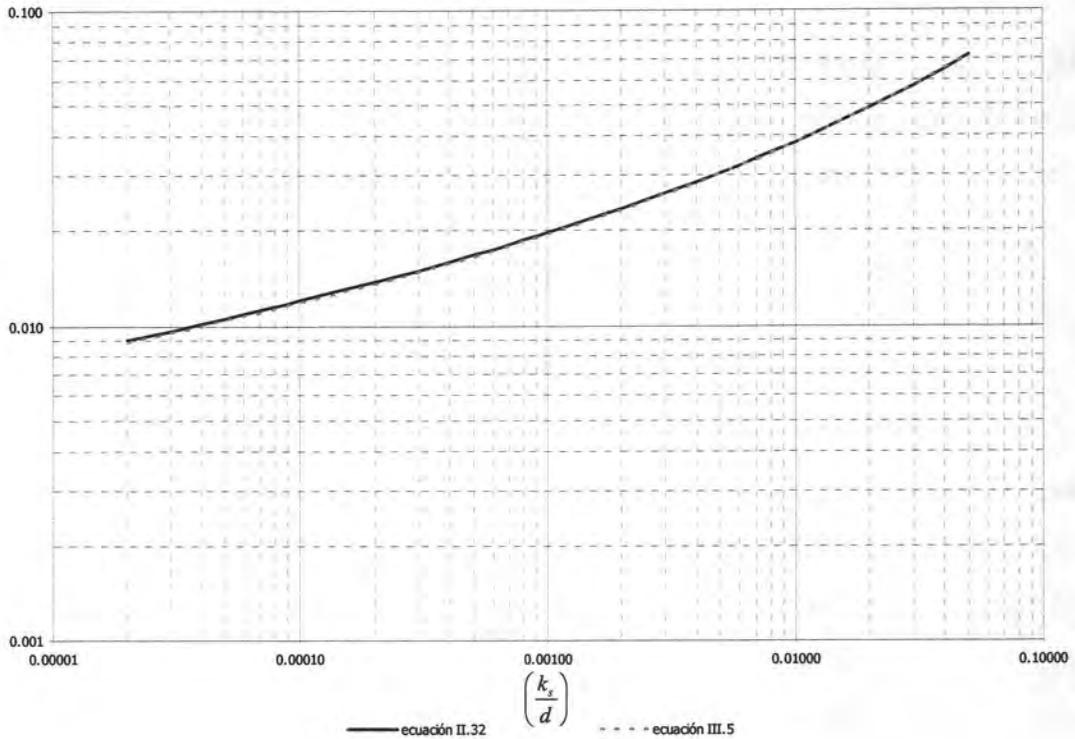


Figura 10.- Comparación de los valores de  $f$  para conducto circular

Como puede observarse, las gráficas prácticamente se traslapan en el rango  $\frac{k_s}{d} \in [0.00002, 0.05]$ , que es equivalente al rango  $\frac{k_s}{R_h} \in [0.00008, 0.2]$  puesto que para un conducto circular  $d = 4R_h$  y corresponde al presentado en el diagrama de Moody para flujo hidráulicamente rugoso (Sotelo, 1974).

Este resultado muestra que no hay necesidad de ajustar empíricamente los coeficientes de la fórmula para calcular el factor de fricción  $f$ , siempre y cuando se emplee el rango espacial sobre el cual puede suponerse válido el perfil logarítmico de velocidades y, por tanto, se use la ecuación (III.5).

Debe hacerse hincapié en que los resultados presentados en esta sección son válidos para conductos circulares trabajando a presión o canales circulares llenos en los que el escurrimiento es uniforme. En este caso, como ya se mencionó anteriormente, se tiene igualdad entre la pendiente de fricción,  $S_f$ , y la pendiente del fondo del canal,  $S_0$ .

### **III.1.1 Conductos circulares con tirante igual a la mitad del diámetro**

A continuación se presenta el análisis correspondiente al caso particular de un conducto circular con flujo uniforme, el cual presenta un tirante igual a la mitad del diámetro.

En este caso, las ecuaciones que definen al área por la cual se transporta el flujo, así como su diferencial se transforman en

$$A = \frac{\pi (R - \psi k_s)^2}{2}; \quad dA = \pi r dr; \quad y = R - r$$

por lo que, nuevamente utilizando la definición de velocidad media

$$U = \frac{1}{A} \int_0^R u dA \text{ apropiadamente, la velocidad media } U \text{ se calcula como}$$

$$U = \frac{2}{\pi (R - \psi k_s)^2} \int_0^{R - \psi k_s} u_* \left[ 2.5 \ln \left( \frac{R - r}{k_s} \right) + 8.5 \right] \pi r dr$$

que coincide con la ecuación (III.3), por lo que la integración y la obtención del factor de fricción  $f$  son iguales para ambos casos.

### **III.2 El factor de fricción $f$ para canales rectangulares anchos**

Los resultados mostrados en la sección anterior permiten ahora abordar el caso de canales rectangulares anchos. Según se mencionó anteriormente, Keulegan (1938) supuso que el perfil logarítmico universal de velocidades para flujo turbulento hidráulicamente rugoso (I.18), es aplicable para toda la sección transversal de un canal ancho. Como ya se mencionó también, esa hipótesis resulta muy razonable (Schlichting, 1979; Yen, 1992). Entonces, el citado autor estableció una fórmula para el factor de fricción,  $f$ , integrando la ecuación (I.18) para determinar la velocidad media en el canal como se presenta en el apartado II.1.2.2, así Keulegan obtuvo una expresión de la forma

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -a \log \left( \frac{k_s}{bh} \right) \quad (\text{III.6})$$

donde, como ya se mencionó anteriormente, si se consideran sólo dos cifras significativas las constantes toman los valores de  $a=2.03$  y  $b=11.09$  respectivamente.

Es interesante notar que como se muestra en la tabla 1, diversos autores han comprobado experimentalmente que la ecuación (III.6) reproduce observaciones, modificando los valores numéricos de los parámetros  $a$  y  $b$  que aparecen en ella.

A continuación se presenta un análisis similar al desarrollado por Keulegan (1938), con una ligera, pero importante modificación que puede explicar la dispersión observada en los valores de  $b$  determinados empíricamente.

En forma análoga a lo expuesto para el caso de conductos circulares, se puede afirmar que es erróneo emplear el límite inferior  $y=0$  para integrar el perfil logarítmico de velocidades (I.18), ya que  $\lim_{y \rightarrow 0} u(y) = -\infty$ , lo cual es no físicamente factible y produce una contribución negativa en el cálculo de  $\int_0^h u(y) dy$  para la determinación de  $U$ .

En vista de lo anterior, se propone la siguiente definición de velocidad media para canales anchos en la que la distribución de velocidades está dada por la ecuación (I.18)

$$U = \frac{1}{(h - \psi k_s)} \int_{\psi k_s}^h u_* \left[ \kappa^{-1} \ln \left( \frac{y}{k_s} \right) + B \right] dy \quad (\text{III.7})$$

donde,  $\psi = 0.033373269$ .

En forma análoga a lo realizado en el caso de conductos circulares, en la definición de la velocidad media en canales anchos a través de la ecuación (III.7), se modifica no solamente el límite inferior de integración, sino también el área unitaria a través de la cual fluye el líquido. Llevando a cabo la integración indicada en la ecuación (III.7) se obtiene el siguiente resultado

$$U = u_* \left[ B - \frac{1}{\kappa \left( 1 - \psi \frac{k_s}{h} \right)} \left[ \ln \left( \frac{k_s}{h} \right) + \psi \frac{k_s}{h} \ln(\psi) \right] - \frac{1}{\kappa} \right] \quad (\text{III.8})$$

Combinando la ecuación (III.8) con la ecuación (II.7), sustituyendo en ésta  $f_t$  por  $f$ , se llega a la siguiente expresión para el factor de fricción teórico,  $f_t$

$$\frac{1}{\sqrt{f_t}} = -\frac{\tilde{\alpha}}{\left(1 - \psi \frac{k_s}{h}\right)} \left[ \log\left(\frac{k_s}{h}\right) - \tilde{c}\left(\frac{k_s}{h}\right) \right] + \tilde{d} \quad \text{(III.9)}$$

donde  $\tilde{\alpha} = 2.035216917$ ,  $\tilde{c} = 0.049279011$  y  $\tilde{d} = 2.121320344$ . Puede parecer innecesario escribir los valores de los parámetros  $\tilde{\alpha}$ ,  $\tilde{c}$ , y  $\tilde{d}$  con tantas cifras significativas, pero como se mostrará posteriormente, esto es un requisito para explicar la dispersión de valores experimentales en el valor del parámetro  $b$  que aparece en la ecuación (III.6).

Tomando en cuenta los resultados presentados en la sección concerniente a conductos circulares, en el sentido de que la expresión derivada teóricamente para el factor de fricción reproduce observaciones (véase la figura 10), supóngase que la expresión (III.9) sea correcta en la descripción de la resistencia al flujo en canales anchos, con el objeto de comparar los valores del factor de fricción producidos por las ecuaciones (III.6) y (III.9). En este sentido conviene escribir éstas como sigue

$$f = \left[ -a \log\left(\frac{k_s}{h}\right) + a \log(b) \right]^{-2} \quad \text{(III.10)}$$

$$f_t = \left[ -a \log\left(\frac{k_s}{h}\right) + a \log(b) + \tilde{e} \right]^{-2} \quad \text{(III.11)}$$

donde

$$\tilde{e} = \left[ a - \frac{\tilde{a}}{\left(1 - \psi \frac{k_s}{h}\right)} \right] \log\left(\frac{k_s}{h}\right) + \left[ \frac{\tilde{a}\tilde{c}}{\left(1 - \psi \frac{k_s}{h}\right)} \right] \left(\frac{k_s}{h}\right) + [\tilde{d} - a \log(b)] \quad (\text{III.12})$$

Ahora es posible explicar teóricamente la dispersión de valores reportados para el parámetro  $b$ .

Al comparar las ecuaciones (III.10) y (III.11), es evidente que éstas coincidirán siempre y cuando  $\tilde{e} = \tilde{e}\left(\frac{k_s}{h}\right) = 0$ , lo cual se cumplirá para un determinado valor de  $\left(\frac{k_s}{h}\right)$ , como se muestra en la siguiente tabla.

Autor	Año	$a$	$b$	$\left(\frac{k_s}{h}\right)$
Zegzhda	1938	2.03	11.55	0.22153
Rouse	1946	2.03	10.95	0.01199
Thijsse	1949	2.03	12.20	$7.95 \times 10^{-17}$
Sayre y Albertson	1961	2.14	8.888	0.09510
Reinius	1961	2.00	12.40	0.01779
Henderson	1966	2.00	12.00	0.11210
Graf	1971	2.00	12.90	0.00150

Tabla 2.- Valores de  $\left(\frac{k_s}{h}\right)$  que explican la dispersión de  $a$  y  $b$

Estos resultados indican diferentes rangos de valores para la rugosidad relativa  $\left(\frac{k_s}{h}\right)$ , empleados en la determinación empírica de  $a$  y  $b$  (véase ecuación III.6), que pueden explicar la dispersión observada en los valores reportados de  $b$ .

### III.3 Análisis de resultados

Dado que tanto la ecuación (III.5) para conductos circulares fluyendo llenos o la mitad, como la ecuación (III.9) para canales anchos poseen base teórica, es posible comparar sus valores, haciendo  $d = 4R_h$  en la primera ecuación y  $h = R_h$  en la segunda, por lo que las ecuaciones resultan

$$f = \left\{ \frac{2.035}{\left[1 - 0.016686 \left(\frac{k_s}{R_h}\right)\right]^2} \left[ \log\left(\frac{k_s}{R_h}\right) + 0.0000602040 \left(\frac{k_s}{R_h}\right)^2 + 0.0101267782 \left(\frac{k_s}{R_h}\right) - 1.1258929152 \right] \right\}^{-2} \quad \text{(III.13)}$$

$$f_i = \left\{ \frac{2.035216917}{\left[1 - 0.033373269 \left(\frac{k_s}{R_h}\right)\right]} \left[ \log\left(\frac{k_s}{R_h}\right) - 0.049279011 \left(\frac{k_s}{R_h}\right) + 2.121320344 \right] \right\}^{-2} \quad \text{(III.14)}$$

El resultado de dicha comparación se muestra en la figura 11 para el rango  $\left(\frac{k_s}{R_h}\right) \in [0.00008, 0.2]$  que, como se mencionó anteriormente, coincide con el presentado en el diagrama de Moody. Como puede observarse, las curvas para el factor de fricción  $f$  correspondientes a conductos circulares

trabajando llenos, y a canales anchos producen valores que prácticamente coinciden, con diferencias promedio de alrededor del 5%.

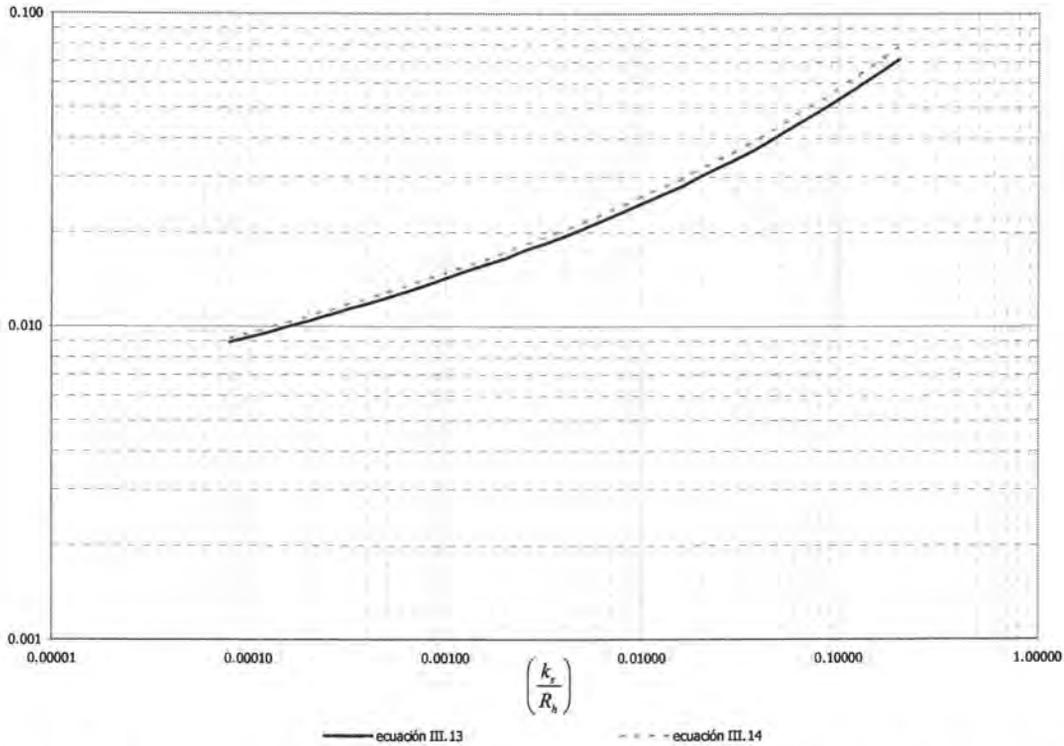


Figura 11.- Comparación de los valores de  $f$  para conducto circular (III.13) y canal ancho (III.14)

Esto brinda mayor peso a la conjetura de que la geometría del canal no tiene un papel importante en la estimación del factor de fricción, más que a través del radio hidráulico. Asimismo, sugiere la posibilidad del desarrollo de una fórmula universal para el factor  $f$  que represente adecuadamente su dependencia con respecto a la rugosidad relativa  $\left(\frac{k_s}{R_h}\right)$ , independientemente de la forma de la sección transversal. Para el efecto, en capítulos posteriores se extiende el estudio hasta aquí presentado para sección circular y canal ancho a otras secciones transversales de uso común en la práctica.

Como un primer paso, se analizarán en el siguiente capítulo las secciones rectangulares así como tres diferentes secciones trapeciales, quedando pendiente para un trabajo posterior los casos de secciones compuestas y secciones irregulares como las que frecuentemente ocurren en casos naturales.

Evidentemente, como en todos los casos mencionados anteriormente no es posible determinar la dependencia funcional del factor  $f$  con respecto a la rugosidad relativa  $\left(\frac{k_s}{R_h}\right)$  en forma analítica, es necesario recurrir a la simulación numérica mediante el uso de algún modelo de turbulencia.

Ahora bien, una variación del 5%, como la que resultó de la comparación entre la fórmula para conductos circulares y canales anchos, en el factor de fricción  $f$  produce un variación de la misma magnitud en la pendiente de fricción  $S_f$ , ya que estos son linealmente proporcionales en la fórmula de Darcy-Weisbach (II.37).

Por otra parte, la fórmula de Manning puede producir variaciones que son varios órdenes de magnitud mayores a la estimación de la pendiente de fricción.

En efecto, Burham y Davis (1990) describen una encuesta en la que se pidió a ochenta Ingenieros del Ejército Americano que estimaran valores para el factor de rugosidad  $n$  de Manning, en diez corrientes naturales muy diferentes entre sí. Para el efecto, se les proporciono una fotografía de la corriente, así como una copia de los valores recomendados por Chow (1959).

En forma por demás interesante, las variaciones en los valores de  $n$  fueron del 300 al 1,000%. Dado que la pendiente de fricción en la fórmula de Manning es directamente proporcional a  $n^2$ , las variaciones correspondientes en  $S_f$  serían del 900 al 100,000%. Esto muestra la gran conveniencia de sustituir la fórmula de Manning por una expresión alternativa que posea base teórica, como la presentada en este trabajo.

## Capítulo IV

### *Modelación numérica del flujo en canales trapeziales*

### IV.1 Canal de sección trapezoidal

Para la modelación numérica del flujo turbulento completamente desarrollado en canales trapeziales, primero se planteó el esquema a resolver como se muestra a continuación.

Al considerar un canal recto con pendiente constante, sección trapezoidal y taludes laterales iguales, como se muestra en la figura

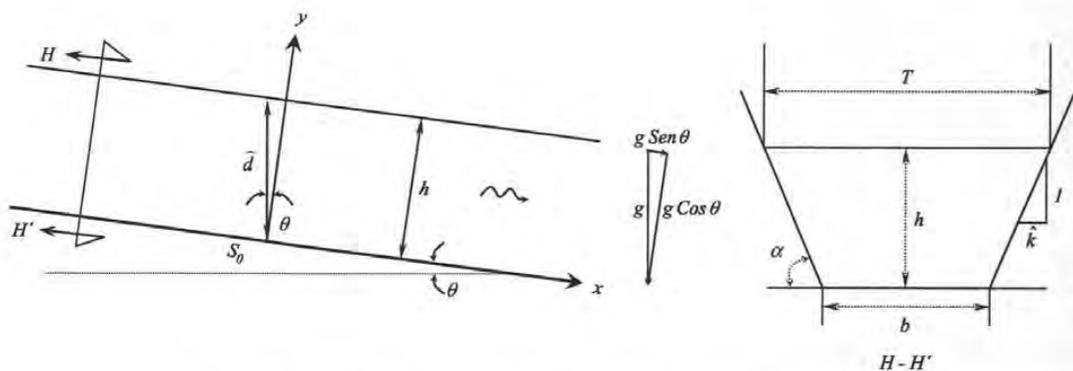


Figura 12.- Canal trapezoidal para simulación numérica

evidentemente se tiene

$$S_0 = \text{Sen } \theta; \quad h = \widehat{d} \text{ Cos } \theta = \widehat{d} \sqrt{1 - S_0^2}; \quad \widehat{k} = \text{Cot } \alpha$$

donde  $\widehat{d}$  es el tirante medido verticalmente,  $\widehat{k}$  es el talud lateral del canal trapezoidal y  $\alpha$  el ángulo con respecto a la horizontal del talud lateral del canal trapezoidal.

## IV.2 Ecuación de Darcy-Weisbach

Como se mencionó en el punto I.3.2, la fórmula de Darcy-Weisbach establece

que  $h_f = \frac{f l U^2}{d 2g}$  para un conducto de sección circular, ya que para este

mismo caso se cumple que  $d = 4 R_h$  se tiene entonces que  $h_f = \frac{f l U^2}{4 R_h 2g}$ , por lo

tanto para flujo uniforme en cualquier sección transversal se puede escribir

$$S_f = S_0 = \frac{f U^2}{8gR_h} = \frac{h_f}{l}$$

Despejando para  $f$  de la ecuación anterior se obtiene

$$f = \frac{8gR_h S_f}{U^2}$$

como  $\tau_0 = g \rho R_h S_f$ , la expresión queda como

$$f = \frac{8\tau_0}{\rho U^2} \tag{IV.1}$$

Para desarrollos posteriores se tomará a la ecuación anterior como la definición de  $f$ , estando, como ya se ha mencionado antes, la velocidad media definida como

$$U = \frac{1}{A} \int_A u dA \tag{IV.2}$$

### IV.3 Ecuaciones de Reynolds

Por otro lado, tenemos que las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento, en su forma conocida como las ecuaciones de Reynolds son respectivamente (Panton, 1984)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{IV.3})$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + g S_0 + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \zeta_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \zeta_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \zeta_{zx}}{\partial z} \right) \quad (\text{IV.4})$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + g \sqrt{1-S_0^2} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \zeta_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \zeta_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \zeta_{zy}}{\partial z} \right) \quad (\text{IV.5})$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \zeta_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \zeta_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \zeta_{zz}}{\partial z} \right) \quad (\text{IV.6})$$

donde  $x$  es la coordenada longitudinal alineada con la dirección principal del flujo,  $y$  es la coordenada perpendicular a la plantilla del canal,  $z$  coordenada perpendicular al plano que forman los ejes  $x-y$ ,  $u$ ,  $v$  y  $w$  las velocidades del flujo en las direcciones  $x$ ,  $y$  y  $z$  respectivamente,  $p$  representa la presión y  $\zeta$  el tensor de esfuerzos, definido como

$$\zeta_{ij} = (\mu + \mu_t) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{IV.7})$$

siendo  $x \equiv x_1$ ,  $y \equiv x_2$ ,  $z \equiv x_3$ ,  $u = u_1$ ,  $v = u_2$ ,  $w = u_3$ , además,  $\mu$  es la viscosidad dinámica y  $\mu_t$  la viscosidad dinámica turbulenta.

#### IV.4 Flujo uniforme y aproximación de capa rígida

Por otro lado, en el caso de flujo uniforme se cumple que la variación con respecto al tiempo y con respecto a la distancia valen cero, tal y como se revisó en el apartado I.1, es decir,  $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow 0$ ,  $\frac{\partial}{\partial x} \rightarrow 0$ .

Adicionalmente, si se desprecian las corrientes secundarias se tiene  $v = w = 0$ , por lo tanto, las ecuaciones de cantidad de movimiento se reducen a la forma

$$g S_0 + \frac{\partial}{\partial y} \left( v_e \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( v_e \frac{\partial u}{\partial z} \right) = 0 \quad (IV.8)$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - g \sqrt{1 - S_0^2} = 0 \quad (IV.9)$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad (IV.10)$$

donde  $v_e = \frac{\mu_e}{\rho} = \nu + \nu_t = \frac{\mu + \mu_t}{\rho}$ , es la viscosidad cinemática efectiva, que incluye el término de la viscosidad cinemática turbulenta  $\nu_t$ .

De la ecuación (IV.9) se obtiene

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\rho g \sqrt{1-S_0^2} \quad (\text{IV.11})$$

por lo que  $p_h - p = -\rho g \sqrt{1-S_0^2} (h-y)$

como  $p_h = 0$  entonces

$$p = \rho g \sqrt{1-S_0^2} (h-y) \quad (\text{IV.12})$$

derivando la expresión anterior con respecto a  $y$  se obtiene

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \rho g \sqrt{1-S_0^2} \frac{\partial}{\partial y} (h-y) = \rho g \sqrt{1-S_0^2} \left( \frac{\partial h}{\partial y} - 1 \right)$$

si se compara la expresión anterior con la ecuación (IV.11) se deduce que

$$\frac{\partial h}{\partial y} = 0$$

lo que se cumple solo si  $h = \text{constante}$ , puesto que la solución trivial  $h = 0$  que también resuelve la expresión anterior, obviamente no es de interés, lo anterior significa que despreciar las corrientes secundarias implica adoptar la hipótesis de capa rígida.

### IV.5 Tensor de esfuerzos

Como es sabido (Aris, 1962), el tensor de esfuerzos es simétrico; esto es

$$\zeta_{ij} = \zeta_{ji} \quad (IV.13)$$

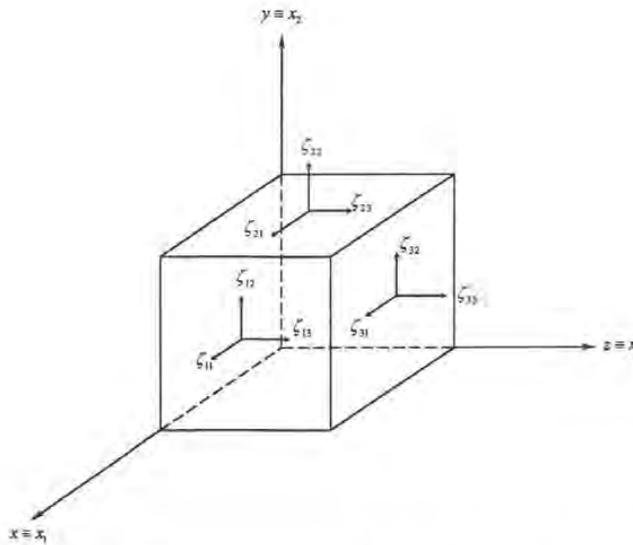


Figura 13.- Componentes del tensor de esfuerzos

Dada la normal  $n$  a una superficie, el esfuerzo actuando sobre esa superficie es

$$\sum_i = \zeta_{ij} n_j = \zeta_{ji} n_j \quad (IV.14)$$

donde  $i$  representa la dirección normal al plano en que actúa  $\zeta_{ij}$  y  $j$  representa la dirección en que actúa  $\zeta_{ij}$ , como se muestra en la figura

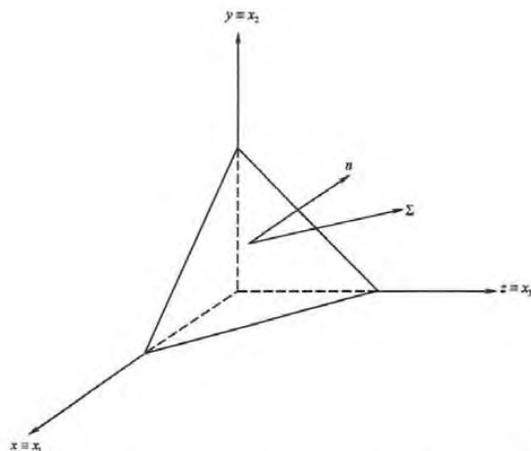


Figura 14.- Esfuerzo actuante sobre una superficie

#### IV.6 Condiciones de frontera

Los esfuerzos que actúan en las fronteras del canal en estudio son los que se muestran en las figuras siguientes

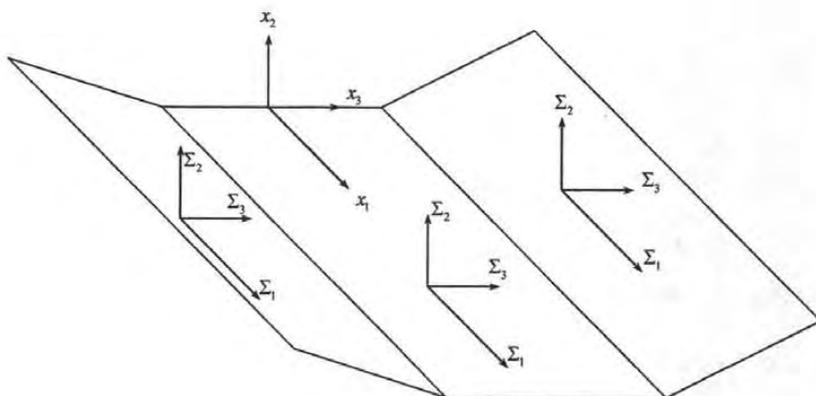


Figura 15.- Esfuerzos actuantes sobre las paredes sólidas

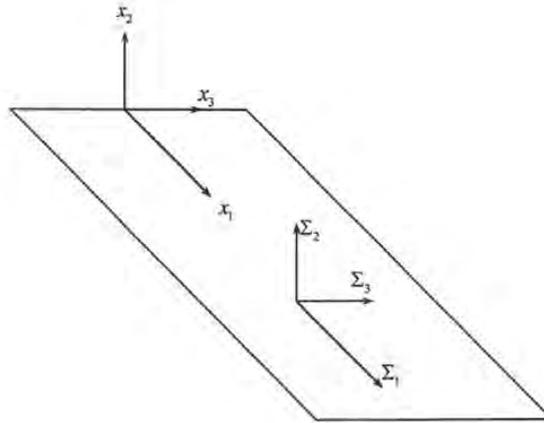


Figura 16.- Esfuerzos actuantes sobre la superficie libre

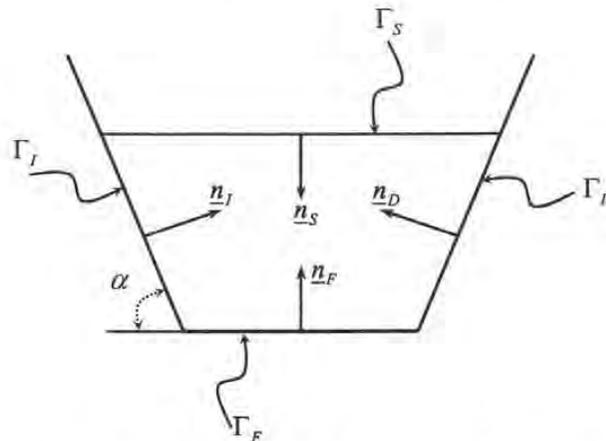


Figura 17.- Esfuerzos actuantes normales

Analizando para el caso de la frontera del fondo  $\Gamma_F$ , tenemos que el vector normal al fondo tiene las componentes

$$\underline{n}_F = (0,1,0) \tag{I.15}$$

utilizando la definición mostrada en la ecuación (IV.14) se obtiene

$$\sum_1 = \zeta_{11}n_1 + \zeta_{12}n_2 + \zeta_{13}n_3 = \zeta_{11}(0) + \zeta_{12}(1) + \zeta_{13}(0) = \zeta_{12} \quad (\text{IV.16a})$$

$$\sum_2 = \zeta_{21}n_1 + \zeta_{22}n_2 + \zeta_{23}n_3 = \zeta_{21}(0) + \zeta_{22}(1) + \zeta_{23}(0) = \zeta_{22} \quad (\text{IV.16b})$$

$$\sum_3 = \zeta_{31}n_1 + \zeta_{32}n_2 + \zeta_{33}n_3 = \zeta_{31}(0) + \zeta_{32}(1) + \zeta_{33}(0) = \zeta_{32} \quad (\text{IV.16c})$$

de la misma forma, de las figuras 12 y 17 se obtiene para la frontera izquierda  $\Gamma_I$ ,

$$\underline{n}_I = (0, \text{Sen } \alpha, \text{Cos } \alpha) \quad (\text{IV.17})$$

utilizando de nueva cuenta la definición mostrada en la ecuación (IV.14) obtenemos

$$\sum_1 = \zeta_{12} \text{Sen } \alpha + \zeta_{13} \text{Cos } \alpha \quad (\text{IV.18a})$$

$$\sum_2 = \zeta_{22} \text{Sen } \alpha + \zeta_{23} \text{Cos } \alpha \quad (\text{IV.18b})$$

$$\sum_3 = \zeta_{32} \text{Sen } \alpha + \zeta_{33} \text{Cos } \alpha \quad (\text{IV.18c})$$

Para la frontera derecha  $\Gamma_D$  tenemos

$$\underline{n}_D = (0, \text{Sen } \alpha, -\text{Cos } \alpha) \quad (\text{IV.19})$$

$$\sum_1 = \zeta_{12} \text{Sen } \alpha - \zeta_{13} \text{Cos } \alpha \quad (\text{IV.20a})$$

$$\sum_2 = \zeta_{22} \text{Sen } \alpha - \zeta_{23} \text{Cos } \alpha \quad (\text{IV.20b})$$

$$\sum_3 = \zeta_{32} \text{Sen } \alpha - \zeta_{33} \text{Cos } \alpha \quad (\text{IV.20c})$$

en la superficie libre  $\Gamma_s$  se obtiene

$$\underline{n}_s = (0, -1, 0) \quad (\text{IV.21})$$

$$\sum_1 = -\zeta_{12} \quad (\text{IV.22a})$$

$$\sum_2 = -\zeta_{22} \quad (\text{IV.22b})$$

$$\sum_3 = -\zeta_{32} \quad (\text{IV.22c})$$

Por otro lado, en el fondo  $\Gamma_F$  supondremos que es aplicable una ley de pared del tipo

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u_*}{\kappa y} \text{ en } y = \psi k_s \quad (\text{IV.23})$$

donde  $\psi = 0.033373629 \approx \frac{1}{30}$  es una constante numérica, tal que  $u = 0$  para

$y = \psi k_s$ , esto es  $\frac{u}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln\left(\frac{y}{\psi k_s}\right)$ , entonces, (IV.23) adopta la forma

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u_*}{\kappa \psi k_s}$$

(IV.24)

pero por la ecuación (I.9) tenemos

$$u_* = \sqrt{\frac{|\sum_1|}{\rho}} = \sqrt{\frac{|\zeta_{12}|}{\rho}} \quad (\text{IV.25})$$

entonces, usando la ecuación (IV.7) se obtiene

$$u_* = \sqrt{v_e \frac{\partial u}{\partial y}}$$

(IV.26)

sustituyendo (IV.26) en (IV.24)

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\kappa \psi k_s} \sqrt{v_e \frac{\partial u}{\partial y}} \quad (IV.27)$$

entonces para el fondo  $\Gamma_F$  se obtiene

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{v_e}{\kappa^2 \psi^2 k_s^2} \text{ en } y = \psi k_s \quad (IV.28)$$

En la pared lateral derecha se tiene,

$$\frac{\partial u}{\partial \underline{n}_D} = \nabla u \cdot \underline{n}_D = \mu_e \frac{\partial u}{\partial y} \text{Sen} \alpha - \mu_e \frac{\partial u}{\partial z} \text{Cos} \alpha = \frac{u_*}{\kappa \psi k_s} \text{ en } \underline{n}_D = \psi k_s \quad (IV.29)$$

en este caso

$$u_* = \sqrt{\frac{|\sum_1|}{\rho}} = \sqrt{\frac{\text{Sgn}(\sum_1) \sum_1}{\rho}} = \sqrt{\frac{1}{\rho} \text{Sgn} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \text{Sen} \alpha - \frac{\partial u}{\partial z} \text{Cos} \alpha \right) \left( \frac{\partial u}{\partial y} \text{Sen} \alpha - \frac{\partial u}{\partial z} \text{Cos} \alpha \right)}$$

como  $\text{Sen} \alpha > 0$ ,  $\text{Cos} \alpha > 0$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y} > 0$ ,  $\frac{\partial u}{\partial z} > 0$  y además  $\frac{\partial u}{\partial y} > \frac{\partial u}{\partial z}$  entonces

$$u_* = \sqrt{v_e \left( \frac{\partial u}{\partial y} \text{Sen } \alpha - \frac{\partial u}{\partial z} \text{Cos } \alpha \right)} \quad (\text{IV.30})$$

como  $u_* = \sqrt{v_e \frac{\partial u}{\partial y}}$  y  $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{v_e}{\kappa^2 \psi^2 k_s^2}$  tenemos  $u_* = \frac{v_e}{\kappa \psi k_s}$ , substituyendo en (IV.30) se obtiene

$$\frac{\partial u}{\partial y} \text{Sen } \alpha - \frac{\partial u}{\partial z} \text{Cos } \alpha = \frac{v_e}{\kappa^2 \psi^2 k_s^2} \text{ en } n_D = \psi k_s \quad (\text{IV.31})$$

Por analogía, en la frontera izquierda  $\Gamma_l$ , se tiene

$$\frac{\partial u}{\partial y} \text{Sen } \alpha + \frac{\partial u}{\partial z} \text{Cos } \alpha = \frac{v_e}{\kappa^2 \psi^2 k_s^2} \text{ en } n_l = \psi k_s \quad (\text{IV.32})$$

finalmente, para la frontera superior  $\Gamma_s$ , se tiene

$$\sum_i = 0$$

entonces utilizando las ecuaciones (IV.7) y (IV.22a) se obtiene que

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (\text{IV.33})$$

### IV.7 Ecuaciones de movimiento y condiciones de frontera

Por simetría, el dominio a considerar para la simulación numérica será el siguiente

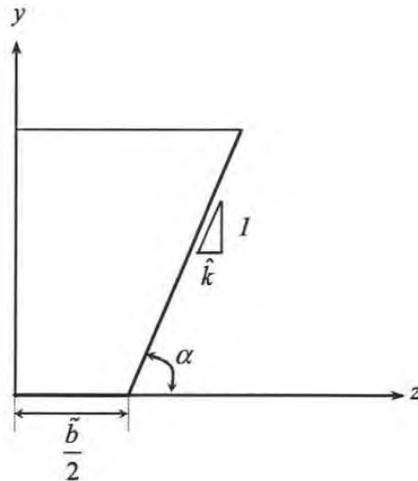


Figura 18.- Dominio a resolver en el modelo numérico

Por tanto, el problema a resolver será

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( v_e \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( v_e \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -g S_0 \quad (\text{IV.34})$$

con dominios

$$z \in \left[ 0, \frac{\tilde{b}}{2} + \hat{k} h \right]$$

$$y \in [0, h] \text{ para } z \in \left[ 0, \frac{\tilde{b}}{2} \right] \text{ y } y \in \left[ \frac{z - \frac{\tilde{b}}{2}}{\hat{k}}, h \right] \text{ para } z \in \left[ \frac{\tilde{b}}{2}, \frac{\tilde{b}}{2} + \hat{k} h \right]$$

Para la frontera de fondo se tiene

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{v_e}{\kappa^2 \psi^2 k_s^2} \quad (\text{IV.35})$$

dentro del dominio

$$z \in \left[ 0, \frac{\tilde{b}}{2} - (\sqrt{1 + \hat{k}^2} - \hat{k}) \psi k_s \right] \text{ para } y = \psi k_s$$

Para la frontera en la pared lateral se tiene

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \hat{k}^2}} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\hat{k}}{\sqrt{1 + \hat{k}^2}} \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{v_e}{\kappa^2 \psi^2 k_s^2} \quad (\text{IV.36})$$

donde

$$z \in \left[ \frac{\tilde{b}}{2} - (\sqrt{1 + \hat{k}^2} - \hat{k}) \psi k_s, \frac{\tilde{b}}{2} + \hat{k} h - \sqrt{1 + \hat{k}^2} \psi k_s \right] \text{ para } y = \frac{z - \frac{\tilde{b}}{2}}{\hat{k}} + \frac{\sqrt{1 + \hat{k}^2}}{\hat{k}} \psi k_s$$

En la superficie se tiene

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (\text{IV.37})$$

$$\text{donde } z \in \left[ 0, \frac{\tilde{b}}{2} + \hat{k} h - \sqrt{1 + \hat{k}^2} \psi k_s \right] \text{ para } y = h$$

Finalmente en el eje de simetría se tiene

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (IV.38)$$

donde  $z = 0$  para  $y \in [0, h]$

#### **IV.8 Modelo de cerradura y ecuaciones para $k$ y $\varepsilon$**

Se empleará el modelo  $k-\varepsilon$  para el que la viscosidad turbulenta toma la forma

$$v_t = C_v \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (IV.39)$$

donde  $C_v = 0.09$  (Rodi, W., 1984)

Las formas apropiadas de las ecuaciones de transporte para  $k$  y  $\varepsilon$  en este caso son (Rodi, W., 1984, García, F. V., 2001)

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{v_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{v_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial z} \right) + v_t \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] - \varepsilon = 0 \quad (IV.40)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right) + c_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} v_t \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] - c_{2\varepsilon} \frac{\varepsilon^2}{k} = 0 \quad (IV.41)$$

donde  $\sigma_k = 1$  ;  $\sigma_\varepsilon = 1.3$  ;  $c_{1\varepsilon} = 1.44$  ;  $c_{2\varepsilon} = 1.92$

### IV.9 Condiciones de frontera para $k$ y $\varepsilon$

De acuerdo con Rodi (1984), las condiciones de frontera apropiadas para  $k$  y  $\varepsilon$  serían

$$k = \frac{u_*^2}{\sqrt{C_v}} \quad (IV.42)$$

$$\varepsilon = \frac{u_*^3}{\kappa \psi k_s} \quad (IV.43)$$

para el fondo del canal, si se substituye la expresión (IV.26) en (IV.42) se tiene

$$k = \frac{v_e}{\sqrt{C_v}} \frac{\partial u}{\partial y}$$

y substituyendo a su vez la expresión (IV.28) se obtiene finalmente

$$k = \frac{v_e^2}{\sqrt{C_v} \kappa^2 \psi^2 k_s^2} \quad (IV.44)$$

Procediendo de igual forma para  $\varepsilon$  se llega a

$$\varepsilon = \frac{u_*^3}{\kappa \psi k_s} = \frac{\left( v_e \frac{\partial u}{\partial y} \right)^{3/2}}{\kappa \psi k_s} = \frac{v_e^3}{\kappa^4 \psi^4 k_s^4} \quad (IV.45)$$

con el domino para ambos casos igual a

$$z \in \left[ 0, \frac{\tilde{b}}{2} - (\sqrt{1+\hat{k}^2} - \hat{k}) \psi k_s \right] \text{ para } y = \psi k_s$$

De manera análoga a lo anterior pero ahora para el caso de la frontera en la pared lateral del canal se obtiene

$$k = \frac{v_e}{\sqrt{c_v}} \left( \frac{1}{\sqrt{1+\hat{k}^2}} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\hat{k}}{\sqrt{1+\hat{k}^2}} \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \frac{v_e^2}{\sqrt{C_v} \kappa^2 \psi^2 k_s^2} \quad (\text{IV.46})$$

$$\varepsilon = \frac{1}{\kappa \psi k_s} \left[ v_e \left( \frac{1}{\sqrt{1+\hat{k}^2}} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\hat{k}}{\sqrt{1+\hat{k}^2}} \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right]^{\frac{3}{2}} = \frac{v_e^3}{\kappa^4 \psi^4 k_s^4} \quad (\text{IV.47})$$

De igual forma, con el domino para ambos casos de

$$z \in \left[ \frac{\tilde{b}}{2} - (\sqrt{1+\hat{k}^2} - \hat{k}) \psi k_s, \frac{\tilde{b}}{2} + \hat{k} h - \sqrt{1+\hat{k}^2} \psi k_s \right] \text{ para } y = \frac{z - \frac{\tilde{b}}{2}}{\hat{k}} + \frac{\sqrt{1+\hat{k}^2}}{\hat{k}} \psi k_s$$

Para la frontera superior se tiene

$$\frac{\partial k}{\partial y} = 0 \quad (\text{IV.48})$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = 0 \quad (\text{IV.49})$$

dentro del dominio  $z \in \left[ 0, \frac{\tilde{b}}{2} + \hat{k} h - \sqrt{1 + \hat{k}^2} \psi k_s \right]$  para  $y = h$

Finalmente para la frontera que se forma en el eje de simetría se tiene

$$\frac{\partial k}{\partial y} = 0 \quad (\text{IV.50})$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = 0 \quad (\text{IV.51})$$

dentro del dominio  $z = 0$  para  $y \in [0, h]$

Una vez analizado el problema resolver se procedió a implementar dichas ecuaciones en el programa de cómputo PHOENICS.

#### **IV.10 Modelación numérica**

Una vez implementado el modelo descrito en los párrafos anteriores, se procedió a validarlo tratando de reproducir los resultados analíticos obtenidos para el caso de un canal ancho.

Como se mencionó el modelo numérico permitirá solucionar el problema planteado, para el caso particular de capa rígida haciendo uso del modelo de turbulencia  $k - \varepsilon$ .

El primer paso es definir la geometría a utilizar. Posteriormente, utilizando la ecuación de Manning, se procede a calcular la condición de flujo uniforme para un coeficiente de rugosidad  $n$  y velocidad media del flujo  $U$  dados.

Una vez que se hizo lo anterior, se tiene para las condiciones descritas la pendiente de fricción  $S_f$  y el tirante normal  $h$ , todos calculados haciendo uso nuevamente de la ecuación de Manning.

Una vez definidas las condiciones para flujo uniforme se procede a realizar las simulaciones manteniendo el tirante fijo (aproximación de capa rígida), así como la pendiente de fricción y el gradiente de presión, para cada una de las rugosidades relativas que se seleccionen.

A este respecto, se decidió por motivos de comparación y principalmente por motivos históricos, usar los valores de rugosidad relativa reportados por Nikuradse (Schlichting, 1979), aunque vale la pena comentar que en el caso de Nikuradse los valores representan la relación entre el radio de un conducto circular entre el valor de la rugosidad absoluta  $\left(\frac{R}{k_s}\right)$ .

Como en un conducto circular se cumple que  $d = 4R_h$  y como  $d = 2R$ , entonces  $R = 2R_h$ , utilizando las expresiones anteriores, los valores reportados por Nikuradse se llevarán a la forma  $\left(\frac{k_s}{R_h}\right)$  mediante las conversiones respectivas.

En la tabla siguiente se muestran los valores reportados por Nikuradse y su respectiva equivalencia a rugosidad relativa, tomando como longitud característica al radio hidráulico.

$\left(\frac{R}{k_s}\right)$	$\left(\frac{k_s}{R}\right)$	$\left(\frac{k_s}{R_h}\right)$
15.0	0.06667	0.13333
30.6	0.03267	0.06536
60.0	0.01667	0.03333
126.0	0.00794	0.01587
252.0	0.00397	0.00794
507.0	0.00197	0.00394
1986.0	0.00050	0.00100

*Tabla 3.- Valores de rugosidad reportados por Nikuradse.*

Ahora, para cada rugosidad relativa se determina la rugosidad absoluta utilizando el valor de la tercer columna de la tabla anterior y el valor constante del radio hidráulico para cada bloque de simulaciones, puesto que éste no cambia al considerarse la aproximación de capa rígida.

Como se mencionó anteriormente, al realizar las simulaciones numéricas, para efectos de comparación se conservaron constantes las características geométricas e hidráulicas seleccionadas en un principio, es decir, la sección transversal permanece constante para simular el bloque de siete diferentes valores de la rugosidad relativa, manteniendo también constantes los valores obtenidos para la pendiente de fricción y el gradiente de presiones, por lo que solamente se varió el valor de la rugosidad absoluta.

El modelo resuelve para la velocidad hasta que se establece el flujo uniforme, en el proceso de solución tanto el valor de la velocidad al cortante  $u_*$ , como el del esfuerzo cortante en el fondo y las paredes  $\tau_0$  son obtenidos de

manera puntual en los nodos solución del esquema numérico, con éstos, se procede a realizar una integración numérica para obtener los valores medios.

Una vez hecho lo anterior se utiliza la relación  $f = \frac{8\tau_0}{\rho U^2}$  (ecuación IV.1) para obtener el valor buscado de coeficiente de fricción para una relación de rugosidad relativa  $\left(\frac{k_s}{R_h}\right)$  única. El proceso descrito anteriormente se repite variando exclusivamente la forma de la sección transversal tal como se presentará más adelante.

#### **IV.11 Resultados para canal ancho**

Como se mencionó en el punto anterior, se deben de elegir las condiciones de flujo uniforme. En este caso, se utilizaron los siguientes datos

Coeficiente de rugosidad de Manning,  $n = 0.014$

Canal ancho (ancho unitario),  $b = 1.0$  m

Velocidad media del flujo,  $U = 1.3$  m/s

Con los datos anteriores se determinó el tirante normal, así como la pendiente de fricción, que resultaron

Tirante normal  $h = 1.22$  m

Pendiente de fricción  $S_f = 0.0002541$

Para este caso el valor del radio hidráulico coincide con el tirante por lo que  $R_h = 1.22$  m

Con los resultados anteriores se puede ahora calcular los valores a introducir al modelo numérico. En primer término, la rugosidad equivalente  $k_s$ , que se determina usando los valores de la tercer columna de la tabla anterior y el resultado del radio hidráulico que se conserva constante. En segundo término se calcula el valor de la pendiente de fricción haciendo uso de la ecuación de

Manning  $S_f = \left( \frac{U n}{R_h^{2/3}} \right)^2$ , y finalmente para realizar los cálculos se consideró la

equivalencia del gradiente hidráulico con el gradiente de presiones como  $\frac{\partial p}{\partial x} = \gamma S_f$ , donde  $\gamma$  es el peso específico del agua. Éstos dos últimos valores

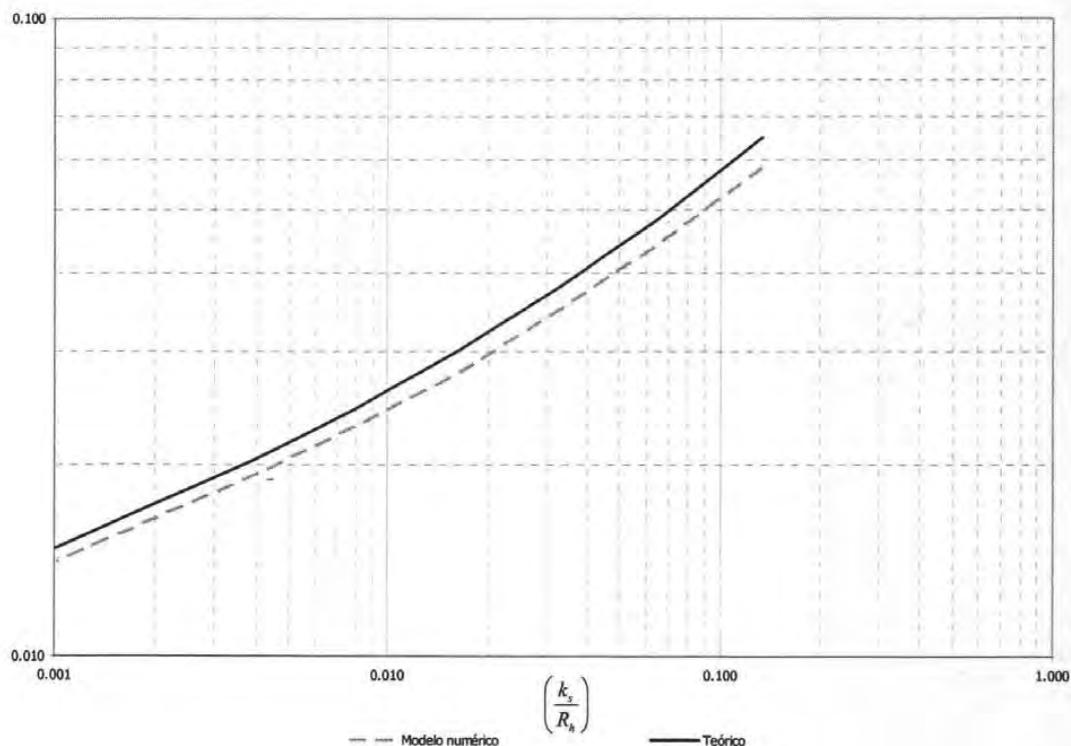
se conservan constantes para las siete diferentes rugosidades relativas seleccionadas, como se muestra a continuación.

$\left( \frac{R}{k_s} \right)$	$\left( \frac{k_s}{R_h} \right)$	$k_s$ (m)	$S_f$	$\frac{\partial p}{\partial x}$ (Pa/m)
15.0	0.13333	0.16267	0.0002541	2.493
30.6	0.06536	0.07974	0.0002541	2.493
60.0	0.03333	0.04067	0.0002541	2.493
126.0	0.01587	0.01937	0.0002541	2.493
252.0	0.00794	0.00968	0.0002541	2.493
507.0	0.00394	0.00481	0.0002541	2.493
1986.0	0.00100	0.00123	0.0002541	2.493

Tabla 4.- Datos para el modelo numérico para el caso de canal ancho.

Como primer forma de validación de los resultados del modelo numérico se comparan los valores obtenidos para el coeficiente de fricción  $f$  con los obtenidos de la solución analítica para el caso que nos ocupa, canal ancho.

Como se puede apreciar en la figura siguiente, en ambos casos se obtuvo un comportamiento similar, aunque los resultados del modelo numérico en general son un poco menores que los del cálculo analítico, con un error promedio de alrededor del 7%.



*Figura 19.- Comparación de los valores de  $f$  para los resultados del modelo numérico y la solución analítica para canal ancho.*

Como una segunda prueba de la validez de los resultados que se obtuvieron con el modelo numérico, se presenta a continuación la comparación del perfil

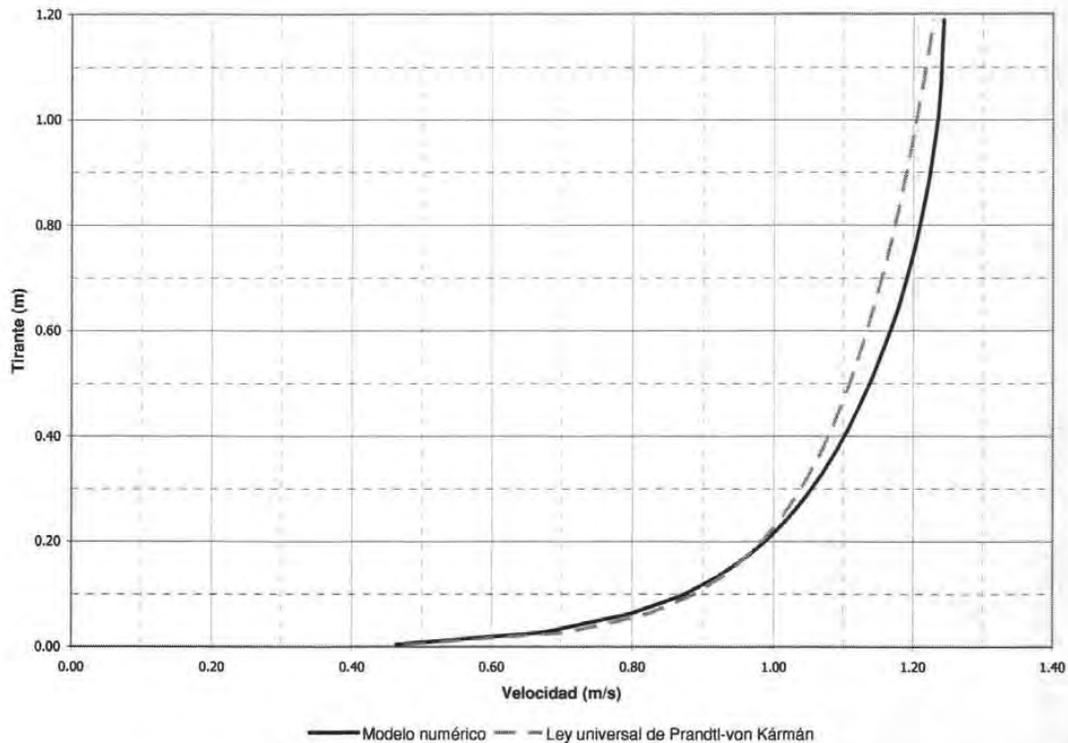
de velocidad resultante de la simulación numérica contra el perfil logarítmico que resulta de resolver la ley universal de distribución de velocidades de Prandtl-von Kármán para zona de capa límite turbulenta, usando como ejemplo el caso particular de rugosidad equivalente  $k_s = 4.81$  mm.

En la tabla siguiente se presentan los valores de la velocidad en el sentido principal del flujo para los casos mencionados y su respectivo porcentaje de variación.

$y$ (m)	$u$ Modelo numérico (m/s)	$u$ Ley universal (m/s)	Error en %
0.005	0.464	0.476	2.56
0.027	0.675	0.708	5.02
0.062	0.797	0.822	3.11
0.098	0.870	0.884	1.56
0.134	0.922	0.927	0.58
0.170	0.961	0.960	0.09
0.208	0.994	0.988	0.61
0.246	1.022	1.011	1.06
0.285	1.046	1.032	1.37
0.326	1.068	1.050	1.68
0.368	1.088	1.067	1.95
0.412	1.107	1.082	2.22
0.459	1.124	1.097	2.38
0.510	1.142	1.112	2.64
0.574	1.160	1.128	2.76
0.641	1.178	1.143	2.96
0.702	1.191	1.156	2.97
0.763	1.203	1.167	2.98
0.824	1.213	1.178	2.91
0.885	1.222	1.188	2.81
0.946	1.229	1.197	2.62
1.006	1.235	1.205	2.40
1.067	1.239	1.213	2.06
1.128	1.241	1.221	1.60
1.189	1.243	1.228	1.17

Tabla 5.- Perfiles de velocidad para el caso de canal ancho.

Como se observa en la siguiente gráfica, se obtiene un buen ajuste entre ambas curvas, presentando un error máximo para un punto en particular del perfil del 5%, con un error mínimo de prácticamente cero y con un error promedio de alrededor del 2%.



*Figura 20.- Comparación de los perfiles de velocidad generados por el modelo numérico y la ley universal de distribución de velocidades de Prandtl-von Kármán para la zona de capa límite turbulenta.*

#### **IV.12 Resultados para canal trapezoidal**

Una vez que se validó el modelo numérico, se procedió a variar la sección transversal para obtener los valores de coeficiente de fricción para las siete diferentes rugosidades relativas, se mantuvieron constantes los datos iniciales

que se mencionaron en el apartado anterior, agregando además el dato del ancho de la base  $\tilde{b}=1.524$  m, y diferentes taludes tal y como se consigna en la siguiente tabla.

Se analizan en este sentido cuatro diferentes secciones transversales, la primera como caso particular de los canales trapeciales con ángulo de inclinación de  $90^\circ$ , es decir el caso de canal rectangular y los trapeciales con ángulos de inclinación de  $60^\circ$ ,  $45^\circ$  y  $30^\circ$  respectivamente.

Sección (1)	$\tilde{b}$ (m) (2)	$h$ (m) (3)	Ángulo (4)	Talud (5)	$A$ (m <sup>2</sup> ) (6)	$P$ (m) (7)	$R_h$ (m) (8)	$S_f$ (9)	$k_s$ (m) (10)	$\frac{\partial P}{\partial x}$ (Pa/m) (11)	$\left(\frac{k_s}{R_h}\right)$ (12)
Ancho	1.0	1.22	-	-	1.22	1.0	1.2200	0.0002541	0.162667	2.493	0.133333
Ancho	1.0	1.22	-	-	1.22	1.0	1.2200	0.0002541	0.079739	2.493	0.065359
Ancho	1.0	1.22	-	-	1.22	1.0	1.2200	0.0002541	0.040667	2.493	0.033333
Ancho	1.0	1.22	-	-	1.22	1.0	1.2200	0.0002541	0.019365	2.493	0.015873
Ancho	1.0	1.22	-	-	1.22	1.0	1.2200	0.0002541	0.009683	2.493	0.007937
Ancho	1.0	1.22	-	-	1.22	1.0	1.2200	0.0002541	0.004813	2.493	0.003945
Ancho	1.0	1.22	-	-	1.22	1.0	1.2200	0.0002541	0.001229	2.493	0.001007
Rectangular	1.524	1.22	90	0	1.8593	3.9640	0.46904	0.0009089	0.062539	8.917	0.133333
Rectangular	1.524	1.22	90	0	1.8593	3.9640	0.46904	0.0009089	0.030656	8.917	0.065359
Rectangular	1.524	1.22	90	0	1.8593	3.9640	0.46904	0.0009089	0.015635	8.917	0.033333
Rectangular	1.524	1.22	90	0	1.8593	3.9640	0.46904	0.0009089	0.007445	8.917	0.015873
Rectangular	1.524	1.22	90	0	1.8593	3.9640	0.46904	0.0009089	0.003723	8.917	0.007937
Rectangular	1.524	1.22	90	0	1.8593	3.9640	0.46904	0.0009089	0.001850	8.917	0.003945
Rectangular	1.524	1.22	90	0	1.8593	3.9640	0.46904	0.0009089	0.000472	8.917	0.001007
Trapezoidal	1.524	1.22	60	0.5774	2.7186	4.3415	0.62620	0.0006183	0.083493	6.065	0.133333
Trapezoidal	1.524	1.22	60	0.5774	2.7186	4.3415	0.62620	0.0006183	0.040928	6.065	0.065359
Trapezoidal	1.524	1.22	60	0.5774	2.7186	4.3415	0.62620	0.0006183	0.020873	6.065	0.033333
Trapezoidal	1.524	1.22	60	0.5774	2.7186	4.3415	0.62620	0.0006183	0.009940	6.065	0.015873
Trapezoidal	1.524	1.22	60	0.5774	2.7186	4.3415	0.62620	0.0006183	0.004970	6.065	0.007937
Trapezoidal	1.524	1.22	60	0.5774	2.7186	4.3415	0.62620	0.0006183	0.002470	6.065	0.003945
Trapezoidal	1.524	1.22	60	0.5774	2.7186	4.3415	0.62620	0.0006183	0.000631	6.065	0.001007
Trapezoidal	1.524	1.22	45	1.0000	3.3477	4.9747	0.67294	0.0005617	0.089726	5.510	0.133333
Trapezoidal	1.524	1.22	45	1.0000	3.3477	4.9747	0.67294	0.0005617	0.043983	5.510	0.065359
Trapezoidal	1.524	1.22	45	1.0000	3.3477	4.9747	0.67294	0.0005617	0.022431	5.510	0.033333
Trapezoidal	1.524	1.22	45	1.0000	3.3477	4.9747	0.67294	0.0005617	0.010682	5.510	0.015873
Trapezoidal	1.524	1.22	45	1.0000	3.3477	4.9747	0.67294	0.0005617	0.005341	5.510	0.007937
Trapezoidal	1.524	1.22	45	1.0000	3.3477	4.9747	0.67294	0.0005617	0.002655	5.510	0.003945
Trapezoidal	1.524	1.22	45	1.0000	3.3477	4.9747	0.67294	0.0005617	0.000678	5.510	0.001007
Trapezoidal	1.524	1.22	30	1.7321	4.4373	6.4040	0.69289	0.0005402	0.092385	5.300	0.133333
Trapezoidal	1.524	1.22	30	1.7321	4.4373	6.4040	0.69289	0.0005402	0.045287	5.300	0.065359
Trapezoidal	1.524	1.22	30	1.7321	4.4373	6.4040	0.69289	0.0005402	0.023096	5.300	0.033333
Trapezoidal	1.524	1.22	30	1.7321	4.4373	6.4040	0.69289	0.0005402	0.010998	5.300	0.015873
Trapezoidal	1.524	1.22	30	1.7321	4.4373	6.4040	0.69289	0.0005402	0.005499	5.300	0.007937
Trapezoidal	1.524	1.22	30	1.7321	4.4373	6.4040	0.69289	0.0005402	0.002733	5.300	0.003945
Trapezoidal	1.524	1.22	30	1.7321	4.4373	6.4040	0.69289	0.0005402	0.000698	5.300	0.001007

Tabla 6.- Datos utilizados en las simulaciones numéricas.

Como se mencionó anteriormente, los valores que se introducen al modelo numérico son los mostrados en las columnas 9, 10 y 11 de la tabla anterior

para finalmente obtener el resultado buscado del factor de fricción  $f$ , como se muestra en la siguiente tabla.

Sección	$\tilde{b}$ (m)	$h$ (m)	Ángulo	$\left(\frac{k_s}{R_h}\right)$	$f$
Ancho	1.0	1.22	-	0.133333	0.05851
Ancho	1.0	1.22	-	0.065359	0.04432
Ancho	1.0	1.22	-	0.033333	0.03505
Ancho	1.0	1.22	-	0.015873	0.02761
Ancho	1.0	1.22	-	0.007937	0.02293
Ancho	1.0	1.22	-	0.003945	0.01930
Ancho	1.0	1.22	-	0.001007	0.01410
Rectangular	1.524	1.22	90	0.133333	0.05050
Rectangular	1.524	1.22	90	0.065359	0.03790
Rectangular	1.524	1.22	90	0.033333	0.03050
Rectangular	1.524	1.22	90	0.015873	0.02430
Rectangular	1.524	1.22	90	0.007937	0.02080
Rectangular	1.524	1.22	90	0.003945	0.01790
Rectangular	1.524	1.22	90	0.001007	0.01323
Trapezoidal	1.524	1.22	60	0.133333	0.05110
Trapezoidal	1.524	1.22	60	0.065359	0.03860
Trapezoidal	1.524	1.22	60	0.033333	0.03080
Trapezoidal	1.524	1.22	60	0.015873	0.02500
Trapezoidal	1.524	1.22	60	0.007937	0.02090
Trapezoidal	1.524	1.22	60	0.003945	0.01770
Trapezoidal	1.524	1.22	60	0.001007	0.01309
Trapezoidal	1.524	1.22	45	0.133333	0.04930
Trapezoidal	1.524	1.22	45	0.065359	0.03880
Trapezoidal	1.524	1.22	45	0.033333	0.03100
Trapezoidal	1.524	1.22	45	0.015873	0.02520
Trapezoidal	1.524	1.22	45	0.007937	0.02100
Trapezoidal	1.524	1.22	45	0.003945	0.01790
Trapezoidal	1.524	1.22	45	0.001007	0.01332
Trapezoidal	1.524	1.22	30	0.133333	0.04570
Trapezoidal	1.524	1.22	30	0.065359	0.03560
Trapezoidal	1.524	1.22	30	0.033333	0.02890
Trapezoidal	1.524	1.22	30	0.015873	0.02360
Trapezoidal	1.524	1.22	30	0.007937	0.01970
Trapezoidal	1.524	1.22	30	0.003945	0.01680
Trapezoidal	1.524	1.22	30	0.001007	0.01249

Tabla 7.- Resultados obtenidos de las simulaciones numéricas para las diferentes secciones.

En la grafica siguiente se muestran las curvas que representan tanto al grupo de valores obtenidos numéricamente de la simulación como el valor teórico para canales anchos obtenido analíticamente. Se observa que todas las curvas tienen un comportamiento similar, aunque los resultados numéricos resultaron menores al teórico (analítico) en todos los casos.

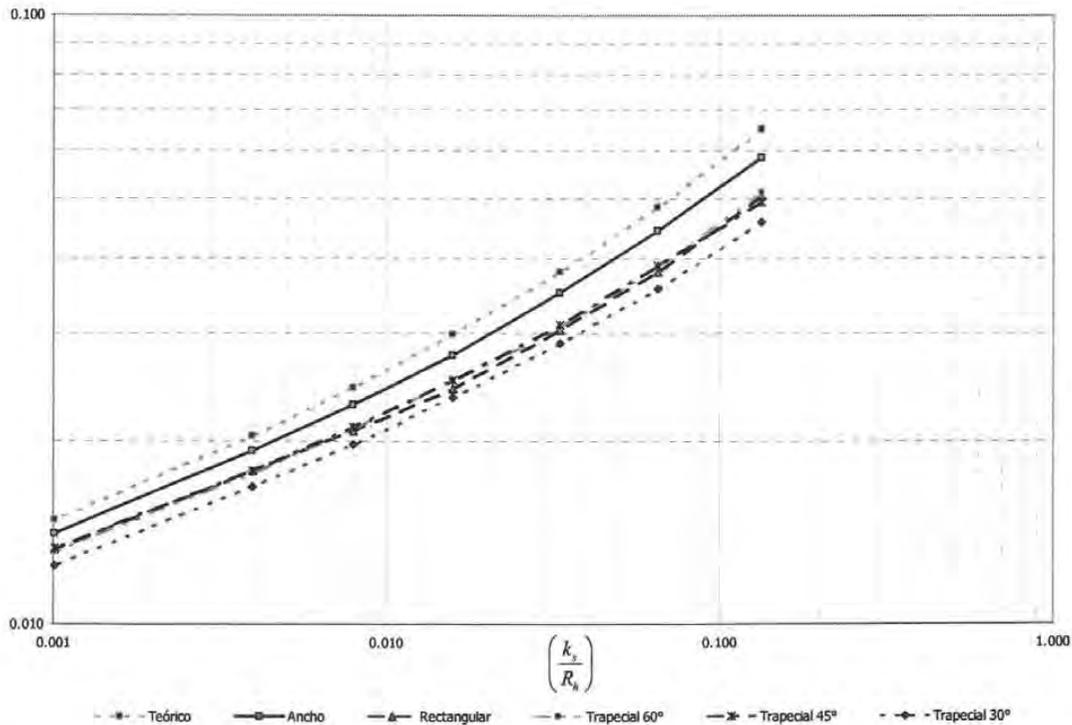


Figura 21.- Comparación de los valores de  $f$  para los resultados del modelo numérico en sus diferentes secciones y la solución analítica para canal ancho.

De la misma forma en la siguiente figura se puede observar que, en general, los resultados para canal rectangular y canales trapeciales son muy similares, lo que comprueba que una de las hipótesis planteadas consistente en que la forma de la sección transversal podría ser representada adecuadamente por la rugosidad relativa tomando como longitud característica del canal al radio hidráulico, es suficientemente válida.

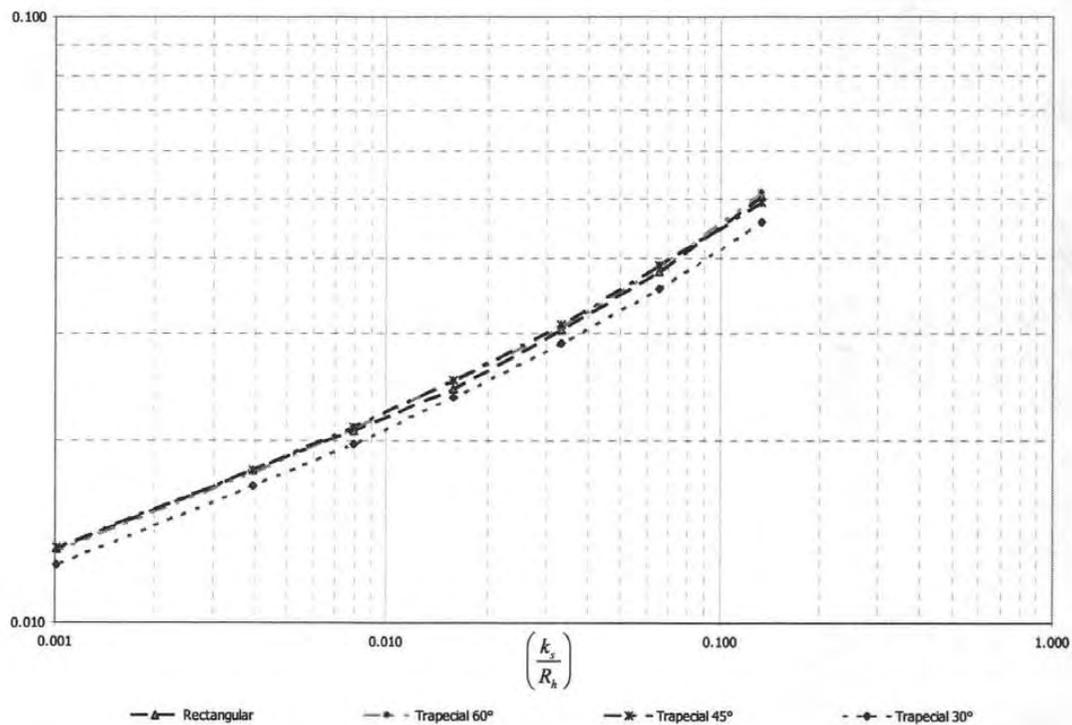


Figura 22.- Comparación de los valores de  $f$  para los resultados del modelo numérico sin incluir el caso del canal ancho.

## Capítulo V

### *Fórmula universal de resistencia al flujo en canales trapeciales*

Uno de los objetivos principales de este trabajo es poder determinar una fórmula que sirva para calcular el coeficiente de fricción  $f$  para las secciones transversales trapeciales, considerando como parte de éstas el caso particular de canal rectangular.

Una vez que se trabajó en la solución analítica para el caso del canal ancho y que se definió el esquema a usar para las modelaciones numéricas, de que éste se implementó y se comprobó que dicho modelo reproducía de manera adecuada los resultados analíticos, se procedió como se explicó en el capítulo anterior a realizar las simulaciones que permitirán posteriormente generar la ecuación buscada mediante un ajuste.

Los ajustes que se realizaron a los datos obtenidos de las simulaciones numéricas fueron siete diferentes. El primero incluye todos los resultados obtenidos, es decir los resultados del modelo numérico para canal ancho, rectangular y las tres diferentes secciones trapeciales. El segundo comprende todos los resultados anteriormente mencionados a excepción de los correspondientes al canal ancho. El tercero incluye exclusivamente los resultados para los tres diferentes canales trapeciales, excluyendo en este caso los resultados para canal ancho y canal rectangular. Los siguientes cuatro ajustes corresponden al análisis particular de los resultados de las secciones rectangular, trapecial de  $60^\circ$ , trapecial de  $45^\circ$  y trapecial de  $30^\circ$  respectivamente.

La forma de la ecuación buscada es la misma que la propuesta por autores anteriores y que se considera la forma básica de estas expresiones, también conocida como una expresión tipo Colebrook.

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = k_1 \log \left( \frac{k_s}{k_2 R_h} \right) \quad (\text{V.1})$$

llevada a la forma siguiente para realizar el ajuste por mínimos cuadrados

$$f = \left[ \bar{a} \log \left( \frac{k_s}{R_h} \right) + \bar{b} \right]^{-2} \quad (\text{V.2})$$

En la tabla siguiente se muestran los valores utilizados para realizar los ajustes,

$\left( \frac{k_s}{R_h} \right)$	Rectangular	Trapezial 60°	Trapezial 45°	Trapezial 30°
0.13333	0.05050	0.05110	0.04930	0.04570
0.06536	0.03790	0.03860	0.03880	0.03560
0.03333	0.03050	0.03080	0.03100	0.02890
0.01587	0.02430	0.02500	0.02520	0.02360
0.00794	0.02080	0.02090	0.02100	0.01970
0.00394	0.01790	0.01770	0.01790	0.01680
0.00100	0.01323	0.01309	0.01332	0.01249

*Tabla 8.- Datos utilizados para obtener la ecuación mediante ajuste.*

A continuación se presentan los resultados que se obtuvieron para los ajustes mencionados en la página anterior, ordenados de la misma manera de cómo fueron descritos en el párrafo respectivo.

Sección	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$C_c$	$k_1$	$k_2$
Todas	-2.0142412	2.6688892	0.9840590	-2.01	21.14
Sin ancho	-2.0098842	2.7581792	0.9958946	-2.01	23.57
Sólo trapeciales	-1.9987629	2.7841765	0.9950200	-2.00	24.71
Rectangular	-2.0431855	2.6809159	0.9993952	-2.04	20.52
Trapezial 60°	-2.0477663	2.6429789	0.9998225	-2.05	19.53
Trapezial 45°	-1.9510856	2.7887994	0.9999054	-1.95	26.88
Trapezial 30°	-1.9952009	2.9324740	0.9999837	-2.00	29.50

$C_c$  = coeficiente de correlación lineal

*Tabla 9.- Resultados de los ajustes a los resultados numéricos.*

Se puede apreciar que en general los ajustes que se obtuvieron son buenos, puesto que los coeficientes de correlación son bastante altos en todos los casos. También se desprende del análisis de los valores obtenidos, que en general el coeficiente  $k_1$  conserva un valor muy cercano al 2.0, sin embargo, de manera similar a lo que sucede con los valores presentados en la tabla 1, el coeficiente  $k_2$  presenta una mayor variación, misma que ve disminuido su efecto en el resultado final al encontrarse dentro del argumento de un logaritmo.

Al aplicar la ecuación resultante de cada uno de los ajustes descritos anteriormente a las rugosidades relativas seleccionadas, se pueden calcular los errores con respecto al resultado generado por el modelo numérico para cada una de las diferentes secciones. A continuación se presenta el resultado de dichos cálculos.

Sección considerada	Ancho		Rectangular		Trapezial 60°		Trapezial 45°		Trapezial 30°		Global	
	Max	Medio	Max	Medio	Max	Medio	Max	Medio	Max	Medio	Max	Medio
Todas	14.43	10.12	4.16	2.04	2.29	1.17	3.58	1.23	10.62	7.60	14.43	4.43
Sin ancho	19.40	13.62	3.13	1.57	4.28	1.95	3.13	2.20	6.74	4.70	19.40	4.81
Sólo trapeciales	20.38	14.01	3.90	1.83	5.13	2.30	3.22	2.54	5.98	4.38	20.38	5.01
Rectangular	16.49	12.46	2.87	1.64	1.74	1.01	2.91	1.71	9.02	5.64	16.49	4.49
Trapezial 60°	15.33	11.94	2.69	1.80	1.54	0.88	2.89	1.61	9.92	6.06	15.33	4.46
Trapezial 45°	18.15	10.98	3.67	1.73	3.19	1.43	0.82	0.44	7.71	6.94	18.15	4.30
Trapezial 30°	28.69	19.81	11.07	6.69	12.39	7.48	9.36	7.72	0.89	0.54	28.69	8.44

Tabla 10.- Porcentaje de error entre los ajustes y los resultados numéricos.

En la tabla anterior se presentan los errores entre el resultado que produce utilizar la fórmula ajustada para el grupo de datos seleccionado que en dicha tabla se manifiesta como sección considerada y los valores puntuales obtenidos del modelo numérico para cada una de las secciones. Asimismo en las dos últimas columnas se enuncia el error máximo para ese ajuste en particular con respecto a los datos del modelo numérico y su error medio correspondiente.

Se observa que el error medio menor se presenta con el ajuste realizado para los datos del canal trapecial de 45°, aunque también es de destacar que los errores para el caso del canal ancho en todos los ajustes probados son altos. Por esta razón, los datos numéricos obtenidos para el caso del canal ancho se excluirán, y el ajuste correspondiente al caso que considera todas las secciones transversales se descarta, así como los errores producidos por el resto de los ajustes con respecto a los datos de canal ancho obtenidos del modelo numérico. De esta manera, la tabla anterior se convierte en:

Sección considerada	Rectangular		Trapezial 60°		Trapezial 45°		Trapezial 30°		Global	
	Max	Medio	Max	Medio	Max	Medio	Max	Medio	Max	Medio
Sin ancho	3.13	1.57	4.28	1.95	3.13	2.20	6.74	4.70	6.74	2.60
Sólo trapeciales	3.90	1.83	5.13	2.30	3.22	2.54	5.98	4.38	5.98	2.76
Rectangular	2.87	1.64	1.74	1.01	2.91	1.71	9.02	5.64	9.02	2.50
Trapezial 60°	2.69	1.80	1.54	0.88	2.89	1.61	9.92	6.06	9.92	2.59
Trapezial 45°	3.67	1.73	3.19	1.43	0.82	0.44	7.71	6.94	7.71	2.63
Trapezial 30°	11.07	6.69	12.39	7.48	9.36	7.72	0.89	0.54	12.39	5.60

*Tabla 11.- Porcentaje de error entre los ajustes y los resultados numéricos sin considerar el caso del canal ancho.*

Se observa ahora que el error medio mínimo se presenta utilizando el ajuste producido por los resultados del modelo numérico para el caso del canal rectangular. Sin embargo, a excepción del caso del ajuste con los datos del canal trapecial de 30°, todos los demás ajustes generan un error medio muy cercano al 2.5%, por lo que en realidad el criterio para seleccionar que ajuste es el adecuado podría incluir además revisar el error máximo producido por un punto en particular. En este caso, el ajuste que incluye exclusivamente los canales trapeciales, es decir, excluyendo los datos para canal ancho y rectangular, sería el seleccionado.

Sin embargo, el caso de interés es el que utiliza para realizar el ajuste los datos del canal rectangular y los tres distintos trapeciales y que de hecho, como se mencionó genera un error medio cercano al 2.5% además de ser el segundo menor error máximo.

Por lo anterior, se selecciona dicho ajuste como la propuesta de ecuación a utilizar para calcular el factor de fricción  $f$  para el caso de canales trapeciales, que incluye el caso particular de canales rectangulares, pero que

excluye el caso de canales anchos, puesto que para este último existe una formulación obtenida analíticamente.

Entonces la fórmula propuesta resulta

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2.011 \log \left( \frac{k_s}{23.57 R_h} \right) \quad (V.3)$$

Una vez que se seleccionó el ajuste a utilizar, se muestra a continuación los errores porcentuales calculados como  $E = Abs \left( \frac{f_a - f_{mn}}{f_a} \right) * 100$  donde  $E$  representa el error en porcentaje,  $f_a$  el valor del coeficiente de fricción obtenido con la ecuación (V.3) y  $f_{mn}$  el valor de este mismo parámetro pero obtenido por medio del modelo numérico.

$\left( \frac{k_s}{R_h} \right)$	Rectangular	Trapezial 60°	Trapezial 45°	Trapezial 30°
0.133333	3.05	4.28	0.60	6.74
0.065359	0.12	1.97	2.49	5.96
0.033333	0.05	1.04	1.69	5.20
0.015873	1.24	1.61	2.42	4.08
0.007937	1.34	1.83	2.32	4.02
0.003945	3.13	1.98	3.13	3.21
0.001007	2.04	0.96	2.72	3.67
Promedio	1.57	1.95	2.20	4.70

*Tabla 12.- Porcentaje de error entre el ajuste seleccionado y los resultados numéricos sin considerar el caso del canal ancho.*

Como puede observarse en la tabla anterior, los resultados para la fórmula que se obtiene del ajuste de los datos del modelo numérico, resultan con

errores menores al 5% en promedio y solamente para el caso del canal trapecial de 30° en tres puntos supera el 5%, lo cual resulta muy alentador, puesto como se ejemplificará a continuación, errores de esta magnitud impactan mucho menos en el resultado final de un diseño hidráulico que si se tuviera este mismo porcentaje de error para el factor  $n$  de la ecuación de Manning.

Adicionalmente, se presentan las siguientes dos graficas interesantes, la primera muestra las curvas que se generan con los diferentes ajustes y la segunda las curvas que generan los datos obtenidos numéricamente y que sirvieron para obtener la ecuación ajustada y la curva que se genera con esta misma ecuación.

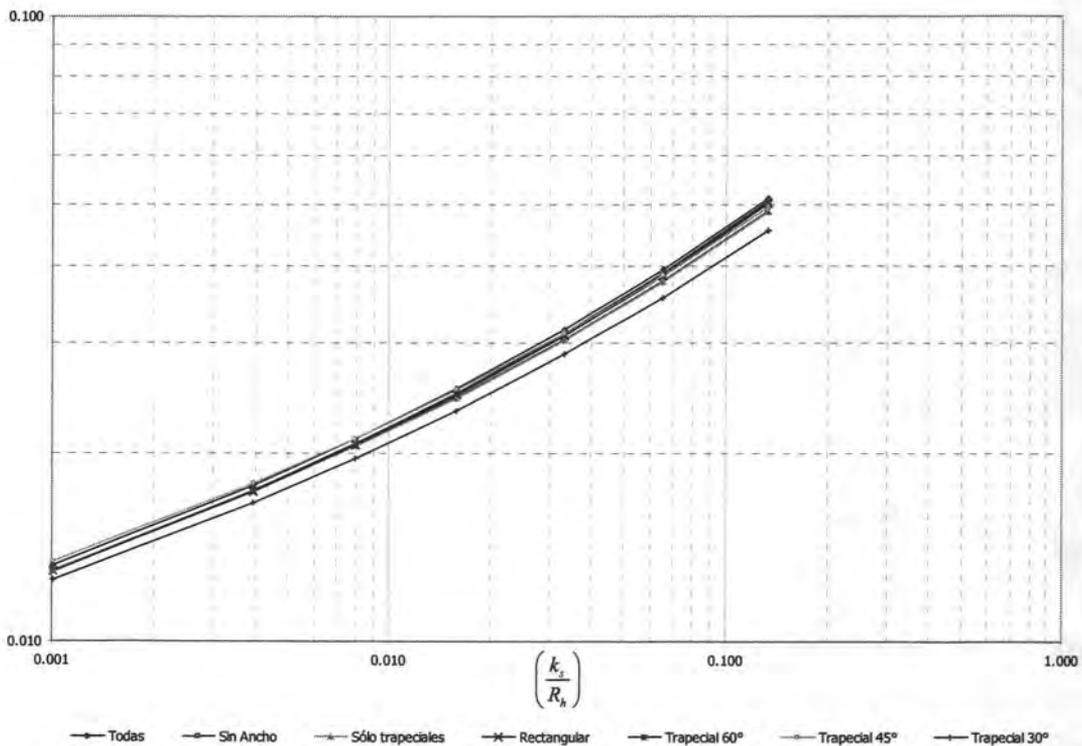


Figura 23.- Curvas para  $f$  obtenidas a partir de los ajustes.

Como se puede apreciar en la gráfica anterior todos los ajustes a excepción del correspondiente al canal trapezoidal de 30° generan resultados muy parecidos, con diferencias menores al 5% en todos los casos.

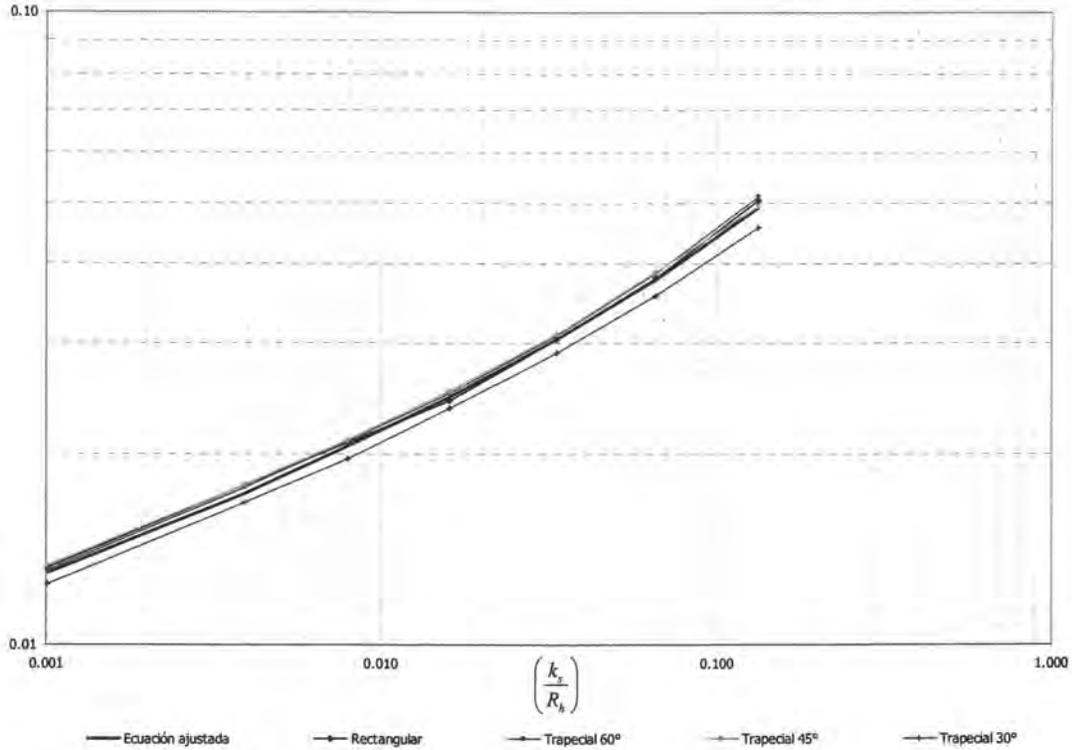


Figura 24.- Curvas para  $f$  obtenidas a partir de los resultados del modelo numérico y la curva para  $f$  del ajuste seleccionado.

### V.1 Ejemplo de aplicación

Para comparar los resultados que se obtienen de utilizar la ecuación de Manning y por otro lado la fórmula tipo Coolebrok propuesta, en el cálculo del flujo uniforme en un canal y más importante aún, para demostrar como impactan en el resultado final, errores de estimación del coeficiente de

fricción correspondiente para cada caso, se presenta a continuación un ejemplo de aplicación.

Supongamos un canal trapecial con taludes laterales 2 a 1, revestido de concreto bien terminado, que debe transportar un gasto de  $10 \text{ m}^3/\text{s}$  con una pendiente del fondo de 0.0001 y una base de 2.5 m.

Para el caso de la ecuación de Manning se utilizará un coeficiente de fricción obtenido de French, 1985 de  $n = 0.013$  y para la ecuación de Darcy-Weisbach una rugosidad absoluta de  $k_s = 0.005 \text{ m}$ ., obtenida de la misma referencia ya mencionada.

Para los datos anteriores se obtuvieron usando cada una de las ecuaciones referidas los valores para el tirante normal de 1.923 m y 2.080 m respectivamente.

Una vez hecho lo anterior se plantea un segundo caso en el que el coeficiente de rugosidad de Manning sea estimado en  $n = 0.015$  y por otro lado la rugosidad absoluta sea estimada en  $k_s = 0.006 \text{ m}$ , resolviendo nuevamente el problema con los cambios en la rugosidad, se obtiene ahora para el tirante normal los valores de 2.054 m y 2.101 m respectivamente.

	$n$	$k_s$ (m)	$f$ ec. (V.3)	Tirante normal Manning (m)	Tirante normal Darcy-Weisbach (m)
Caso 1	0.013	0.005	0.017668	1.923	2.080
Caso 2	0.015	0.006	0.018403	2.054	2.101
Variación %	15.38	20.0	4.0	6.38	1.0

Tabla 13.- Resultados del ejemplo de aplicación.

Como se observa en la tabla anterior, una variación de alrededor del 15% en la estimación del coeficiente de fricción para la ecuación de Manning (ecuación I.27) impacta en más del 6% en el cálculo del tirante normal, sin embargo una variación del 20% en la estimación de la rugosidad absoluta impacta en un 4% en el cálculo del coeficiente de fricción  $f$  y esto a su vez en tan sólo un 1% en el resultado final del tirante normal utilizando la ecuación de Darcy-Weisbach (I.26) y la fórmula propuesta para el cálculo del coeficiente de fricción  $f$  (V.3), lo que deja en claro la gran conveniencia de utilizar para los cálculos de flujo uniforme la ecuación de Darcy-Weisbach, puesto que siempre existe la incertidumbre en la estimación del coeficiente de fricción, problema que se minimiza al usar dicha ecuación en lugar de la tradicionalmente aceptada y utilizada ecuación de Manning.

## Capítulo VI

### *Conclusiones y recomendaciones*

### **VI.1 Límites de aplicabilidad de la fórmula de Manning**

Uno de los resultados esperados de este trabajo consiste en establecer los límites de aplicabilidad de la fórmula de Manning, por lo que a continuación se procederá a obtener tal resultado. Por principio de cuentas se establece que una forma de emplear la fórmula de Manning, con  $C_m = 1$ , independientemente del sistema de unidades que se utilice, es considerar que el factor de rugosidad  $n$ , tiene como dimensiones  $[TL^{-1/3}]$ . A partir de este momento se supondrá que se ha optado por esta alternativa. Por otro lado, de la ecuación (I.31) se obtiene

$$n = \sqrt{\frac{f}{8g}} R_h^{1/6} \quad (\text{VI.1})$$

Strickler (1923) encontró empíricamente que en un fondo plano constituido por granos de arena, la rugosidad  $n$  es proporcional al diámetro de estos elevado a la potencia  $\frac{1}{6}$ . Este resultado y la forma de la ecuación (VI.1) sugieren plantear una expresión del tipo siguiente

$$n = K_m g^{-1/2} k_s^{1/6} \quad (\text{VI.2})$$

donde  $K_m$  es una constante adimensional.

Sustituyendo esta última ecuación en la ecuación (VI.1), haciendo uso del hecho que para canales anchos  $R_h = h$ , y despejando a  $f$ , se obtiene

$$f = 8 K_m^2 \left( \frac{k_s}{h} \right)^{1/3} \quad (\text{VI.3})$$

Es evidente que las ecuaciones (III.9) y (VI.3) no exhiben la misma forma funcional, por lo que la ecuación (VI.3), que es una forma de expresar la fórmula de Manning, se puede considerar como un ajuste de potencia a la ecuación (III.9), la cual, como se ha explicado, posee base teórica. Williamson (1951) y Henderson (1966) presentaron un enfoque de este tipo, pero empleando datos experimentales. Utilizando una transformación logarítmica en la ecuación (VI.3) y un algoritmo de mínimos cuadrados para ajustarla a los datos producidos por la ecuación (III.9). Se ha obtenido el resultado  $K_m = 0.129765776$  para el rango  $\frac{k_s}{h} \in [0.0002, 0.2]$ , que coincide con el presentado por Henderson (1966). El ajuste correspondiente se muestra en la figura 25.

Según se había sugerido anteriormente, al citar el trabajo de Stricker (1923), es común que el factor de rugosidad de Manning se exprese como sigue

$$n = \tilde{\beta} k_s^{1/6} \quad (\text{VI.4})$$

Para  $k_s$  medida en metros, Meyer-Peter y Muller sugieren usar  $\tilde{\beta} = 0.038$ , Stricker recomienda el valor de  $\tilde{\beta} = 0.04739$  y, finalmente, Lane propone  $\tilde{\beta} = 0.04729$  (Simons y Sentürk, 1992).

Empleando el valor encontrado anteriormente para  $K_m$  y aplicando la ecuación (VI.2), se obtiene  $\tilde{\beta} = 0.04143$ , que es del mismo orden de

magnitud que los valores anteriormente citados. Esto proporciona evidencia empírica adicional sobre el procedimiento seguido para estimar  $K_m$ .

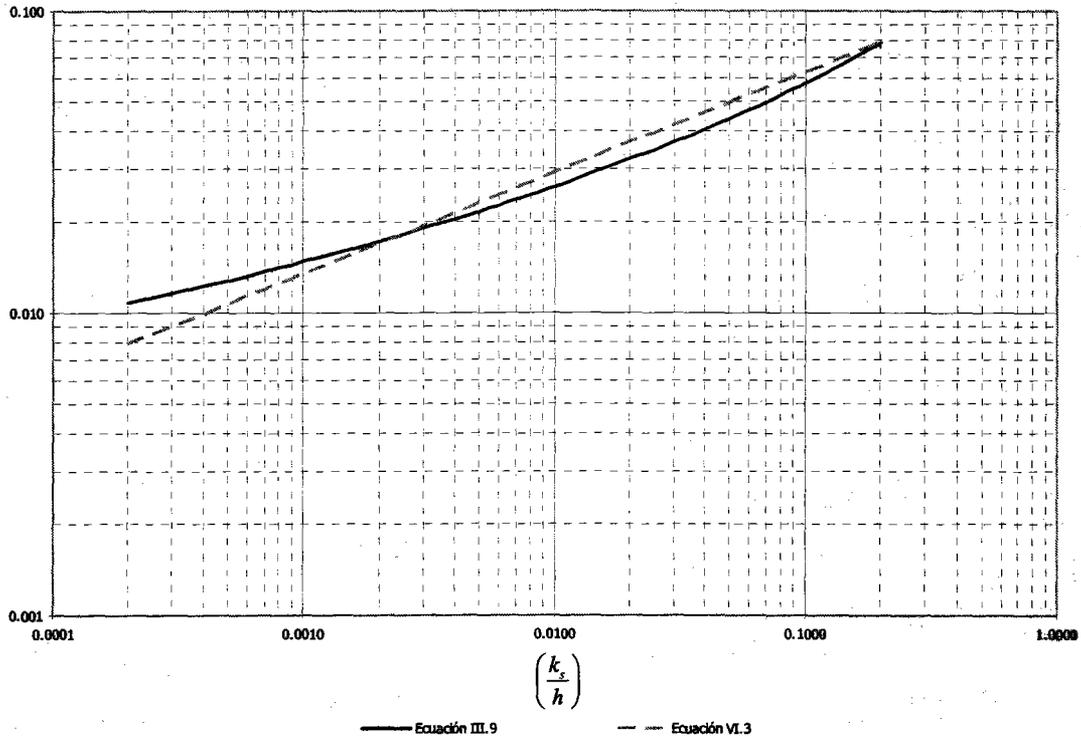


Figura 25.- Ajuste de potencia para el factor  $f$ .

El resultado obtenido para  $K_m$  permite llevar a cabo algunas observaciones sobre la aplicabilidad de la fórmula de Manning. De la ecuación (VI.2) se obtiene

$$k_s = K_m^{-6} g^3 n^6 \quad (VI.5)$$

Por otra parte, los valores recomendados por Chow (1959) para la rugosidad  $n$  para canales con sección muy irregular con curvas y vegetación varían de 0.050 a 0.150. Cuando se emplea el valor calculado de  $K_m$  en la ecuación (VI.5), se obtiene como resultado un rango de valores para  $k_s$  entre 3 y

2,296 metros. Evidentemente, estos valores para la rugosidad equivalente de Nikuradse carecen totalmente de sentido físico.

Por esta razón, se puede concluir que para canales anchos, la fórmula de Manning es válida únicamente para el rango de  $\frac{k_s}{h} \in [0.001, 0.2]$ , fuera del cual, el ajuste de potencia representado por la ecuación (VI.3) se separa considerablemente de los valores correspondientes a la ecuación (III.9).

Evidentemente valores tan altos como los citados para  $n$  incorporan efectos que nada tienen que ver con la resistencia del flujo por efecto del esfuerzo cortante de pared. Más bien representan el efecto integrado de cambios en la geometría del canal, generación interna de turbulencia por efecto de los obstáculos y vegetación en el flujo, efectos centrífugos y centrípetas asociados con la curvatura de las trayectorias fluidas, etc. Todos estos efectos no son representables, estrictamente hablando, mediante una fórmula de resistencia al flujo. Es necesario desarrollar investigación adicional para determinar las formas más convenientes de parametrizarlos.

Por otra parte, también es conveniente establecer el rango de valores del factor de rugosidad  $n$ , que corresponde al rango de rugosidades relativas  $\frac{k_s}{h} \in [0.001, 0.2]$  para el que se ha determinado la validez de la fórmula de Manning. Para el efecto, rescribese la ecuación (VI.2) como sigue

$$n = K_m g^{-1/2} \left( \frac{k_s}{R_h} \right)^{1/6} R_h^{1/6} \quad (\text{VI.6})$$

Empleando entonces como valor mínimo de  $\left(\frac{k_s}{R_h}\right)$  0.001 y como valor máximo. 0.2, se obtienen los valores mínimo y máximo de  $n$  mostrados en la tabla siguiente para la aplicabilidad de la fórmula de Manning, usando la ecuación (VI.6) y diversos valores para  $R_h$ .

$R_h$	$n_{\min}$	$n_{\max}$
0.1	0.0089	0.0216
0.5	0.0117	0.0282
1.0	0.0131	0.0317
2.0	0.0147	0.0356
3.0	0.0157	0.0380
4.0	0.0165	0.0399
5.0	0.0171	0.0414
10.0	0.0192	0.0465

*Tabla 14.- Límites de aplicabilidad de la fórmula de Manning.*

Como puede observarse en la tabla 14, los rangos entre los coeficientes de rugosidad de Manning mínimos y máximos admisibles, para una amplia gama de valores del radio hidráulico, cubren los valores comunes para superficies artificiales ya sea en conductos cerrados o canales revestidos, pero cubre muy pocos casos para canales de tierra o sin revestimiento, tal y como se demostró cuando se calculó el valor de la rugosidad equivalente de Nikuradse para valores de  $n$  de 0.05 y 0.150 en párrafos anteriores.

## ***VI.2 Ventajas de la fórmula de Darcy-Weisbach contra la fórmula de Manning***

A continuación se mencionarán las ventajas de utilizar la formulación de Darcy-Weisbach en comparación con la fórmula de Manning.

Por principio de cuentas se menciona el aspecto importantísimo de que la primera formulación cuenta con una base teórica para su desarrollo y por su parte la fórmula de Manning tiene un origen totalmente empírico además de su no homogeneidad dimensional.

Asimismo, los coeficientes de fricción de cada una de estas fórmulas, tienen en cada caso un fundamento teórico y origen empírico respectivamente.

Otra ventaja que ya se mostró en el caso de la fórmula de Darcy-Weisbach es que un error en la estimación del coeficiente de rugosidad tiene un impacto menor en el resultado final del cálculo del flujo uniforme.

Finalmente, a continuación se revisará el caso en que estas fórmulas de flujo uniforme son utilizadas dentro del marco de la teoría de flujo gradualmente variado. Como es sabido, en estos casos dichas formulas son utilizadas para calcular la pendiente de fricción. Supongamos entonces que se tiene el mismo problema que el resuelto en el capítulo anterior donde se ejemplificaba el cálculo del tirante normal, es decir, supongamos un canal trapecial con taludes laterales 2 a 1, revestido de concreto bien terminado, que debe transportar un gasto de  $10 \text{ m}^3/\text{s}$  con una pendiente del fondo de 0.0001 y una base de 2.5 m. Para el caso de la ecuación de Manning se utilizará un coeficiente de fricción obtenido de French, 1985 de  $n = 0.013$  y

para la ecuación de Darcy-Weisbach una rugosidad absoluta de  $k_s = 0.005$  m, obtenida de la misma referencia ya mencionada.

Ahora bien, los resultados para el tirante normal en este caso fueron de 1.923 m y 2.080 m respectivamente.

Si tomamos estos tirantes como datos de partida y como sabemos el dato de interés en este caso es la pendiente de fricción  $S_f$  para proceder al cálculo de un perfil de flujo gradualmente variado, tendremos para la ecuación de Manning que

$$S_f = \left( \frac{U n}{R_h^{2/3}} \right)^2 \quad (\text{VI.7})$$

y para la ecuación de Darcy-Weisbach

$$S_f = \frac{f U^2}{8 g R_h} \quad (\text{VI.8})$$

Obviamente si utilizamos estos datos para calcular la pendiente de fricción el resultado será idéntico a la pendiente propuesta para el canal, puesto que las ecuaciones se resolvieron para flujo uniforme, sin embargo una vez hecho lo anterior supondremos que de nueva cuenta existe un error en la estimación de los coeficientes de rugosidad respectivos, tal y como se hizo en el ejercicio anterior, es decir, se plantea la posibilidad de que el coeficiente de rugosidad de Manning sea estimado en  $n = 0.015$  y por otro lado la rugosidad absoluta sea estimada en  $k_s = 0.006$  m. Resolviendo nuevamente para la pendiente de

fricción con estos dos cambios se obtienen los resultados que se muestran a continuación.

	$n$	$k_s$ (m)	$f$	$S_f$ Manning	$S_f$ Darcy-Weisbach
Caso 1	0.013	0.005	0.017668	0.00010000	0.00010000
Caso 2	0.015	0.006	0.018403	0.00013314	0.00010416
Variación %	15.38	20.0	4.0	33.14	4.16

*Tabla 15.- Resultados del ejemplo comparativo.*

Como se observa en la tabla anterior, de nueva cuenta el efecto en el resultado final para el cálculo de la pendiente de fricción es considerablemente menor para el caso de la ecuación de Darcy-Weisbach tal y como sucedió en el caso del cálculo del tirante normal.

### **VI.3 Conclusiones finales**

Se puede afirmar que se ha establecido una fórmula confiable para la estimación del coeficiente de fricción  $f$  para ser utilizado en la fórmula de Darcy-Weisbach para el cálculo del flujo uniforme en canales.

De hecho, se han establecido dos formulaciones, la primera de manera analítica y cuyo rango de aplicación es para el caso de los canales anchos y la segunda obtenida mediante modelación numérica y que puede ser utilizada en el caso de canales trapeciales con cualquier inclinación de los taludes laterales, incluido el caso particular de canal rectangular.

Se ha demostrado que el utilizar esta formulación en lugar de la tradicional fórmula de Manning, reduce el error que se induce en el resultado final tanto de los problemas de cálculo de flujo uniforme como en el caso de flujo gradualmente variado, cuando existe mala estimación del coeficiente de fricción, lo cual es muy común.

#### **VI.4 Recomendaciones**

Cabe aclarar que el factor de fricción  $f$  representa únicamente los efectos de disipación de la cantidad de movimiento que se genera en la pared sólida por el esfuerzo cortante y que es propagada hacia el flujo por medio de la turbulencia. Por lo anterior, se debe reconocer que otros tipos de efectos de retardo en el flujo como pueden ser los cambios de geometría, de pendiente, vegetación, etc., deben ser estudiados y parametrizados adecuadamente.

En este sentido este trabajo es una primera propuesta que permite establecer que efectivamente la rugosidad relativa es parámetro suficiente para estimar de manera adecuada el coeficiente de fricción.

Cabe señalar que en el medio de la ingeniería es de uso común la ecuación de Manning y por lo tanto, este tipo de estudios podría tener aplicación práctica después de algún tiempo y definitivamente posterior a estudios adicionales como pueden ser, elaborar muchos mas ejercicios numéricos que cubran un mayor rango de posibilidades tanto de rugosidades relativas como de condiciones de flujo, lo que le daría mayor sustento a la fórmula propuesta para el cálculo del factor de fricción en canales trapeciales; además de los ya citados estudios necesarios para parametrizar otros tipos

de efectos de retardo en el flujo y finalmente llevar a cabo una exhaustiva validación de tipo experimental de todos los trabajos mencionados anteriormente.

## *Referencias bibliográficas*

Aris, R., *Vectors, Tensors, and the Basic Equations of Fluid Mechanics*, Dover Publications, Inc., Nueva York, 1962

Arthur C. E. Knight, "Rationalized Energy-Loss Parameters for Channels", *Journal of Hydraulic Engineering*, vol. 114, No. 7, July 1988, pp. 757-765.

ASCE Task Force of Hydromechanics Committee, "Friction Factors in Open Channels", *Journal Hydraulics Division*, ASCE, vol. 89, 1963, pp. 97-143.

Burham, M.W. y D.W. Davis, "Effects of Data Errors on Computed Steady-Flow Profiles", *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, vol. 116, 1990, pp. 914-929.

Chaudhry, M.H., *Open-Channel Flow*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1993.

Chow, V.T., *Open Channel Hydraulics*, McGraw-Hill, Nueva York, 1959.

Colebrook, C.F., "Turbulent flow in pipes with particular reference to the transition region between the smooth and rough pipe laws", *J. Inst. Civil Eng.* Vol. 11, 1939, pp. 133-156

Costa, G.M. y Cabral, D.T., "*Formulação unificada para el cálculo do escoamento em canais e em tubos presurizados lisos*", Memorias del XXI Congreso Latinoamericano de Hidráulica, 2004.

French, R.H., *Open Channel Hydraulics*, McGraw-Hill, Nueva York, 1985.

Fuentes, R. y Carrasquel, S. "Una ecuación empírica para zonas de transición", Publicación del Laboratorio Nacional de Hidráulica, num. 78-10, Caracas, 1978.

García, F. V., *Análise e Implementação de Esquemas de convecção e Modelos de Turbulência para Simulação de escoamentos Incompressíveis Envolvendo Superfícies Livres*, Tesis Doctoral, 2001.

Graf, W.H., *Hydraulics of Sediment Transport*, McGraw-Hill, Nueva York, 1971.

Henderson, F.M., *Open Channel Flow*, Macmillan, Nueva York, 1966.

Kazemipour, A. K., y Apelt, C. J., "Shap effects on resistance to uniform flow in open channels", *Journal of Hydraulic Research*, vol. 17, 1979, pp. 129-147.

Keulegan, G.H., "Laws of Turbulent Flow in Open Channels", *Journal of Research, National Bureau of Standards*, vol. 21, 1938, pp. 707-741.

Manning, R., "On the Flow of Water in Open Channels and Pipes", *Transactions*, Institution of Civil Engineers of Ireland, vol. 24, 1895, pp. 179-207.

Myers, W. R., "Flow resistance in wide rectangular channels", *Journal of Hydraulics Division, Proceedings of the ASCE*, vol. 108, 1982, pp. 471-482.

Panton, R.L., *Incompressible Flow*, Wiley-Interscience, Nueva York, 1984.

Pillai, N. N., "On Uniform Flow through Smooth Rectangular Open Channels", *Journal of Hydraulic Research*, vol. 8, No. 4, 1970, pp. 403-417.

Reinius, E., "Steady Uniform Flow in Open Channels", *Bulletin*, vol. 60, Div. Hidráulica, Instituto Real de Tecnología, Estocolmo, Suecia, 1961.

Rao, K. K., *Effect of shape on the Mean-Flow Characteristics of Turbulent Flow through Smooth Rectangular Open Channel*, Ph. D. Thesis, University of Iowa, 1967.

Rodi, W., *Turbulence models and their applications in hydraulics a state of the art review*, International Association for Hydraulic Research, University of Karlsruhe, Germany, 1984

Rouse, H., *Elementary Mechanics of Fluids*, John Wiley and Sons, Nueva York, 1946.

Sayre, W.W. and M.L. Albertson, "Roughness Spacing in Rigid Open Channels", *Journal Hydraulic Division, ASCE*, vol. 87, 1961, pp. 121-150.

Schlichting, H., *Boundary Layer Theory*, McGraw-Hill, Nueva Cork, 1979.

Shih, C. C., y Grigg, N. S., "A Reconsideration of the Hydraulic Radius as a geometrical quantity in Open-Channel Hydraulics", *Proceedings of XII Congress, IAHR*, vol. 1, 1967, pp. 288-296.

Simons D.B. y F. Sentürk, *Sediment Transport Technology*, Water Res. Publ., Fort Collins, Colorado, 1992.

Singh, V.P., *Kinematic Wave Modeling in Water Resources – Surface Water Hydrology*, John Wiley and Sons, Nueva York, 1996.

Sotelo, G., *Hidráulica general*, Limusa. México, 1974.

Sotelo, G., *Hidráulica de canales*, Facultad de Ingeniería, UNAM, México, 2002.

Strickler, A., "Beitrage zur frage der geschwindigkeitsformel und der rauigkeitszahlen fur strome, kanale un geschlossene leitungen", *Mitteilungen des Eidgenossincshen Amtes fur Wasserwirtschaft*, vol. 16, Berna, Suiza, 1923.

Thijsse, J.T., *Formulae for the Friction Head Loss Along Conduit Walls Under Turbulent Flow*, *Proceedings, III Congress IAHR*, Grenoble, Francia, vol. III, núm. 4, 1949, pp.1-11.

Tracy, H. J., y Lester, C. M., "Resistance Coefficients and Velocity Distribution Smooth Rectangular Channel", *US Geological Survey, Water-Supply*, 1961.

Williamson, J., "The Laws of Flow in Rough Pipes", *La Houille Blanche*, vol. 6, 1951, p. 738.

Yen, B. Ch., "Hydraulic Resistance in Open Channels", *Channel Flow Resistance: Centennial of Manning's Formula*, Water Res. Publ., Littleton, 1992.

Yen, B. Ch., "Open Channel Flow Resistance", *Journal of Hydraulic Engineering*, vol. 128, 2002, pp. 20-39.

Zegzhda, A.P., Teoriia podobiiai metodika rascheta gidrotekhnicheskikh modelei, Gosstroizdat, 1938.

*Notación*

- $a$  = coeficiente de la ecuación para  $f$  tipo Keulegan (III.6)  
 $\bar{a}$  = coeficiente de la ecuación para  $f$  (V.2)  
 $\tilde{a} = 2.035216917$  = coeficiente de la ecuación (III.9) para  $f_t$   
 $\hat{a}$  = número adimensional (ecuación I.21)  
 $\tilde{a}$  = factor de fricción empírico de la ecuación de Prony  
 $A$  = área hidráulica de la sección transversal  
 $b$  = coeficiente de la ecuación para  $f$  tipo Keulegan (III.6)  
 $\bar{b}$  = coeficiente de la ecuación para  $f$  (V.2)  
 $\tilde{b}$  = ancho de plantilla  
 $\tilde{b}$  = factor de fricción empírico de la ecuación de Prony  
 $B$  = constante de la ley universal de distribución de velocidades  
 $\tilde{c} = 0.049279011$  = coeficiente de la ecuación (III.9) para  $f_t$   
 $\tilde{c}$  = coeficiente empírico de la ecuación modificada de Prony  
 $c_{1\varepsilon} = 1.44$  = constante usada en el modelo de turbulencia  
 $c_{2\varepsilon} = 1.92$  = constante usada en el modelo de turbulencia  
 $C$  = factor de resistencia o fricción de la ecuación de Chezy  
 $C_c$  = coeficiente de correlación  
 $C_m$  = factor de conversión de la ecuación de Manning  
 $C_v = 0.09$  = constante usada en el modelo de turbulencia  
 $d$  = diámetro del conducto cerrado  
 $\tilde{d} = 2.121320344$  = coeficiente de la ecuación (III.9) para  $f_t$   
 $\hat{d}$  = tirante medido verticalmente  
 $\tilde{d}$  = coeficiente empírico de la ecuación modificada de Prony  
 $\tilde{e}$  = coeficiente empírico de la ecuación modificada de Prony  
 $\tilde{e}$  = expresión del residual para igualar las ecuaciones (III.6) y (III.9)  
 $E$  = error

$f$  = factor de fricción de la ecuación de Darcy-Weisbach

$f_a$  = factor de fricción obtenido con la ecuación (V.3)

$f_{mn}$  = factor de fricción obtenido con el modelo numérico

$f_t$  = factor de fricción teórico para canales anchos

$F_r$  = número de Froude

$g$  = aceleración debida a la gravedad

$h$  = tirante total

$h_f$  = pérdida de carga por fricción

$i$  = dirección normal al plano en que actúa  $\zeta_{ij}$

$j$  = dirección en que actúa  $\zeta_{ij}$

$k$  = parámetro del modelo de turbulencia

$\hat{k}$  = talud lateral del canal trapecial

$k_s$  = rugosidad equivalente de Nikuradse

$k_1$  = coeficiente de la ecuación del factor de fricción  $f$  (II.45)

$k_2$  = coeficiente de la ecuación del factor de fricción  $f$  (II.45)

$K$  = constante adimensional (ecuación II.1)

$K_m$  = constante adimensional ecuación (VI.2).

$l$  = longitud considerada para el cálculo de la pérdida de carga por fricción

$L$  = longitud característica

$n$  = factor de fricción de la ecuación de Manning

$\underline{n}$  = vector normal a una superficie

$\underline{n}_D$  = vector normal a la frontera derecha

$\underline{n}_F$  = vector normal al fondo

$\underline{n}_I$  = vector normal a la frontera izquierda

$\underline{n}_s$  = vector normal a la superficie libre

$p$  = presión

$p_h$  = presión hidrostática

$P$  = perímetro mojado

$r$  = variable de integración usada en el caso de conductos circulares

$R$  = radio de un conducto circular

$R_e$  = número de Reynolds

$R_{e\hat{x}}$  = número de Reynolds asociado con la distancia longitudinal  $\hat{x}$

$R_h$  = radio hidráulico

$S$  = pendiente (ecuación I.23)

$S_f$  = pendiente de fricción o de la línea de energía

$S_w$  = pendiente de la superficie libre del agua

$S_0$  = pendiente de la plantilla del fondo del canal

$t$  = tiempo

$T$  = ancho de superficie libre

$u$  = velocidad en el sentido principal del flujo

$u_*$  = velocidad al cortante

$U$  = velocidad media del flujo

$v$  = velocidad del flujo en la dirección  $y$

$w$  = velocidad del flujo en la dirección  $z$

$W$  = peso del líquido confinado en un volumen de control

$x$  = coordenada longitudinal alineada con el sentido principal del flujo

$\hat{x}$  = distancia longitudinal medida a partir de la frontera donde inicia la formación de la capa límite

$y$  = coordenada perpendicular a la plantilla del canal (tirante)

$Y$  = tirante hidráulico

$z$  = coordenada perpendicular al plano que forman los ejes  $x - y$

$\alpha$  = ángulo con respecto a la horizontal del talud lateral del canal trapecial

$\tilde{\beta}$  = constante adimensional ecuación (VI.4)

$\delta$  = espesor de la capa límite

$\delta'$  = espesor de la subcapa laminar o viscosa

$\varepsilon$  = parámetro del modelo de turbulencia

$\gamma$  = peso específico del agua

$\kappa = 0.4$  = constante de von Kármán

$\mu$  = viscosidad dinámica

$\mu_t$  = viscosidad dinámica turbulenta

$\pi = 3.14159$

$\theta$  = ángulo de inclinación del fondo con respecto a la horizontal

$\rho$  = densidad del agua

$\sigma_\varepsilon = 1.3$  = constante usada en el modelo de turbulencia

$\sigma_k = 1$  = constante usada en el modelo de turbulencia

$\tau_0$  = esfuerzo tangencial medio en la pared debido a la fricción

$\nu$  = viscosidad cinemática

$\nu_e$  = viscosidad cinemática efectiva

$\nu_t$  = viscosidad cinemática turbulenta

$\psi = 0.033373629$

$\zeta_{ij}$  = tensor de esfuerzos

$\Delta h_f$  = pérdida de carga en un tramo de longitud  $\Delta x$

$\Gamma_D$  = frontera derecha

$\Gamma_F$  = frontera del fondo

$\Gamma_I$  = frontera izquierda

$\Gamma_S$  = frontera en la superficie libre