

Artículo publicado en el Repositorio Institucional del IMTA

<i>Título</i>	Radiación fractal en la ecuación de Boussinesq del drenaje agrícola.
<i>Autor / Adscripción</i>	Manuel Zavala Carlos Fuentes Heber Saucedo  Instituto Mexicano de Tecnología del Agua
<i>Publicación</i>	Ingeniería Hidráulica en México, 19(3): 103-111
<i>Fecha de publicación</i>	2004
<i>Resumen</i>	Se aborda el estudio del tipo de condición que debe sujetar a la ecuación de Boussinesq en la frontera de los drenes agrícolas, proponiéndose que la transferencia de agua del suelo hacia el interior de estos se describa con una condición de frontera tipo radiación, la cual permite describir las evoluciones de la carga hidráulica y del gasto de drenaje, considerando explícitamente la variación de la resistencia al flujo del agua en la interfaz suelo-dren. La capacidad de descripción de la condición de radiación fractal se verifica comparando los resultados que se obtienen al aplicar esta relación con datos de un experimento de drenaje realizado en laboratorio.
<i>Identificador</i>	<a href="http://hdl.handle.net/123456789/749">http://hdl.handle.net/123456789/749</a>

# Radiación fractal en la ecuación de Boussinesq del drenaje agrícola

Manuel Zavala  
Carlos Fuentes  
Heber Saucedo

Instituto Mexicano de Tecnología del Agua

*Se aborda el estudio del tipo de condición que debe sujetar a la ecuación de Boussinesq en la frontera de los drenes agrícolas, proponiéndose que la transferencia de agua del suelo hacia el interior de éstos se describa con una condición de frontera tipo radiación, la cual permite describir las evoluciones de la carga hidráulica y del gasto de drenaje, considerando explícitamente la variación de la resistencia al flujo del agua en la interfaz suelo-dren. A partir del análisis de los modelos extremos de la conductividad hidráulica de Purcell (1949), y de Childs y Collis-George (1950), así como de la aplicación de conceptos de geometría fractal, se establece que la resistencia en la interfaz suelo-dren es inversamente proporcional a una potencia fractal de la carga hidráulica sobre el dren con el exponente definido implícitamente en función de las porosidades totales del suelo y de la pared del dren. La capacidad de descripción de la condición de radiación fractal se verifica comparando los resultados que se obtienen al aplicar esta relación con datos de un experimento de drenaje realizado en laboratorio. El buen acuerdo entre los resultados teóricos y los datos experimentales permite recomendar el uso de la condición de radiación fractal para describir el flujo de agua del suelo hacia los drenes agrícolas durante la recesión de la superficie libre.*

**Palabras clave:** interfaz suelo-dren, resistencia al flujo del agua, conductividad hidráulica.

## Introducción

El estudio de las transferencias de masa y energía que ocurren en los sistemas de drenaje agrícola subterráneos puede ser realizado a partir de la ecuación de Richards (1931) o de la ecuación de Boussinesq de los acuíferos libres. La primera ecuación diferencial permite llevar a cabo descripciones finas de los procesos de transferencia que ocurren en el medio poroso, ya que considera de manera explícita las zonas saturada y no saturada del suelo; sin embargo, su aplicación a la escala de un distrito de riego e incluso de una parcela es limitada tanto por el desconocimiento de las características hidrodinámicas del suelo como por el esfuerzo de cálculo que se requiere para modelar el movimiento tridimensional del agua en el suelo. Estas limitantes han originado que el estudio de

los procesos de transferencia de agua en los sistemas de drenaje agrícola se realice principalmente a partir de la ecuación de Boussinesq, que si bien considera de manera simplificada las transferencias que ocurren en la zona no saturada del suelo a través de la capacidad de almacenamiento, es una herramienta útil para realizar descripciones generales del flujo del agua en el espesor saturado del medio poroso.

La aplicación de la ecuación de Boussinesq al drenaje agrícola requiere de la definición del tipo de condición de frontera que debe imponerse en el dren. Tradicionalmente se ha considerado que la carga hidráulica sobre la línea de drenaje se abate de manera instantánea, motivo por el cual la ecuación de Boussinesq se sujeta en el dren a una condición de frontera tipo Dirichlet homogénea. Considerando este supuesto se han obtenido soluciones

analíticas para formas simplificadas de la ecuación de Boussinesq tanto para régimen de flujo permanente (Hooghoudt, 1940) como transitorio (Glover-Dumm, en Dumm, 1954), siendo estas relaciones ampliamente consideradas en el diseño de sistemas de drenaje subterráneo. Sin embargo, la hipótesis de una carga nula sobre el dren se cumple sólo si la pared del dren no ofrece resistencia al flujo del agua. En la realidad, la carga sobre el dren no se abate de manera instantánea debido a que las paredes de los tubos de drenaje tienen una cantidad finita de perforaciones a través de las cuales se transfiere el agua del suelo al interior del dren.

En un intento por obtener una relación que considere la carga hidráulica sobre el dren, se ha combinado la solución de Hooghoudt (1940) con la solución para flujo radial que describe la absorción uniforme de agua por un tubo cilíndrico de longitud infinita (Carslaw y Jaeger, 1959). Sin embargo, la aproximación así obtenida es válida exclusivamente para régimen de flujo permanente, condición que puede alcanzarse sólo en los tiempos muy largos de drenaje si la recarga del acuífero es igual al gasto evacuado por los drenes.

Una mejor aproximación al fenómeno del drenaje agrícola requiere del conocimiento de la evolución en el tiempo de la carga hidráulica sobre el dren; sin embargo, ésta es precisamente la variable que se desea determinar para cuantificar el volumen de agua drenado. La determinación de ambas variables (carga y gasto) puede llevarse a cabo si se impone en la frontera de los drenes una condición tipo radiación de Newton, la cual establece una relación de proporcionalidad directa entre el flujo de drenaje y el gradiente de presiones en la vecindad inmediata del dren. Pero la aplicación de esta relación se ha visto limitada por el desconocimiento del coeficiente que representa la resistencia al flujo del agua en la interfaz suelo-dren, ya que éste puede ser una constante o una función del flujo o de la carga hidráulica. Fuentes *et al.* (1997) han supuesto que este coeficiente de resistencia es una constante y han obtenido una solución analítica para una forma simplificada de la ecuación de Boussinesq unidimensional en régimen de flujo transitorio. Recientemente Zavala *et al.* (2003), en su análisis del drenaje agrícola con la ecuación de Richards, han obtenido que el coeficiente de resistencia en la interfaz suelo saturado-dren es una función no lineal del gradiente de presiones que se genera en la vecindad del dren. ¿Una condición similar debe cumplirse a la escala de análisis de Boussinesq?

La incertidumbre que existe sobre la naturaleza funcional del coeficiente de resistencia en la interfaz suelo-dren a la escala de análisis de la ecuación de Boussinesq motiva el objetivo de este trabajo: realizar un estudio

teórico, contrastado con evidencia experimental de la transferencia de agua del suelo hacia el interior de los drenes para determinar el comportamiento del coeficiente de resistencia en la interfaz suelo-dren.

### Ecuaciones de base

La dinámica del agua en un sistema de drenaje agrícola subterráneo puede ser descrita con la ecuación de Boussinesq de los acuíferos libres, la cual se obtiene realizando una integración de la ecuación de Richards en la vertical (Saucedo, 1997). La forma general de esta ecuación diferencial puede escribirse de la siguiente manera:

$$\mu(H) \frac{\partial H}{\partial t} = \nabla \cdot [T(H) \nabla H] + R \quad (1)$$

donde  $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ ;  $H$  es la elevación de la superficie libre medida a partir de un nivel de referencia;  $T(H)$  es la transmisibilidad del acuífero que se define como  $T(H) = K_s(H - H_i)$ , siendo  $K_s$  la conductividad hidráulica a saturación y  $H_i$  la elevación del estrato impermeable;  $R$  es el volumen de recarga por unidad de tiempo por unidad de área de acuífero, y  $\mu(H)$  es la capacidad de almacenamiento o porosidad drenada. De acuerdo con Fragoza *et al.* (2003) la capacidad de almacenamiento de un acuífero libre se define como:

$$\mu(H) = \theta_s - \theta(H - H_s) \quad (2)$$

donde  $\theta_s$  es el contenido volumétrico de agua a saturación;  $\theta(H - H_s)$  es el contenido volumétrico de agua en la superficie del suelo; y  $H_s$  es la elevación de la superficie del terreno.

Si se acepta la hipótesis de que las variaciones de la elevación de la superficie libre en el sentido de la línea de drenaje son despreciables, la dinámica del agua en el espesor saturado del suelo puede ser descrita con la forma unidimensional de la ecuación de Boussinesq. Para resolverla sobre el dominio de solución mostrado en la ilustración 1 es necesario definir las condiciones iniciales y de frontera que mejor representen el drenaje agrícola subterráneo. La especificación de estas condiciones límites es más conveniente si la posición de la superficie libre contada a partir del estrato impermeable se expresa como:

$$H(x, t) = D_o + h(x, t) \quad (3)$$

donde  $h(x,t)$  es la carga hidráulica contada a partir de la posición de los drenes y  $D_o$ , la profundidad del estrato impermeable medida a partir de los drenes (ver ilustración 1).

La condición inicial de la presión debe ser especificada como la elevación de la superficie libre a lo largo de la coordenada horizontal  $x$ :

$$h(x,0) = h_s(x) \quad (4)$$

En analogía con el fenómeno de transferencia de calor por un sólido hacia la atmósfera, la transferencia de agua del suelo hacia los drenes puede ser descrita con una condición de radiación de Newton. La condición de radiación se puede establecer igualando el flujo de Darcy y el flujo proporcionado por una ley análoga a la de Ohm para corrientes eléctricas. Es decir:

$$-K_s \frac{\partial h}{\partial x} \pm q_d = 0 \quad (5)$$

El signo positivo en la ecuación 5 se toma para el dren ubicado en  $x=0$ , mientras que el negativo, para el que está ubicado en  $x=L$ .

El gasto de agua drenada por unidad de longitud de dren es obtenido con:

$$Q_d = 2q_d(D_o + h) \quad (6)$$

donde  $h$  es la carga sobre el dren.

El flujo hacia los drenes ( $q_d$ ) de acuerdo con la ley similar a la de Ohm es proporcional a la diferencia de presiones del agua en la vecindad de la frontera del dren. Asumiendo que la presión en el interior del dren es igual

a la presión atmosférica (convencionalmente igual a cero) se tiene:

$$q_d = \frac{h}{R_{in}} \quad (7)$$

donde  $R_{in}$  es la resistencia al flujo del agua en la interfaz suelo-dren.

La condición de radiación lineal o de Newton es representada por la ecuación 7, cuando  $R_{in}$  es considerada independiente de la carga hidráulica.

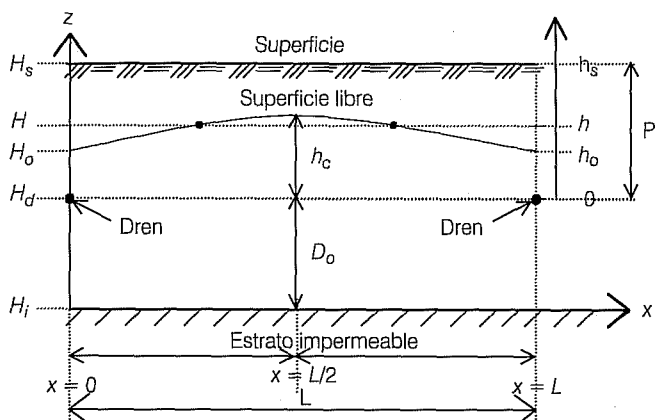
### La radiación fractal

La forma funcional del coeficiente de resistencia de la interfaz suelo-dren (ecuación 7) puede determinarse a partir del siguiente análisis.

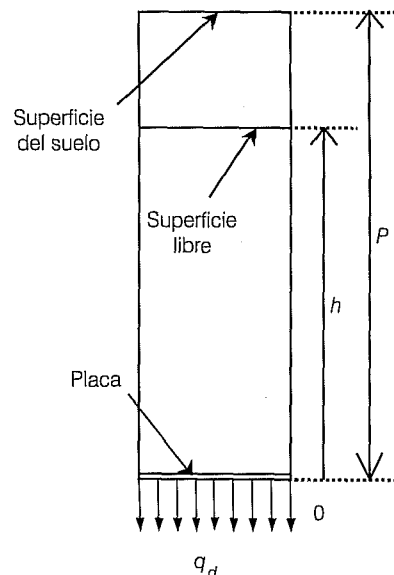
Considérese una columna de suelo ubicada sobre el dren y asúmase que la frontera de éste es bien representada por una placa porosa horizontal colocada en la base de la misma (ver ilustración 2). El volumen de la columna ( $V_T$ ) es proporcionado por  $V_T = A_T P$ , donde  $A_T$  es la área de la placa y  $P$ , la altura de la columna, mientras que el volumen de agua en la zona saturada ( $V_w$ ) es proporcionado por  $V_w = A_w h$ , donde  $A_w$  es el área total de los poros y  $h$  es el espesor de la zona saturada.

El volumen de agua en la zona saturada relativo al volumen total de suelo es  $V_s = A_s (h/P)$ , donde  $A_s = A_w/A_T$  es el área total de los poros relativa al área total de suelo. Si

**Ilustración 1. Esquema de un sistema de drenaje agrícola subterráneo.**



**Ilustración 2. Representación esquemática de la columna de suelo que se ubica encima del dren ( $x=0$  o  $x=L$  en la ilustración 1).**



el conjunto de los poros de la columna se representa como un sistema de tubos capilares paralelos, entonces  $A_s = \phi$ , donde  $\phi$  es la porosidad total del suelo; es decir,  $V_s = \phi(h/P)$ . Purcell (1949) muestra que en un sistema de capilares paralelos, la conductividad hidráulica es proporcional a  $\phi$  (Fuentes *et al.*, 2001), lo que conduce a establecer la proporción  $q_d \propto K_s(h/P)$ , la cual corresponde a una condición de radiación lineal.

Se puede obtener otra expresión para el flujo si se utiliza el enfoque probabilista de Childs y Collis-George (1950). Se realiza un corte perpendicular a la dirección macroscópica de flujo para obtener dos secciones de porosidad  $\phi$  cada una, las cuales son ubicadas en las posiciones  $z_1$  y  $z_2$ ; en la columna estudiada  $z_1 = 0$  y  $z_2 = \delta P$ , donde  $\delta P \ll P$  es una pequeña cantidad positiva del orden del tamaño de poro ( $\delta P \rightarrow 0$ ). Una partícula de agua ubicada en un poro de la sección  $z_2$  puede continuar su trayectoria por el mismo poro capilar o cambiar a otro poro de diferente tamaño ubicados en la posición  $z_1$ . La modelación de estas posibilidades de cambio se puede realizar equivalentemente con la introducción de la probabilidad del encuentro de las secciones en un punto intermedio  $z_{12} = 1/2 \delta P$ . La probabilidad de que estas secciones se encuentren de manera completamente aleatoria en el punto intermedio es el producto  $V_s V_s = \phi^2 (h/P)^2$ , el cual representa el área efectiva de flujo. Puesto que en este modelo la conductividad hidráulica es proporcional a  $\phi^2$ , se tiene la proporción  $q_d \propto K_s (h/P)^2$ .

Los modelos de Purcell (1949), y de Childs y Collis-George (1950) representan los modelos extremos posibles: el primero, una correlación completa de los capilares (sistema de capilares paralelos) y el segundo, una decorrelación completa (encuentro completamente aleatorio de los capilares o flujo completamente aleatorio de las partículas de agua). Se puede obtener un modelo intermedio al considerar que las trayectorias de las partículas de agua están determinadas por el arreglo estructural de las partículas sólidas del suelo.

De acuerdo con Fuentes *et al.* (2001), la estructura del suelo puede ser bien representada cuando el suelo es considerado como un objeto fractal. En la geometría de Euclides se tiene que el área ( $A$ ) y el volumen ( $V$ ) son proporcionales, respectivamente, a  $L^2$  y  $L^3$ , donde  $L$  representa una longitud y, en consecuencia,  $A \propto V^{2/3}$ . Siguiendo a Mandelbrot (1982) en la geometría fractal  $A \propto V^{D/3}$ , donde  $D$  es la dimensión fractal del objeto. De acuerdo con Fuentes *et al.* (2001), la solidicidad areal ( $\mu_s$ ) estará relacionada con la solidicidad volumétrica ( $\phi_s = 1 - \phi$ ) por  $\mu_s = (1 - \phi)^s$ , donde el exponente  $s = D/3$ . De manera análoga se obtiene para la semiporosidad areal en cada sección  $\varphi = \phi^s$ ; la relación entre la porosidad areal ( $\mu$ ) y la porosidad volumétrica se obtiene, de acuerdo con

la idea probabilista, como  $\mu = \phi^s \phi^s = \phi^{2s}$ . Ya que  $\mu_s + \mu = 1$  se logra de la ecuación que define la relación entre  $s$  y  $\phi$ :

$$(1 - \phi)^s + \phi^{2s} = 1 \quad (8.1)$$

y considerando que  $\mu = \phi^{2s}$  se tiene de la ecuación que define la relación entre  $s$  y  $\mu$ :

$$(1 - \mu)^{\frac{1}{s}} + \mu^{\frac{1}{2s}} = 1 \quad (8.2)$$

De la ecuación 8.1 se deducen los comportamientos extremos de la función  $s(\phi)$ ; cuando  $\phi \rightarrow 0$ ,  $s(\phi) = 1/2 + \ln 2 / \{2[1 + \ln(1/\phi)]\}$  y cuando  $\phi \rightarrow 1$ ,  $s(\phi) = 1 - \ln 2 / \{\ln[1/(1-\phi)]\}$ . De estos comportamientos se deduce que si  $\phi \rightarrow 0$  entonces  $s \rightarrow \frac{1}{2}^+$  y si  $\phi \rightarrow 1$  entonces  $s \rightarrow 1^-$ ; la correlación completa se presenta en suelos cuya porosidad tiende a cero y la decorrelación completa en suelos cuya porosidad tiende a la unidad.

El área relativa de flujo en la base de la columna se obtiene como  $V_s V_s = \phi^{2s} (h/P)^{2s}$ . Dado que la conductividad hidráulica es proporcional a  $\mu = \phi^{2s}$ , se tiene  $q_d \propto K_s (h/P)^{2s}$ . Cuando los medios porosos ubicados en las posiciones  $z_1$  y  $z_2$  son diferentes, como ocurre en la base de la columna (suelo-pared del dren), la proporción anterior tiene que ser modificada. Si se usa la notación  $\{\phi_1, s_1, \mu_1, K_s\}$  para las propiedades del suelo y  $\{\phi_d, s_d, \mu_d, K_d\}$  para las propiedades de la pared del dren, se obtiene el área efectiva de flujo como  $V_s^{s_1} V_s^{s_d} = \phi_1^{s_1} (h/P)^{s_1} \phi_d^{s_d} (h/P)^{s_d}$ . Dado que  $\phi_1^{s_1} \propto \sqrt{K_s}$  y  $\phi_d^{s_d} \propto \sqrt{K_d}$ , se logra la siguiente proporción para el flujo:  $q_d \propto \sqrt{K_s K_d} (h/P)^{s_1 + s_d}$ . En consecuencia, se puede establecer la siguiente igualdad:

$$q_d = \gamma_o \bar{K}_s \left( \frac{h}{P} \right)^{2\bar{s}} \quad (9)$$

donde  $\bar{K}_s = \sqrt{K_s K_d}$ ,  $\bar{s} = \frac{1}{2}(s_1 + s_d)$  y  $\gamma_o$  es un coeficiente adimensional.

Dado que el flujo del agua en el suelo es, de acuerdo con la ley de Darcy, un flujo con potencial, un gradiente de potencial en la ecuación 9 se puede explicitar si se escribe como  $q_d = \gamma_o \bar{K}_s (h/P)^{2\bar{s}-1} (h/P)$  con  $2\bar{s} - 1 > 0$ , la cual puede ser utilizada en un sistema sistema de drenaje, como el mostrado en la ilustración 1, en la escritura

$q_d = \gamma \bar{K}_s (h/P)^{2\bar{s}-1} (h/L)$ , donde  $\gamma = \gamma_o L/P$  y  $L$  la separación entre drenes. Finalmente, el flujo de agua en la base de la columna en un sistema de drenaje puede ser descrito por la fórmula:

$$q_d = \gamma \bar{K}(h) \left( \frac{h}{L} \right) \quad (10)$$

en donde la conductividad efectiva en función de la carga sobre el dren es proporcionada con  $2\bar{s} - 1 > 0$ , por:

$$\bar{K}(h) = \bar{K}_s \left( \frac{h}{P} \right)^{2\bar{s}-1} \quad (11)$$

La radiación fractal es equivalente a definir el coeficiente de resistencia de la ley similar a la de Ohm, ecuación 7, como  $R_{in} = L/\gamma \bar{K}(h)$ .

La sustitución de la ecuación 10, considerando la ecuación 11, en la ecuación 5 permite obtener las condiciones de radiación fractal para la ecuación de Boussinesq:

$$-K_s \frac{\partial h}{\partial x} \pm \gamma \bar{K}(h) \left( \frac{h}{L} \right) = 0 \quad (12)$$

Si la conductividad hidráulica a saturación del suelo ( $K_s$ ) y las porosidades de los dos medios porosos son conocidas, para la estimación del flujo del agua hacia al dren con las ecuaciones 10 a 12 es necesario proporcionar los parámetros  $\gamma$  y  $K_d$ . El primero puede ser estimado mediante la calibración del modelo Boussinesq-radiación fractal en un experimento de drenaje, mientras que el segundo puede ser estimado al considerar que el flujo en los poros de la pared del dren es aproximadamente descrito por un régimen de Poiseuille. Si este es el caso, la conductividad  $K_d$  en poros circulares es definida por (Fuentes *et al.*, 2001):

$$K_d = C_f \frac{g}{\nu} \int_{\Omega_f} R_s^2 d\omega_d \quad (13)$$

donde  $C_f$  es un coeficiente de forma adimensional que toma en cuenta la forma irregular del perímetro de los poros, en un poro circular  $C_f = 1/8$ ;  $g$  es la aceleración gravitacional;  $\nu$ , el coeficiente de viscosidad cinemática

del agua;  $\Omega_f$ , el dominio total de los poros (flujo saturado);  $R_s$ , el radio que define el área de los poros, y  $d\omega_d$  es la fracción de la porosidad areal a la cual contribuyen los poros de radio  $R_s$ .

Puesto que los drenes son construidos normalmente con aberturas de igual tamaño ( $R_s = R_{sd}$ ) y considerando

que  $\int_{\Omega_f} d\omega_d = \mu_d$ , la ecuación 13 se transforma en

$K_d = \frac{1}{8} (g/\nu) R_{sd}^2 \mu_d$ . Para utilizar esta fórmula en aberturas

no necesariamente circulares se puede utilizar la teoría del radio hidráulico ( $R_{Hd}$ ), definido como la razón del área hidráulica al perímetro mojado; como  $R_{sd} = 2R_{Hd}$  en un círculo completamente lleno de agua se tiene

$K_d = \frac{1}{2} (g/\nu) R_{Hd}^2 \mu_d$ . Cuando  $R_{sd}$  es tomado como el radio

hidráulico, el coeficiente de forma  $C_f = 1/2$  es llamado

coeficiente de Kozeny y puede ser reemplazado por otros

valores que resultan de las diferentes formas asumidas para las aberturas (Bear, 1972):  $C_f = 0.562$  para un

cuadrado,  $C_f = 0.597$  para un triángulo equilátero y

$C_f = 0.667$  para una placa. Sin embargo, en el caso estudiado, las posibles discrepancias con respecto al círculo pueden ser absorbidas por el coeficiente  $\gamma$ , ya que aparece como un factor multiplicativo. Se puede aceptar, por lo tanto, que la conductividad de la pared del dren es definida por:

$$K_d = \frac{1}{2} \frac{g}{\nu} \mu_d R_{Hd}^2 \quad (14)$$

De este modo, el único parámetro a calibrar es  $\gamma$ , que representa un coeficiente adimensional de la conductancia de la interfaz suelo-dren en un sistema de drenaje dado.

La modelación del flujo del agua hacia drenes

subterráneos corrugados cubiertos con filtro puede realizarse mediante el procedimiento presentado

anteriormente, reemplazando la conductividad ( $K_d$ ) y la

dimensión relativa de la pared del dren ( $s_d$ ) por la

conductividad y la dimensión relativa del sistema dren-filtro ( $K_{df}$  y  $s_{df}$ ). De acuerdo con el procedimiento

establecido, la conductividad de este sistema se calcula

como  $K_{df} = \sqrt{K_d K_f}$ , donde  $K_f$  es la conductividad del filtro que puede ser estimada con la propia ecuación 14 a partir de la porosidad areal ( $\mu_f$ ) o volumétrica ( $\phi_f$ ) y del radio hidráulico del filtro ( $R_{Hf}$ ). La dimensión relativa del filtro ( $s_f$ ) se obtiene a partir de la ecuación 8.2; la dimensión relativa del sistema dren-filtro es proporcionada por  $s_{df} = (s_d + s_f)/2$ .

### Aplicaciones

La evaluación de la capacidad de la condición de radiación fractal para describir la dinámica del agua en un sistema de drenaje agrícola subterráneo requiere de una solución de la ecuación de Boussinesq sujeta a las condiciones límites proporcionadas por la ecuaciones 4 y 12, y de observaciones experimentales realizadas en campo o en laboratorio. En este trabajo se hace uso de la información experimental y de la solución numérica de la ecuación de Boussinesq unidimensional presentadas por Zavala (2003).

La prueba de drenaje de Zavala (2003) se hizo en un contenedor rectangular de acrílico transparente que tenía dos tubos lisos de PVC con perforaciones circulares instalados de forma paralela a la misma profundidad. Este contenedor estaba relleno con una muestra de suelo alterado de la región de Tezoyuca, Morelos, que se compactó de manera uniforme. El experimento consistió en tapar los drenes y aplicar una carga de agua sobre la superficie del suelo hasta saturar todo el sistema. Durante un mes se mantuvo una carga de agua constante sobre la superficie del suelo del módulo de drenaje, con el objetivo de estabilizar la presión del agua en el suelo. Transcurrido este periodo se retiró el exceso de humedad existente en la superficie, cubriéndose la misma con plástico impermeable para eliminar la evaporación. Finalmente se destaparon los drenes y se midió durante diez días la variación en el tiempo del volumen de agua drenado. Las características del sistema de drenaje son las siguientes: profundidad de los drenes  $P=120$  cm; profundidad del estrato impermeable  $D_o=25$  cm; separación entre drenes  $L=100$  cm; diámetro y longitud de los drenes  $d=5$  cm y  $\ell=30$  cm; diámetro de los ranuras circulares de la tubería de PVC  $d_o=0.158$  cm, y cantidad total de orificios  $N_o=233$ . La condición inicial impuesta corresponde a  $h_s=120$  cm.

Para aplicar la condición de radiación fractal (12) es necesario conocer los parámetros de la conductividad efectiva (11), los cuales se estiman de la siguiente manera: con la porosidad volumétrica del suelo de Tezoyuca de  $\phi_1=0.539$  cm<sup>3</sup>/cm<sup>3</sup>, y las relaciones 8.1 y 8.2 se determina,

primero, la dimensión relativa del suelo ( $s_1$ ) y, posteriormente, su porosidad areal ( $\mu_1$ ); para determinar los parámetros de los drenes se invierte este procedimiento, puesto que sus características físicas (diámetro, longitud, geometría y cantidad de orificios) permiten la estimación directa de la porosidad areal ( $\mu_d$ ); con este valor, y las relaciones 8.2 y 8.1 se determinan, respectivamente, la dimensión relativa de la pared del dren ( $s_d$ ) y su porosidad volumétrica ( $\phi_d$ ). En cuanto a los valores de conductividad hidráulica a saturación de cada medio, el valor correspondiente al suelo es  $K_s=18.3$  cm/h, mientras que el del dren ( $K_d$ ) es calculado haciendo uso de la ecuación 14 con  $g=981$  cm/s<sup>2</sup>,  $\nu=0.01$  cm<sup>2</sup>/s y  $R_{Hd}=d_o/4=0.0397$  cm. Los valores de las propiedades del suelo de Tezoyuca y de los drenes considerados en el experimento se presentan en el cuadro 1.

A partir de los valores reportados en el cuadro 1 se estiman los siguientes valores medios de conductividad a saturación y de la dimensión relativa:  $\bar{K}_s = \sqrt{K_s K_d} = 223.2$  cm/h y  $\bar{s} = \frac{1}{2}(s_1 + s_d) = 0.6358$ .

La descripción de la prueba de drenaje con la ecuación de Boussinesq, utilizando la capacidad de almacenamiento definida por la ecuación 2, requiere introducir en esta relación una representación analítica de la curva de retención de humedad del suelo. Se utiliza la ecuación de van Genuchten (1980):

$$\theta(\psi) = \theta_r + (\theta_s - \theta_r) \left[ 1 + (\psi/\psi_d)^n \right]^{-m} \quad (15)$$

donde  $\psi$  es el potencial de presión del agua en el suelo ( $\psi=H-z$ );  $\psi_d$ , un parámetro de escala de la presión;  $\theta_r$ , el contenido volumétrico de agua residual;  $m$  y  $n$ , dos parámetros de forma, los cuales, de acuerdo con la recomendación de Fuentes et al. (1992), se relacionan entre sí con la restricción de Burdine (1953)  $m=1-2/n$ . Los valores de los parámetros para el suelo de Tezoyuca son  $\theta_s=0.539$  cm<sup>3</sup>/cm<sup>3</sup>,  $\theta_r=0.0$  cm<sup>3</sup>/cm<sup>3</sup>,  $\psi_d=-41.8$  cm y  $n=3.19$ .

Cuadro 1. Propiedades del suelo de Tezoyuca y de los drenes considerados en el experimento de Zavala (2003).

Medio	Porosidad volumétrica ( $\phi$ ) (cm <sup>3</sup> /cm <sup>3</sup> )	$s=D/3$	Porosidad areal ( $\mu$ ) (cm <sup>2</sup> /cm <sup>2</sup> )	Conductividad hidráulica a saturación (cm/h)
Suelo	0.5390	0.7026	0.4196	18.3
Pared del dren	0.0171	0.5689	0.0098	2,721.5



La capacidad de almacenamiento definida por la ecuación 2 con  $\theta(H-H_s)$  calculada con la ecuación 15 es la siguiente:

$$\mu(H) = (\theta_s - \theta_r) \left( 1 - \left[ 1 + \left[ \frac{(H - H_s)}{\psi_d} \right]^n \right]^{-m} \right) \quad (16)$$

Dada la simetría del sistema de drenaje experimental, la descripción de la prueba de drenaje puede realizarse con la forma unidimensional de ecuación de Boussinesq. Se usa la solución numérica desarrollada por Zavala (2003) para describir la evolución en el tiempo de la lámina de agua drenada durante la fase de recesión del manto freático, definida por:

$$\ell_d(t) = \frac{1}{L} \int_0^t Q_d(\bar{t}) d\bar{t} \quad (17)$$

Puesto que la recarga vertical en el sistema de drenaje experimental fue nula,  $R=0$ , el valor límite de la lámina drenada ( $\ell_\infty$ ) se calcula con la integración de la capacidad de almacenamiento desde la elevación de los drenes hasta la posición original de la superficie del manto freático (ver ilustración 1), es decir:

$$\ell_\infty = \int_{H_d}^{H_s} \mu(H) dH \quad (18)$$

El valor del parámetro  $\gamma$  de la condición de radiación fractal (12) se estima mediante la minimización de la suma de los cuadrados de los errores entre la lámina drenada medida y la lámina calculada con la solución numérica en el transcurso del tiempo. La mejor aproximación a los datos experimentales para  $\bar{s} = 0.6358$  y  $\bar{K}_s = 223.2$  cm/h se obtiene con  $\gamma = 0.0624$ , el cual proporciona un error cuadrático medio de  $ECM = 0.43$  cm. El resultado obtenido se compara con los datos experimentales en la ilustración 3, en la cual se observa un buen acuerdo entre ambas series de datos prácticamente en todo tiempo. En esta misma ilustración se presentan los resultados que se obtienen al considerar los valores extremos de la dimensión relativa ( $\bar{s} = 1/2$  y  $\bar{s} = 1$ ). Cuando se supone  $\bar{s} = 1/2$ , que corresponde a la condición de radiación lineal clásica reportada en la literatura ( $q_d \propto h$ ), las diferencias entre las evoluciones de la lámina drenada medida y la lámina calculada se minimizan con  $\gamma = 0.0478$  ( $ECM = 0.69$  cm);

sin embargo, ambas evoluciones son similares sólo cuando el tiempo de drenaje es menor de  $t < 0.1d$  y para tiempos mayores, la condición de radiación lineal sobreestima el gasto de drenaje, ya que la lámina drenada calculada tiende a su valor límite ( $\ell_\infty \cong 23.9$  cm) de forma más rápida de lo medido en laboratorio. Mientras que para  $\bar{s} = 1$  ( $q_d \propto h^2$ ), la mejor aproximación a los datos experimentales se obtiene con  $\gamma = 0.1475$  ( $ECM = 1.05$  cm); sin embargo, se observa una fuerte discrepancia entre datos calculados y medidos, ya que cuando el tiempo es menor de  $t < 0.1d$ , la evolución teórica sobreestima el gasto de drenaje y en tiempos mayores lo subestima.

## Conclusiones

En este trabajo se ha estudiado el tipo de condición de frontera que debe sujetar a la ecuación de Boussinesq en los drenes de un sistema de drenaje agrícola subterráneo. Se ha propuesto que la transferencia de agua del suelo hacia los drenes sea descrita con una condición de frontera tipo radiación, la cual permite describir las evoluciones de la carga hidráulica sobre el dren y del gasto de agua drenado, considerando la variación de la resistencia al flujo del agua en la interfaz suelo-dren. A partir de la aplicación de conceptos de geometría fractal se ha establecido que la resistencia es inversamente proporcional a una potencia fractal de la carga hidráulica sobre el dren, con el exponente definido implícitamente en función de las porosidades totales del suelo y de la pared del dren. Se ha verificado la capacidad descriptiva de la condición de radiación fractal propuesta, comparando los resultados obtenidos al aplicar esta relación con datos de un experimento de drenaje en laboratorio. El buen acuerdo entre los resultados teóricos y los datos experimentales permite recomendar el uso de la condición de radiación fractal para describir el flujo de agua del suelo hacia los drenes agrícolas durante la recesión de la superficie libre.

Recibido: 21/07/2003

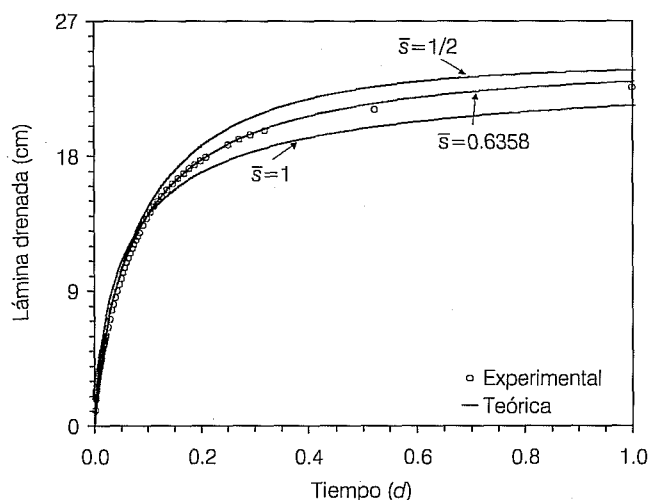
Aprobado: 29/09/2003

## Referencias

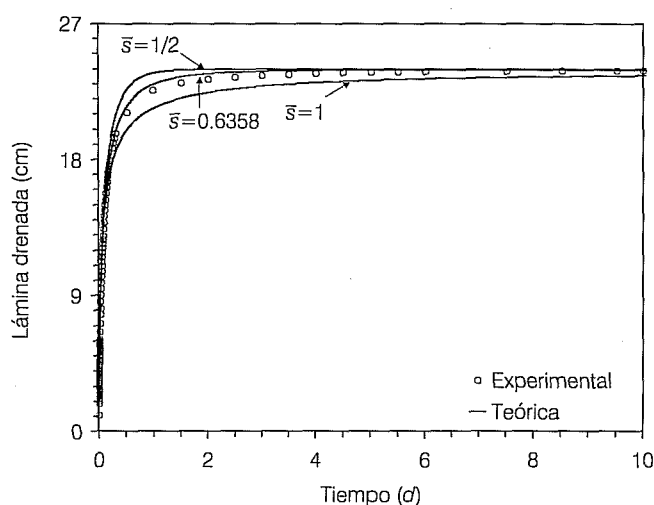
- BEAR, J. *Dynamics of fluids in porous media*. New York: Dover Publications, Inc., 1972, 764 pp.
- BURDINE, N.T. Relative permeability calculation from size distribution data. *Pet. Trans. AIME*. Vol. 198, 1953, pp. 71-78.
- CARSLAW, H.S. y JAEGER. *Conduction of heat in solids*. Oxford: Oxford University Press, 1959, 507 pp.



Ilustración 3. Evoluciones de la lámina drenada experimental y de la lámina drenada calculada con la condición de radiación fractal (12) para:  $\bar{s} = 1/2, \gamma = 0.0478$  (ECM  $\approx 0.69$  cm);  $\bar{s} = 0.6358, \gamma = 0.0624$ , (ECM  $\approx 0.43$  cm);  $\bar{s} = 1, \gamma = 0.1475$ , (ECM  $\approx 1.05$  cm).



a) Primer día de drenaje.



b) Diez días de drenaje.

CHILDS, E.C. y COLLIS-GEORGE, N. The permeability of porous materials. *Proy. Roy. Soc. Ser. A* núm. 201, 1950, pp. 392-405.

DUMM, L. Drain spacing formula. *Agricultural engineering*. Vol. 35, 1954, pp. 726-730.

FRAGOZA, F., FUENTES, C., ZAVALA, M., ZATARÁIN, F., SAUCEDO, H. y MEJÍA, E. *Drenaje agrícola con capacidad de almacenamiento variable*. Ingeniería hidráulica en México. Vol. 18, núm. 3, julio-septiembre de 2003, pp. 81-93.

FUENTES, C., HAVERKAMP, R. y PARLANGE, J.-Y. Parameter constraints on closed-form soil-water relationships. *Journal of hydrology*. Vol. 134, 1992, pp. 117-142.

FUENTES, C., NAMUCHE, R., RENDÓN, L., PATRÓN, R., PALACIOS, O., BRAMBILA, F. y GONZÁLEZ, A. Solución de la ecuación de Boussinesq del régimen transitorio en el drenaje agrícola bajo condiciones de radiación: el caso del Valle del Carrizo, Sinaloa. *Memorias del VII Congreso Nacional de Irrigación*. Vol. 3, núm. 141, México, 1997, pp. 3-145.

FUENTES, C., BRAMBILA, F., VAUCLIN, M., PARLANGE, J.-Y. y HAVERKAMP, R. Modelación fractal de la conductividad hidráulica de los suelos no saturados. *Ingeniería hidráulica en México*. Vol. 16, núm. 2, abril-junio de 2001, pp. 119-137.

HOOGHOUTD, S. *Bijdrage tot de kennis van enige natuurkundige grootheden van der grond*. Núm. 7. Verslag andbouwkw Onderzoek. Vol. 46, 1940, pp. 515-707.

MANDELBROT, B. *The fractal geometry of nature*. New York: W.H. Freeman and Company, 1982, 458 pp.

PURCELL, W.R. Capillary pressures their measurement using mercury and the calculation of permeability therefrom. *Petr. Trans. Amer. Inst. Mining Metallurgical Engrs*. Vol. 186, 1949, pp. 39-48.

RICHARDS, L.A. Capillary conduction of liquids through porous mediums. *Physics 1*. 1931, pp. 318-333.

SAUCEDO, H. *Flujo de agua hacia drenes subterráneos*. Tesis de maestría. México, D.F.: Universidad Nacional Autónoma de México, 1997, 72 pp.

VAN GENUCHTEN, M. A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of the unsaturated soils. *Soil Sci. Soc. Amer. Journal*. Vol. 44, 1980, pp. 892-898.

ZAVALA, M. *Sobre la condición de radiación no lineal en el drenaje agrícola subterráneo*. Tesis de doctorado. México, D.F.: Universidad Nacional Autónoma de México, 2003, 162 pp.

ZAVALA, M., FUENTES, C. y SAUCEDO, H. Sobre la condición de radiación lineal en el drenaje de una columna de suelo inicialmente saturado. *Ingeniería hidráulica en México*. Vol. 18, núm. 2, abril-junio de 2003, pp. 121-131.

**Abstract**

ZAVALA, M. FUENTES, C. & SAUCEDO, H. *Fractal radiation in the Boussinesq equation of the agricultural drainage*. Hydraulic engineering in México (in Spanish). Vol. XIX, no. 3, July-September, 2004, pp. 103-111.

*The type of boundary condition that must be subject to the Boussinesq equation in subsurface drains is studied. We propose that the water transfer from soil to drains be described by a radiation-type boundary condition, which permits to describe the evolution of both the hydraulic head and the drained flow by considering explicitly the variation of water flow resistance on the soil-drain interface. From the analysis of the extreme models of hydraulic conductivity of Purcell (1949) and Childs and Collis-George (1950) and the application of fractal geometry concepts, we establish that water flow resistance in the soil-drain interface is inversely proportional to the hydraulic head above the drain, with the exponent defined implicitly as a function of the total porosity of both the soil and the drain surface. The description capacity of the fractal radiation boundary condition is tested by comparison with experimental data. The good agreement between theoretical results and experimental data permits to recommend the use of the fractal radiation boundary condition to describe water flow from soil to drains during the recession of the free water surface.*

**Keywords:** soil-drain interface, water flow resistance, hydraulic conductivity.

**Dirección institucional de los autores:**

*Dr. Manuel Zavala*

Instituto Mexicano de Tecnología del Agua,  
Paseo Cuauhnáhuac 8532,  
Jiutepec, Morelos,  
CP 62550,  
mzavala@tlaloc.imta.mx

*Dr. Carlos Fuentes*

Instituto Mexicano de Tecnología del Agua,  
Paseo Cuauhnáhuac 8532,  
Jiutepec, Morelos,  
CP 62550,  
cfuentes@tlaloc.imta.mx

*Dr. Heber Saucedo*

Instituto Mexicano de Tecnología del Agua,  
Paseo Cuauhnáhuac 8532,  
Jiutepec, Morelos,  
CP 62550,  
hsaucedo@tlaloc.imta.mx