Título	El sistema de ecuaciones de Saint-Venant y Richards el riego por gravedad: 1. La ley potencial de resistencia hidráulica.
Autor / Adscripción	Carlos Fuentes Benjamín de León Heber Saucedo Instituto Mexicano de Tecnología del Agua Jean-Yves Parlange Cornell University, Estados Unidos de América Antonio C D Antonino Universidad Federal de Pernambuco, Brasil
Publicación	Ingeniería Hidráulica en México, 19(2): 65-75
Fecha de publicación	2004
Resumen	Se ha estudiado el comportamiento en tiempos muy cortos de las ecuaciones de Saint-Venant y de Richards en su acoplamiento para describir la fase de avance del riego por gravedad en melgas. En particular se ha establecido la evolución en el tiempo de la fuerza de fricción. Asimismo, se han analizado las leyes potenciales de resistencia hidráulica que pueden ser utilizadas en el acoplamiento. En otros términos, la ley potencial que debe utilizarse en el acoplamiento de las ecuaciones es la ley fractal de resistencia hidráulica.
Identificador	http://hdl.handle.net/123456789/755

ingeniería hidráulica en méxico, vol. XIX, núm. 2, pp. 65-75, abril-junio de 2004

El sistema de ecuaciones de Saint-Venant y Richards del riego por gravedad: 1. La ley potencial de resistencia hidráulica

Carlos Fuentes
Benjamín de León
Heber Saucedo

Instituto Mexicano de Tecnología del Agua

Jean-Yves Parlange

Cornell University, Estados Unidos de América

Antonio C.D. Antonino

Universidad Federal de Pernambuco, Brasil

*Se ha estudiado el comportamiento en tiempos muy cortos de las ecuaciones de Saint-Venant y de Richards en su acoplamiento para describir la fase de avance del riego por gravedad en melgas. En particular se ha establecido la evolución en el tiempo de la fuerza de fricción. Asimismo, se han analizado las leyes potenciales de resistencia hidráulica que pueden ser utilizadas en el acoplamiento. Se ha estudiado exhaustivamente la ley fractal de resistencia hidráulica desarrollada por Fuentes (1992, 1994), y utilizada por Fuentes y Vauclin (1994) en el riego por gravedad. La característica principal de esta ley es que las potencias de la pendiente de fricción (*d*) y del radio hidráulico (*b*) están relacionados por* $b=3d-1$ *y además* $d=D/3$*, donde* D *es una dimensión fractal de masa (Mandelbrot, 1983). Esta ley incluye como casos particulares las leyes extremas de Poiseuille y Chézy, la ley de Hazen-Williams y la de Prandtl-Blasius. El análisis en tiempos muy cortos permite concluir que esta ley es adaptable a una gran familia de funciones del caudal de riego impuestas como condición de frontera en la cabecera de la melga. También se ha estudiado la ley potencial de resistencia hidráulica con d y b independientes, la cual contiene la ley de Manning-Strickler. Se ha mostrado que la ley sólo es aplicable en el acoplamiento para una familia muy limitada de funciones del caudal de riego; en particular no es aplicable en el caso importante cuando el caudal de riego es una constante. Si esta ley se utilizada, sus parámetros dependen de las condiciones de frontera e implica que la evolución de la lámina de riego en tiempos muy cortos dependa del caudal de riego, lo cual contradice el resultado obtenido a través de la ecuación de Richards de que esta evolución es independiente del caudal de riego. Esta ley potencial, con la de Manning-Strickler incluida, no debe ser utilizada en el acoplamiento de las ecuaciones de Saint-Venant y de Richards del riego por gravedad. En otros términos, la ley potencial que debe utilizarse en el acoplamiento de las ecuaciones es la ley fractal de resistencia hidráulica.*

Palabras clave: fase de avance, ley fractal de resistencia hidráulica.

Introducción

El riego por gravedad consiste en la introducción del agua en una superficie de suelo relativamente seco, a partir de uno de sus extremos o la cabecera de la parcela. En caso de riego por melgas o surcos, esta superficie puede considerarse como un canal poroso. El aporte de agua induce un movimiento del agua sobre la superficie del suelo y un movimiento subterráneo. En estos movimientos se pueden distinguir tres fases: la fase de avance, que se inicia a partir del aporte de agua y finaliza en el momento en que el frente de onda llega al extremo terminal del canal; la fase de almacenamiento, que se inicia a partir del momento en que el frente de onda arriba al extremo terminal del canal y finaliza hasta el momento del corte del aporte de agua; la fase de recesión, compuesta de dos subfases: a) la recesión vertical, que se inicia a partir del corte del aporte de agua hasta el momento en que el tirante de agua en la cabecera del canal desaparece, y b) la recesión horizontal, que comprende desde la desaparición del tirante de agua en la cabecera hasta su desaparición a todo lo largo del canal.

La simulación matemática de las tres fases del riego exige una modelación de los movimientos superficial y subterráneo del agua. De acuerdo con los principios utilizados en la modelación, podemos agrupar los trabajos reportados en la literatura en el contexto de cuatro enfoques: a) la modelación de ambos movimientos se aborda de una manera totalmente empírica (*e.g.* Fok y Bishop, 1965; Willardson y Bishop, 1967); b) el movimiento superficial se modela con las ecuaciones de Saint-Venant (1871) y sus simplificaciones, y el movimiento subterráneo con ecuaciones empíricas como las de Kostiakov (1932) y Mezencev (1948) (*e.g.* Hart *et al.*, 1968; Chen, 1970; Kincaid *et al.*, 1972; Smith, 1972; Sakkas y Strelkoff, 1974; Cunge y Woolhiser, 1975; Basset y Fitzsimmons, 1976; Katopodes y Strelkoff, 1977; Strelkoff y Katopodes, 1977; Singh y Ram, 1983); c) el movimiento superficial se simplifica considerablemente (modelo hidrológico) y en la modelación del movimiento subterráneo existe la posibilidad de utilizar ecuaciones racionales (*e.g.* Lewis y Milne, 1938; Philip y Farrel, 1964), y d) el movimiento superficial se modela con las ecuaciones de Saint-Venant y el movimiento subterráneo con la ecuación de Richards (1931). Se puede citar el trabajo para modelar el riego por melgas desarrollado por Schmitz *et al.* (1985), quienes resuelven, con el método de las características, las ecuaciones completas de Barré de Saint-Venant y utilizan para el movimiento subterráneo la solución analítica de la infiltración obtenida por Parlange *et al.* (1985) a partir de la ecuación de Richards para el caso de una columna semi-infinita de suelo sujeta a una presión constante sobre la superficie del suelo (tirante de agua constante). Puesto que el tirante de agua es en realidad una función del tiempo, la solución es aproximada; es decir, las ecuaciones no están acopladas.

Este primer trabajo sobre el riego por gravedad tiene como objetivo el estudio de la ley potencial de resistencia hidráulica para llevar a cabo el acoplamiento de las ecuaciones de Saint-Venant y Richards. El estudio se lleva a cabo en el riego por melgas (canal rectangular) y en tiempos muy cortos de la fase de avance.

En el riego por melgas se presentan las relaciones geométricas siguientes: a) el área hidráulica $A=Bh$, donde B es el ancho de la melga y h el tirante de agua sobre la superficie del suelo; b) el perímetro mojado $P=B+2h$, c) el radio hidráulico $R_h=A/P=h/(1+2h/B)$. Puesto que el ancho de una melga es generalmente mucho más grande que el tirante de agua, las ecuaciones del movimiento se simplifican considerablemente, ya que se puede suponer que $P\approx B$ y $R_h\approx h$.

Las ecuaciones unidimensionales de Saint-Venant, que resultan de los principios de conservación de masa y de la cantidad de movimiento, se escriben para el riego por melgas de la manera siguiente (Liggett, 1975):

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial q}{\partial x}+V_I=0 \qquad (1.1)$$

$$\frac{\partial (hU)}{\partial t}+\frac{\partial (qU)}{\partial x}+\lambda V_I U+gh\frac{\partial (h+Z)}{\partial x}+ghJ=0 \qquad (1.2)$$

en donde x es la dirección principal del movimiento $[L]$; t es el tiempo $[T]$; $q(x,t)=U(x,t)h(x,t)$ es el caudal por unidad de ancho de melga o caudal unitario $[L^2T^{-1}]$; $U=U(x,t)$ es la velocidad media en una sección transversal $[LT^{-1}]$; $h=h(x,t)$ es el tirante del agua sobre la superficie del suelo $[L]$; $J_0=-\partial Z/\partial x$, con Z la coordenada vertical orientada positivamente hacia arriba $[L]$, es asimilada generalmente a la pendiente topográfica de la superficie del suelo cuando el ángulo de inclinación es pequeño $[LL^{-1}]$; $J=J(x,t)=-\partial h_f/\partial x$ es la pendiente de fricción $[LL^{-1}]$, h_f siendo la carga de fricción; g es la aceleración gravitacional $[LT^{-2}]$; $V_I=V_I(x,t)=\partial I(x,t)/\partial t$ es la velocidad de infiltración $[LT^{-1}]$, es decir, el volumen de agua infiltrado en la unidad de tiempo por unidad de ancho y por unidad de longitud de la melga; $I=I(x,t)$ es el volumen infiltrado por unidad de superficie de suelo o lámina infiltrada $[L]$; el parámetro adimensional λ está definido como $\lambda=V_{Ix}/U$, donde V_{Ix} es la proyección en la dirección del movimiento de la velocidad de salida de la masa de agua debido a la infiltración, la cual generalmente es despreciada (Woolhiser, 1975).

En la fase de avance del riego, las condiciones iniciales y de frontera son las siguientes:

$$q(x,0)=0 \quad \text{y} \quad h(x,0)=0 \tag{2.1}$$

$$q(0,t)=q_0, \quad q(x_f,t)=0 \quad \text{y} \quad h(x_f,t)=0 \tag{2.2}$$

donde q_o es el caudal unitario impuesto en $x=0$; $x_f(t)$ es la posición del frente de onda.

Para cerrar el sistema de las ecuaciones 1-2 es necesario proporcionar ecuaciones para la velocidad de infiltración y la pendiente de fricción.

La velocidad de infiltración se puede calcular con la ecuación de Richards (1931), resultado de la combinación de la ecuación de continuidad y de la ley de Darcy:

$$C(\psi)\frac{\partial \psi}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left[K(\psi)\frac{\partial \psi}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[K(\psi)\frac{\partial \psi}{\partial z}\right]-\frac{dK}{d\psi}\frac{\partial \psi}{\partial z} \tag{3}$$

donde $\psi=\psi(x, z, t)$ es el potencial de presión del agua en el suelo $[L]$; t es el tiempo $[T]$; $q=(q_x, q_z)=q(x, z, t)=-K(\psi)\nabla(\psi-z)$ es el flujo de Darcy $[LT^{-1}]$; z es el potencial gravitacional asimilado a la coordenada espacial z orientada positivamente hacia abajo $[L]$; K es la conductividad hidráulica del suelo $[LT^{-1}]$, función de la presión del agua $K=K(\psi)$; $C(\psi)=d\theta/d\psi$; es la capacidad específica $[L^{-1}]$; $\theta=\theta(x, z, t)$ es el volumen de agua por unidad de volumen de suelo, conocido como contenido volumétrico de agua $[L^3L^{-3}]$.

La ecuación de Richards se debe resolver con la condición de Dirichlet en la superficie del suelo:

$$\psi(x,0,t)=h(x,t) \tag{4}$$

La velocidad de infiltración es igual al flujo vertical de Darcy en la superficie del suelo: $V_I(x, t)=q_z(x, 0, t)$.

En cuanto a la ley de resistencia hidráulica que relaciona la velocidad media del movimiento U, el tirante h y la pendiente de fricción J, es bastante común aceptar una ley potencial, a saber:

$$U=ch^bJ^d \tag{5}$$

La ecuación 5, por su generalidad como ley potencial, incluye las formulaciones clásicas de Chézy con $b=d=1/2$ y $c=C_h$, donde C_h es un coeficiente empírico dimensional; de Manning-Strickler con $b=2/3$, $d=1/2$, y $c=1/n$ donde n es un coeficiente de rugosidad dimensional; de Poiseuille con $b=2$, $d=1$ y $c=kg/\nu$, donde ν es el coeficiente de viscosidad cinemática $[L^2T^{-1}]$ y k es un factor adimensional, cuyo valor en el flujo sobre superficies lisas es $k=1/3$ (*e.g.* Landau y Lifchitz, 1989). Asimismo, incluye la fórmula de Hazen-Williams, utilizada en el diseño de redes de tuberías (King *et al.*, 1952), con $b=0.63$, $d=0.54$ y $c=C_{HW}$, donde C_{HW} es un coeficiente dimensional. Ella también incluye la ley de Prandtl utilizada por Blasius para estimar el factor de fricción de la fórmula de Darcy-Weisbach con $b=5/7$, $d=4/7$ y $c=C_{PB}$, donde C_{PB} es un coeficiente dimensional.

Las condiciones para el acoplamiento de las ecuaciones de Saint-Venant y Richards en la fase de avance en el riego por gravedad han sido planteadas en años recientes. Fuentes (1992, 1994) propone una ley potencial de resistencia hidráulica, en la cual existe una relación entre los exponentes b y d de la ecuación 5, la cual es argumentada por Fuentes y Vauclin (1994) en el riego por melgas en tiempos muy cortos. Se entiende por tiempos muy cortos, los tiempos cuando los efectos gravitacionales son despreciables

La infiltración en el origen del tiempo

Para el acoplamiento en tiempos cortos de las ecuaciones de Saint-Venant y Richards en la fase de avance se requiere conocer el comportamiento de la lámina infiltrada cuando el tirante de agua sobre la superficie del suelo evoluciona como $h=\sigma t^\alpha$ con $\sigma \geq 0$ y $\alpha \geq 0$.

La infiltración del agua en la melga es descrita por la ecuación de Richards bidimensional, definida por la ecuación 3; sin embargo, se puede mostrar que la infiltración es esencialmente vertical y descrita con la ecuación de Richards unidimensional, considerando el tiempo en esta última como el tiempo de contacto que tiene el agua en un punto dado de la melga (Saucedo *et al.*, 2001).

El análisis de la ecuación de Richards en tiempos muy cortos ha permitido establecer que la lámina infiltrada es proporcional a la raíz cuadrada del tiempo (Parlange *et al.*, 1982; Haverkamp *et al.*, 1990): $I(0, t)=S\sqrt{t}$, cuando la presión del agua en la superficie es constante. El parámetro S es denominado por Philip (1957) como la sorbilidad del suelo (habilidad del suelo para sorber agua), originalmente en los casos de presión negativa o nula en la superficie; en el caso de una presión positiva, se puede guardar la misma denominación o, si se desea hacer la distinción con la anterior, esta última puede ser denominada sorbilidad global.

Bajo la hipótesis de una distribución hidrostática de las presiones, la presión del agua en la superficie del suelo es igual al tirante de agua sobre su superficie. Se desea demostrar, a partir de la ecuación de Richards de la infiltración vertical, que si la evolución del tirante de agua en tiempos muy cortos es proporcionada por $h=\sigma t^{\alpha}$, la evolución de la lámina infiltrada correspondiente es proporcionada por $I=St^{\beta}$, con $\beta=1/2$.

La ecuación de continuidad y la ley Darcy de la infiltración vertical son, respectivamente: $\partial\theta/\partial t=-\partial q_z/\partial z$ y y $q_z=-K(\psi)\partial\psi/\partial z+K(\psi)$. La ecuación de Richards resultante se resuelve en una columna semi-infinita de suelo con una condición de presión inicial constante (ψ_0), lo cual no resta generalidad, ya que de hecho se está interesado en la evolución de la infiltración en tiempos muy cortos; el contenido de humedad y la conductividad hidráulica correspondientes son $\theta_o=\theta(\psi_o)$ y $K_o=K(\psi_o)$. La condición de frontera en la superficie del suelo o frontera superior es proporcionada por $\psi=h$; el contenido de humedad es igual al contenido de humedad a saturación $\theta_s=\theta(0\leq\psi\leq h)$, y la conductividad hidráulica es igual a la conductividad hidráulica a saturación $K_s=K(0\leq\psi\leq h)$. La condición de frontera inferior (en el infinito) es igual a la condición inicial con $\theta_o<\theta_s$. La integración de la ecuación es facilitada con la introducción de la relación de flujos, concepto extraído por Philip (1973) de los trabajos de Parlange (1971a, 1971b), y considerando el hecho de que bajo las condiciones límites asumidas, la ecuación de continuidad puede ser escrita como $\partial z/\partial t=\partial q_z/\partial\theta$, en la cual θ y t son ahora las variables independientes:

$$F(\theta,t)=\int_{\theta_o}^{\theta}(\partial z/\partial t)d\vartheta \Big/ \int_{\theta_o}^{\theta_s}(\partial z/\partial t)d\vartheta=\frac{q_z(\theta,t)-K_o}{V_I(t)-K_o} \qquad (6)$$

en donde $0\leq F(\theta,t)\leq 1$.

La introducción de la ley de Darcy en la ecuación 6 permite obtener la ecuación diferencial:

$$\frac{\partial z}{\partial\psi}=-\frac{K(\psi)}{F[\theta(\psi),t][V_I(t)-K_o]-[K(\psi)-K_o]} \qquad (7)$$

cuya integración sobre el intervalo $(\psi,h]$, considerando que $F[\theta(0\leq\psi\leq h),t]=1$, permite obtener la evolución del perfil de presiones:

$$z(\psi,t)=\int_{\psi}^{0}\frac{K(\bar\psi)}{F[\theta(\bar\psi),t][V_I(t)-K_o]-[K(\bar\psi)-K_o]}d\bar\psi+\frac{K_s h(t)}{V_I(t)-K_s} \qquad (8)$$

Se debe observar que el perfil de presiones está compuesto de la posición del frente de saturación, el segundo término que define su espesor y una función de la presión en la zona no saturada, ubicada debajo de la zona saturada, proporcionada por el primer término (Parlange *et al.*, 1985).

Ahora bien, la ecuación de continuidad proporciona la expresión de la lámina infiltrada, a saber:

$$I(t)-K_o t=\int_0^{\infty}[\theta(z,t)-\theta_o]dz=\int_{\theta_o}^{\theta_s}z(\theta,t)d\theta \qquad (9)$$

La introducción de la ecuación 7 u 8 en la ecuación 9 y los cambios de variables pertinentes conduce a:

$$I(t)-K_o t=\int_{\psi_o}^{0}\frac{[\theta(\psi)-\theta_o]K(\psi)}{F[\theta(\psi),t][V_I(t)-K_o]-[K(\psi)-K_o]}d\psi+\frac{K_s\Delta\theta h(t)}{V_I(t)-K_s} \qquad (10)$$

donde $\Delta\theta=\theta_s-\theta_o$.

La ecuación 10 puede ser integrada de manera cuasi-exacta siguiendo la técnica de Parlange *et al.* (1982) utilizada originalmente para $h=0$ y aplicada para $h=$constante>0 por Parlange *et al.* (1985) y Haverkamp *et al.* (1990). Sin embargo, la ecuación 10 se puede integrar de manera exacta en tiempos muy cortos. Se puede demostrar que cuando $t\to 0$, la función $F(\theta,t)$ es una función solamente del contenido volumétrico de agua; es decir, $F(\theta,t)=f(\theta)$ (Parlange, 1975). Puesto que en tiempos muy cortos $V_I(t)>>K_s\geq K(\psi)$, la ecuación 10 se reduce a la ecuación diferencial ordinaria siguiente $[V_I(t)=dI/dt]$:

$$I(t)=\frac{S_o^2}{2V_I(t)}+\frac{K_s\Delta\theta h(t)}{V_I(t)} \qquad (11)$$

en donde S_o es la sorbilidad del suelo calculada con (Parlange, 1975):

$$S_o^2=2\int_{\psi_o}^{0}\frac{[\theta(\psi)-\theta_o]K(\psi)}{f[\theta(\psi)]}d\psi \qquad (12)$$

En el segundo miembro de la ecuación 11, el primer término representa la contribución a la lámina infiltrada de la zona no saturada del suelo, mientras que el segundo es la contribución de la zona saturada; ambas zonas generadas, por supuesto, por la infiltración del agua a través de la superficie del mismo.

La introducción de $I=St^{\beta}$ y $h=\sigma t^{\alpha}$ en la ecuación 11 permite la evaluación del límite siguiente:

$$S^2 = \lim_{t \to 0} \left(\frac{S_o^2}{2\beta} t^{1-2\beta} + \frac{K_s \Delta\theta\sigma}{\beta} t^{\alpha+1-2\beta} \right) \quad (13)$$

y para que éste exista se debe tener $1-2\beta \geq 0$ y $\alpha+1-2\beta \geq 0$.

Si se supone que la zona no saturada no contribuye al límite, se tiene que $1-2\beta>0$, y si la zona saturada tampoco contribuye ($\alpha+1-2\beta>0$), se obtiene la solución trivial $S=0$. Cuando hay contribución al límite por parte de la zona saturada ($\alpha+1-2\beta=0$), se deduce que $\alpha<0$, lo cual implica que $h \to \infty$ cuando $t \to 0$, situación físicamente imposible. Así que, en definitiva, la zona no saturada sí contribuye al límite, es decir $1-2\beta=0$, de donde $\beta={}^1/_2$. En tal situación, si la zona saturada también contribuye ($\alpha+1-2\beta=0$), implica que $\alpha=0$, lo que equivale a que el tirante sea constante (que puede ser nulo) y se obtiene el resultado clásico (Parlange *et al.*, 1985) $S^2=S_o^2+2K_s\sigma\Delta\theta$. Si la zona saturada no contribuye al límite ($\alpha+1-2\beta>0$), implica que $\alpha>0$; es decir, el tirante de agua puede ser una función monótona creciente en tiempos muy cortos, como ocurre en el riego por gravedad y, en este caso, $S=S_o$.

Se ha demostrado, por lo tanto, que si en la superficie del suelo la presión del agua evoluciona en tiempos muy cortos como $h=\sigma t^{\alpha}$ con $\alpha \geq 0$, la lámina infiltrada evoluciona en los mismos siempre como $I=St^{\beta}$ con $\beta={}^1/_2$.

La fase de avance en el origen del espacio y el tiempo

El acoplamiento de las ecuaciones de Saint-Venant y Richards en la fase de avance del riego por gravedad en melgas se estudia cuando el caudal de riego, impuesto como condición de frontera en la cabecera de la melga, se representa por funciones que satisfagan el límite siguiente:

$$\lim_{t \to 0} \left[q(0,t) t^{-\gamma} \right] = C_q \quad (14)$$

en donde $C_q \geq 0$ y $\gamma \geq 0$ son parámetros dados. Un caudal constante es representado por $\gamma=0$.

La variación temporal del tirante de agua en la cabecera se representa por funciones que satisfacen el límite siguiente:

$$\lim_{t \to 0} \left[h(0,t) t^{-\alpha} \right] = \sigma \quad (15)$$

en el cual los parámetros σ y α deben ser determinados. Es claro que $\alpha \geq 0$, puesto que inicialmente no hay agua sobre la superficie de la melga.

El comportamiento de la velocidad en la cabecera cuando $t \to 0$ se deduce de las ecuaciones 14 y 15, a saber:

$$U(0,t) = \frac{C_q}{\sigma} t^{\gamma-\alpha} \quad (16)$$

de donde se infiere que en el tiempo inicial la velocidad es nula si $\gamma-\alpha>0$; es una constante si $\gamma-\alpha=0$, y es infinita si $\gamma-\alpha<0$. La última situación ocurre cuando el caudal de riego es constante.

La variación temporal de la lámina de agua en la cabecera es representada por funciones que satisfacen el límite siguiente:

$$\lim_{t \to 0} \left[I(0,t) t^{-\beta} \right] = S \quad (17)$$

en la cual S es la sorbilidad y $\beta={}^1/_2$.

Para la pendiente del perfil de agua sobre la superficie del suelo en la entrada de la melga se asume la dependencia siguiente:

$$\lim_{t \to 0} \left[\frac{\partial h(0,t)}{\partial x} t^{\delta} \right] = -C_p \quad (18)$$

en donde $C_p \geq 0$ y $\delta \geq 0$, ya que en la fase de avance $\partial h/\partial x \leq 0$.

Para continuar, se recuerda que la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento (ecuación 1.2) es el resultado del siguiente razonamiento: la masa contenida en un paralelepípedo de ancho B, de longitud $L=\Delta x$ y de altura h es igual a ρBLh, donde ρ es la densidad del agua; las fuerzas (en la dirección x) que participan en la ecuación (1.2) son la fuerza motriz $F_M=\partial(\rho BLhU)/\partial t$; la fuerza convectiva $F_C=\partial(\rho BLqU)/\partial x$; la fuerza debida a la extracción de masa por infiltración $F_I=\lambda\rho BLV_IU$; la fuerza de presión $F_P=\rho BLh(g\ \partial h/\partial x)$; la fuerza debida a la gravedad $F_G=\rho BLh(g\ \partial Z/\partial x)$, y la fuerza de fricción, que es definida para conservar la estructura de las fuerzas de presión y gravedad, $F_f=\rho BLh(gJ)$. La suma de estas fuerzas es igual a cero. Se denotan con la letra f, con los subíndices respectivos, las fuerzas precedentes por unidad de masa $[f=F/(\rho BLh)]$. El comportamiento de estas fuerzas unitarias en tiempos muy cortos se deduce de las ecuaciones 14 a 18:

$$f_M(0,t)=\frac{\gamma C_q}{\sigma}t^{\gamma-1-\alpha} \quad (19)$$

$$f_c(0,t)=-\frac{2C_q}{\sigma^2}t^{\gamma-2\alpha}\left(\alpha\sigma t^{\alpha-1}+\beta S t^{\beta-1}\right)+\frac{C_q^2 C_p}{\sigma^3}t^{2\gamma-3\alpha-\delta} \quad (20)$$

$$f_I(0,t)=\lambda\frac{\beta S C_q}{\sigma^2}t^{\beta+\gamma-2\alpha-1} \quad (21)$$

$$f_P(0,t)=-gC_p t^{-\delta} \quad (22)$$

$$f_G(0,t)=-gJ_o \quad (23)$$

en donde la ecuación 20 es obtenida considerando la ecuación de continuidad, ecuación 1.1; es decir, $\partial q/\partial x=-(\partial h/\partial t+\partial I/\partial t)$.

Para la fuerza unitaria de fricción en la cabecera de la melga y en tiempos muy cortos se asume, en analogía con las ecuaciones 22 y 23, el comportamiento siguiente:

$$f_f(0,t)=gJ(0,t)=C_f t^{-\eta} \quad (24)$$

donde $C_f \geq 0$ y η son parámetros a determinar.

Se puede establecer el límite siguiente:

$$\lim_{t\to 0}\left[f_f(0,t)t^{\eta}\right]=C_f \quad (25)$$

Puesto que $f_f=-(f_M+f_C+f_I+f_P+f_G)$, la consideración de las ecuaciones 19 a 25 permite escribir, después de simplificar, lo siguiente:

$$f_f(0,t)t^{\eta}=\frac{C_q}{\sigma}(2\alpha-\gamma)t^{\eta-\alpha-1+\gamma}+\frac{2\kappa\beta C_q S}{\sigma^2}t^{\eta-2\alpha+\beta-1+\gamma}$$
$$-\frac{C_q^2 C_p}{\sigma^3}t^{\eta-\delta-3\alpha+2\gamma}+gC_p t^{\eta-\delta}+gJ_o t^{\eta} \quad (26)$$

donde $\kappa=(2-\lambda)/2$.

Las fuerzas motriz, convectiva y de infiltración son equilibradas por la fuerza de fricción y, en consecuencia, contribuyen a C_f del límite (ecuación 25). De la ecuación 26 se deducen las siguientes relaciones entre los exponentes:

$$\eta-\alpha-1+\gamma=0 \quad (27)$$

$$\eta-\delta-3\alpha-2\gamma=0 \quad (28)$$

$$\eta-2\alpha+\beta-1+\gamma=0 \quad (29)$$

en las cuales se debe notar que las ecuaciones 27 y 28 son válidas también en el caso en que la infiltración sea nula (canal impermeable).

De la combinación de las ecuaciones 27 y 28 se obtiene el resultado válido en canales rectangulares tanto impermeables como permeables (melgas):

$$\delta=\gamma-2\alpha+1 \quad (30)$$

y de las ecuaciones 27 y 29 se deduce el resultado válido en las melgas:

$$\alpha=\beta \quad (31)$$

La evaluación del límite de la ecuación 25 con la ecuación 26 conduce a ($\eta-\delta>0$):

$$C_f=\frac{C_q}{\sigma^3}\left\{\sigma\left[(2\alpha-\gamma)\sigma+2\beta\kappa S\right]-C_q C_p\right\}$$
$$+\lim_{t\to 0}\left[gC_p t^{\eta-\delta}+gJ_o t^{\eta}\right] \quad (32)$$

El conocimiento del comportamiento en tiempos muy cortos de las diferentes fuerzas en la cabecera de la melga depende de los valores de los exponentes γ y α. El primero es proporcionado por la condición de frontera impuesta, mientras que el segundo es igual al exponente β del comportamiento de la lámina infiltrada en tiempos muy cortos. Cuando la infiltración es descrita por la ecuación de Richards ($\beta={}^1/_2$), se tiene $\alpha={}^1/_2$, y de las ecuaciones 27 y 30, $\eta={}^3/_2-\gamma$ y $\delta=\gamma$.

Si se considera que la fuerza gravitacional contribuye a la constante C_f de la ecuación 32, se infiere que $\eta=0$ y, por lo tanto, $\gamma=\delta={}^3/_2$; esto indica que la fuerza gravitacional solamente contribuiría a C_f cuando la condición de frontera tenga el comportamiento particular $q(0,t)=C_q t^{3/2}$; sin embargo, se tendría que $\eta-\delta=-{}^3/_2<0$; es decir, que la contribución de la fuerza de presión haría que C_f crezca sin bornes; en consecuencia, se debe tener $\eta>0$ y $\delta=\gamma<{}^3/_2$. Ahora bien, si se considera que la fuerza de presión contribuye a la constante C_f, de la ecuación 32 se infiere que $\eta-\delta=0$ y, por lo tanto, $\eta=\delta=\gamma={}^3/_4>0$; esto implica que la fuerza gravitacional no contribuye a C_f

como en el caso precedente, y que la contribución de la fuerza de presión ocurre cuando la condición de frontera tenga el comportamiento particular $q(0,t)=C_q t^{3/4}$. De lo anterior se infiere que $\eta>0$ y $\eta-\delta\geq 0$; es decir, que en el acoplamiento de las ecuaciones de Saint-Venant y Richards se debe tener:

$$C_f = \frac{C_q}{\sigma^3}\left\{\sigma\left[(2\alpha-\gamma)\sigma+2\beta\kappa S\right]-C_q C_p\right\}+\lim_{t\to 0}\left[gC_p t^{\eta-\delta}\right] \quad (32a)$$

el límite existe si $\eta-\delta={}^3/_2-2\gamma\geq 0$; esto es, si $\gamma\leq {}^3/_4$.

El comportamiento de la fuerza unitaria de fricción $gJ(0,t)=C_f t^{\gamma-3/2}$ cuando $t\to 0$, puede ser expresado haciendo que intervengan las ecuaciones 14 y 15, como $h^3(0,t)gJ(0,t)=(C_f/\sigma^3 C_q)q(0,t)$. Utilizando la viscosidad cinemática en esta igualdad se puede establecer el resultado siguiente:

La ley de resistencia hidráulica utilizada en el acoplamiento de las ecuaciones de Saint-Venant y Richards en el riego por gravedad debe satisfacer el límite:

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{\nu q(0,t)}{h^3(0,t)gJ(0,t)}\right)=\lim_{t\to 0}\left(\frac{\nu U(0,t)}{h^2(0,t)gJ(0,t)}\right)=C_k \quad (33)$$

donde $C_k=\nu C_q/\sigma^3 C_f$ es una constante adimensional.

Aunque se ha establecido el comportamiento de la fuerza unitaria de fricción en tiempos muy cortos, es necesario introducir una relación entre ésta y las variables del movimiento para describir el riego por gravedad en tiempos siguientes. Una de las relaciones más utilizadas es la ley potencial de resistencia hidráulica, descrita en la ecuación 5. Para proceder a su estudio primero se establecerá la estructura de la ley siguiendo el razonamiento de Fuentes (1992, 1994).

Leyes potenciales de resistencia hidráulica

El establecimiento de la ley potencial de resivÚ5ncia hidráulica se realiza utilizando un análisis dimensional. Asimismo, se establecen leyes potenciales no inferidas a partir de este análisis. La aplicabilidad de estas leyes será analizada en el acoplamiento en tiempos muy cortos de las ecuaciones de Saint-Venant y Richards en el riego por gravedad en melgas.

Análisis dimensional y fractalidad

De acuerdo con las definiciones de fuerza y la segunda ley de Newton, la fuerza es igual a la masa multiplicada por su cantidad acelerativa o aceleración. La fuerza de fricción puede ser interpretada como el producto de la masa por su cantidad de fricción o por su cantidad disipativa; en la definición de la fuerza de fricción, $F_f=(\rho BLh)(gJ)$, $f_f=gJ$ sería la cantidad de fricción o fuerza de fricción por unidad de masa o fuerza unitaria de fricción (fuerza disipatriz). La fuerza de fricción es también proporcionada por $F_f=BL\tau_P$, donde τ_P es el valor del esfuerzo cortante en la superficie del suelo y, en consecuencia, $\tau_P=\rho hgJ$. La velocidad de frotamiento (U_f) se define de modo que $\tau_P=\rho U_f^2$, es decir, $U_f=\sqrt{hgJ}$.

La ley de Chézy se obtiene bajo la hipótesis de que la velocidad media es proporcional a la velocidad de frotamiento: $U=kU_f=k\sqrt{hgJ}$, y $C_h=k\sqrt{g}$, donde k es un coeficiente adimensional. La proporcionalidad entre las dos velocidades puede ser deducida de un perfil de las velocidades [$u(y)$, con $0<y<h$] uniforme [$u(y)$=constante], como ocurre en un perfil potencial cuando el número de Reynolds tiende al infinito; la velocidad media es proporcional a la raíz cuadrada de la fuerza unitaria de fricción: $U\propto\sqrt{f_f}$.

La ley de Poiseuille para una superficie plana puede ser deducida partiendo de la hipótesis de Newton entre el esfuerzo cortante (τ) y la derivada del perfil de las velocidades [$\tau=\rho\nu\, du/dy$ y $\tau=\tau_P(1-y/h)$]; el perfil de velocidades es una parábola. De acuerdo con esta hipótesis, se puede definir una velocidad (U_c), de suerte que el esfuerzo cortante en la superficie sea proporcionado por $\tau_P=\rho\nu\, U_c/h$, y puesto que $\tau_P=\rho hgJ$, entonces $U_c=h^2gJ/\nu$. La velocidad media es proporcional a la velocidad U_c: $U=kU_c=k\, h^2\, gJ/\nu$, donde k es un coeficiente de proporcionalidad adimensional, en régimen permanente y en superficies lisas $k={}^1/_3$ (Landau y Lifchitz, 1989). Con respecto a esta ley se debe señalar que la proporcionalidad entre U y U_c es válida cuando el número de Reynolds tiende a cero; la velocidad media es proporcional a la fuerza unitaria de fricción $U\propto f_f$.

Las leyes de Chézy y Poiseuille pueden ser reunidas en una sola. La proporción entre la velocidad media y la fuerza unitaria de fricción se generaliza de la manera siguiente (Fuentes, 1994): $U\propto f_f^d$. Para establecer la igualdad se introduce el tirante de agua y la viscosidad cinemática. El análisis dimensional arroja:

$$U=k\frac{h^{3d-1}}{\nu^{2d-1}}(gJ)^d \quad (34)$$

De esta ley se deduce la de Chézy, haciendo $d={}^1/_2$ y la de Poiseuille como $d=1$, la cual contiene la ley de

Hazen-Williams ya que haciendo $d=0.54$ se obtiene $b=3d-1=0.62$, prácticamente igual al valor experimental de 0.63. También contiene la ley de Prandtl-Blasius, puesto que $d={}^4/_7$ corresponde a $b=3d-1={}^5/_7$.

La expresión resultante de la ecuación 34 para el caudal unitario ($q=Uh$) es la siguiente:

$$q = k\nu\left(\frac{h^3 gJ}{\nu^2}\right)^d \tag{35}$$

De acuerdo con Fuentes (1992), el exponente d de esta ecuación tiene una interpretación fractal. Definiendo una escala, de suerte que $\lambda_f^3=\nu^2/gJ$, la ecuación 35 se escribe como $q=k\nu(h/\lambda_f)^D$, con $D=3d$. En el formalismo de la geometría fractal de Mandelbrot (1983), D corresponde a una dimensión fractal de masa, y de acuerdo con el análisis precedente: ${}^3/_2<D<3$, el límite inferior corresponde a la ley de Chézy y el superior, a la ley de Poiseuille.

Otras leyes potenciales

Se debe notar que la ecuación 34 no contiene la ley de Manning-Strickler debido a que el análisis dimensional ha sido realizado de modo que el producto gJ estuviera elevado a la misma potencia, ya que representa un solo concepto a saber: la fuerza unitaria de fricción. No obstante, la ecuación 34 puede ser generalizada para incluir la ley de Manning-Strickler y otras que no satisfagan la relación entre b y d de la ecuación 5, establecida en la ecuación 34 de la manera siguiente:

$$U = k\left(\frac{gh^3}{\nu^2}\right)^a \frac{h^{3d-1}}{\nu^{2d-1}}\left(gJ\right)^d \tag{36}$$

La estructura de la ley de Manning-Strickler se obtiene con $d={}^1/_2$ y $b=3d-1+3a={}^2/_3$; es decir, $a={}^1/_{18}$. Esta ley puede presentarse en la forma usual de la hidráulica de los canales abiertos como $U=(1/n)h^{2/3}J^{1/2}$, haciendo en la ecuación 36 $k=k_0^{-1}(\nu^2/g\varepsilon^3)^{1/18}$; esto es, $n=k_o g^{-1/2}\varepsilon^{1/6}$, en donde k_o es un parámetro sin dimensiones y ε, la escala de rugosidad de Nikuradse. Sin embargo, lo importante para el análisis no es la manera de expresar las constantes empíricas sino la naturaleza funcional de la ley, esto es, la manera en que están relacionadas la fuerza unitaria de fricción con la velocidad media y el tirante de agua.

Análisis de las leyes de resistencia hidráulica

El análisis de la aplicabilidad de las leyes de Poiseuille, Chézy, Hazen-Williams y Prandtl-Blasius en el acoplamiento es equivalente al análisis de la aplicabilidad de la ley de resistencia hidráulica obtenida a través del análisis dimensional y definida por la ecuación 34 (${}^1/_2\leq d\leq 1$ y $b=3d-1$), ya que esta última contiene a las primeras. Es decir, sólo se analizan las ecuaciones 34 y 36.

Para comenzar, se establece la expresión general para el caudal unitario que resulta de la ecuación 5:

$$q = ch^{1+b}J^d \tag{37}$$

La introducción de las ecuaciones 14, 15, 25 y 27 en la ecuación 37 permite obtener $\gamma=\alpha(1+b)-d(1+\alpha-\gamma)$, es decir:

$$\left(1-d\right)\gamma = \alpha\left(1+b-d\right)-d \tag{38}$$

La ley fractal de resistencia hidráulica

La introducción de $b=3d-1$, ecuaciones 5 y 34, en la ecuación 38, conduce a:

$$\left(1-d\right)\gamma = d\left(2\alpha-1\right) \tag{39}$$

Se debe observar que con $d=1$, correspondiente a la ley de Poiseuille, se obtiene el resultado $\alpha={}^1/_2$, que no requiere como condición el comportamiento de la infiltración en tiempos muy cortos, ecuación 17, con $\beta={}^1/_2$. Cuando la función caudal de riego tiende a una constante conforme el tiempo tiende a cero ($\gamma=0$), conduce también al mismo resultado para todas las leyes ${}^1/_2\leq d\leq 1$.

En el acoplamiento de las ecuaciones de Saint-Venant y Richards se satisface $\alpha=\beta={}^1/_2$ y, en consecuencia, la ecuación 39 se transforma en $(1-d)\gamma=0$. Para ${}^1/_2\leq d<1$ se deduce que $\gamma=0$, lo que indica que las leyes correspondientes, como las de Chézy, Hazen-Williams y Prandtl-Blasius, sólo son aplicables cuando el caudal de riego tiende a una constante en el tiempo inicial. Puesto que para $d=1$ el exponente γ es arbitrario, la ley de Poiseuille es aplicable, independientemente del comportamiento de la función caudal de riego en tiempos muy cortos. Estos resultados se infieren también al evaluar el límite de la ecuación 33 con la ecuación 35:

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{\nu q(0,t)}{h^3(0,t)gJ(0,t)}\right)=k\lim_{t\to 0}\left(\frac{k\nu}{q(0,t)}\right)^{(1-d)/d}=C_k \quad (40)$$

con $d=1$ el límite es una constante ($C_k=k$) y para $^1/_2\leq d<1$ es necesario que $\lim_{t\to 0} q(0,t)$ sea igual a una constante q_e [$C_k=k(k\nu/q_e)^{(1-d)/d}$].

Otras leyes potenciales

A partir de las ecuaciones 5 y 36 se deduce que $b=3d-1+3a$. La introducción de esta expresión en la ecuación 38 conduce a:

$$(1-d)\gamma=d(2\alpha-1)+3\alpha a \quad (41)$$

Para la ley de Manning-Strickler, representada por $d={}^1/_2$ y $a={}^1/_{18}$, se deduce que $7\alpha-3(1+\gamma)=0$. Puesto que en el acoplamiento de las ecuaciones de Saint-Venant y Richards $\alpha={}^1/_2$ se deduce que $\gamma={}^1/_6$, lo que indica que esta ley es aplicable cuando el caudal de riego se comporta como $q(0,t)\propto t^{1/6}$ en tiempos muy cortos. Esta ley no se puede utilizar, por lo tanto, cuando el caudal de riego es constante.

En general, las leyes representadas por la ecuación 36 pueden ser utilizadas en el acoplamiento de las ecuaciones de Saint-Venant y Richards ($\alpha=\beta=1/2$), calculando el exponente con la expresión: $a={}^2/_3(1-d)\gamma$. Sin embargo, ¡estas leyes de resistencia dependerán de la condición de frontera!

Si el acoplamiento de las ecuaciones de Saint-Venant no es realizado con la ecuación de Richards sino con la ecuación empírica de Kostiakov (1932), $I=St^\beta$, o de Mezencev (1948), $I=St^\beta+ct$, ambas asumidas válidas para todo tiempo, el exponente $\alpha=\beta$ se puede obtener de la ecuación 41: $\beta=[(1-d)\gamma+d]/(2d+3a)$. Para la ley de Manning-Strickler, $\beta={}^3/_7(1+\gamma)$, esto es, que la evolución de la lámina infiltrada depende del caudal de riego. En particular, cuando $\gamma=0$, como en el caso de un caudal de riego constante, la evolución de la lámina infiltrada queda predeterminada con $\beta={}^3/_7\cong 0.4286$.

Por lo anterior se infiere que la ley de Manning-Strickler no puede ser considerada como una ecuación constitutiva en el fenómeno del riego por gravedad cuando se utilizan las ecuaciones de Saint-Venant y Richards.

Esta ley fue establecida en régimen permanente para justificar algunos datos experimentales, Manning dejó fija la potencia $^1/_2$ de la pendiente de fricción tomada de la ley de Chézy y recalculó la potencia del radio hidráulico obteniendo aproximadamente $^2/_3$ (Levi, 1989). Si se toma este valor de la potencia del radio hidráulico en la ley fractal de resistencia $3d-1={}^2/_3$ el valor de la potencia de la pendiente de fricción es de $d={}^5/_9$.

El acoplamiento de las ecuaciones de Saint-Venant con la ecuación de Richards (o algunas de sus soluciones analíticas) se realiza con esquemas numéricos. Las posibles inestabilidades de los esquemas numéricos pueden ser atribuidas, al menos parcialmente, a la utilización de una ley de resistencia hidráulica no compatible con las ecuaciones, como la ley de Manning-Strickler.

Conclusiones

Se estudió el comportamiento en tiempos muy cortos de las ecuaciones de Saint-Venant y de Richards en su acoplamiento para describir la fase de avance del riego por gravedad en melgas. En particular, se estableció la evolución en el tiempo de la fuerza de fricción. Asimismo, se han analizado las leyes potenciales de resistencia hidráulica que pueden ser utilizadas en el acoplamiento.

Se analizó exhaustivamente la ley fractal de resistencia hidráulica desarrollada por Fuentes (1992, 1994) y utilizada por Fuentes y Vauclin (1994) en el riego por gravedad, la cual incluye, como casos particulares, las leyes extremas de Poiseuille y Chézy, la ley de Hazen-Williams y de Prandtl-Blasius. El análisis en tiempos muy cortos permite concluir que esta ley es adaptable a una gran familia de funciones caudal de riego impuestas como condición de frontera en la cabecera de la melga.

También se estudió la generalización empírica de la ley fractal de resistencia para poder analizar leyes de resistencia no incluidas en la ley fractal de resistencia original, como la de Manning-Strickler. Se mostró que esta ley sólo es aplicable en el acoplamiento para una familia muy limitada de funciones del caudal de riego; en particular no es aplicable cuando el caudal de riego es una constante. Cuando se usa esta ley, sus parámetros dependen de las condiciones de frontera e implica que la evolución de la lámina de riego en tiempos muy cortos dependa del caudal de riego, lo cual contradice el resultado obtenido a través de la ecuación de Richards, en el sentido de que esta evolución es independiente del caudal de riego en tiempos muy cortos. Esta ley, comprendida la ley de Manning-Strickler, no debe ser utilizada en el acoplamiento de las ecuaciones de Saint-Venant y de Richards del riego por gravedad. En otros términos, la ley potencial que debe utilizarse en el acoplamiento de las ecuaciones es la ley fractal de resistencia hidráulica.

Recibido: 26/05/2003
Aprobado: 15/06/2003

Referencias

BASSET, D.L. y FITZSIMMONS, D.W. Simulating overland flow in border irrigation. *Transactions of the ASAE*. Vol. 19, núm. 4, 1976, pp. 666-671.

CUNGE, J.A., y WOOLHISER, D.A. Unsteady flow in open channels. *Unsteady flow in open channels*. Vol. II. Mahmood, K. y Yevjevich, V. (editores). Fort Collins, Colorado: Water Resources Publications, 1975, pp. 509-537.

CHEN, C.L. Surface irrigation using kinematic-wave method. *Journal of the Irrigation and Drainage Division, ASCE*. Vol. 96, 1970, pp. 39-46.

FOK, Y.S., y BISHOP, A.A. Analysis of water advance in surface irrigation. *Journal of the Irrigation and Drainage Division, ASCE*. Vol. 91, 1965, pp. 99-116.

FUENTES, C. *Approche fractale des transferts hydriques dans les sols non-saturés*. Tesis de doctorado. Grenoble, Francia: Universidad Joseph Fourier de Grenoble, Francia, 1992, 267 pp.

FUENTES, C. Una ley de resistencia para las ecuaciones de Saint-Venant. *Memorias del XIII Congreso Nacional de Hidráulica*. Tomo II. Del 21 al 24 de septiembre, Puebla, México, 1994, pp. 52-57.

FUENTES, C., y VAUCLIN, M. Sobre la ley de resistencia hidráulica en el flujo transitorio del agua sobre una superficie porosa inicialmente no saturada. *Memorias del XVI Congreso Latinoamericano de Hidráulica*. Vol. 1. Del 7 al 11 de noviembre, Santiago de Chile, 1994, pp. 113-121.

HART, W.E., BASSET, D.L. y STRELKOFF, T. Surface irrigation hydraulics-kinematics. *Journal of the Irrigation and Drainage Division, ASCE*. Vol. 94, 1968, pp. 419-440.

HAVERKAMP, R., PARLANGE, J.-Y., STARR, J.L., SCHMITZ, G. y FUENTES, C. Infiltration under ponded conditions: 3. A predictive equation based on physical parameters. *Soil Sci*. 149, 1990, pp. 292-300.

KATOPODES, N.D. y STRELKOFF, T. Hydrodynamics of border irrigation-complete model. *Journal of the Irrigation and Drainage Division, ASCE*. Vol. 103, 1977, pp. 309-325.

KINCAID, D.C., HEERMANN, D.F. y KRUSE, E.G. Hydrodinamics of border irrigation advance. *Transactions of the ASAE*. Vol. 15, núm. 4, 1972, pp. 674-680.

KING, H.W., WISLER, C.O. y WOODBURN, J.G. HYDRAULICS. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1952, 351 p.

KOSTIAKOV, A.N. On the dynamics of the coefficient of water-percolation in soils and on the necessity of studying it from a dynamic point of view for purposes of amelioration. *Trans. Com. Int. Soil Sci*. 6th. Moscow, Part A, 1932, pp. 17-21.

LANDAU, L. y LIFCHITZ, E. *Physique théorique. Mécanique des fluides*. Tomo 6. Segunda edición. Moscú: Éditions Mir, 1989, 748 pp.

LEVI, E. *El agua según la ciencia*. México: Conacyt-Castell Mexicana, 1989, 677 pp.

LEWIS, M.R. y MILNE, W.E. Analysis of border irrigation. *Transactions of the ASAE*. Vol. 19, 1938, pp. 267-272.

LIGGETT, J.A. Basic equations of unsteady flow. *Unsteady flow in open channels*. Mahmood, K. y Yevjevich, V. (editores). Fort Collins, Colorado: Water Resources Publications. Vol I, 1975, pp. 29-62.

MANDELBROT, B.B. *The fractal geometry of nature*. San Francisco: Freeman, 1983.

MEZENCEV, V.J. Teoría de la formación del escurrimiento (en ruso). *Meteorologia i gidrologia*. Vol. 3, 1948, pp. 33-40.

NEWTON, Isaac. *De philosophiae naturalis principia mathematica*. Préface de Hawking, S. Postface de F. Biarnais. Christian Bourgois Éditeur, 1985.

PARLANGE, J.-Y. Theory of water movement in soils: 1. One-dimensional absorption. *Soil Sci*. Vol. 111, 1971a, pp. 134-137.

PARLANGE, J.-Y. Theory of water movement in soils: 2. One-dimensional infiltration. *Soil Sci*. Vol. 111, 1971b, pp. 170-174.

PARLANGE, J.-Y. On solving the flow equation in unsaturated soils by optimization : Horizontal infiltration. *Soil Sci. Soc. Amer. Proc*. Vol. 39, 1975, pp. 415-418.

PARLANGE, J.-Y., BRADDOCK, R.D., LISLE, I. y SMITH, R.E. Three para-meter infiltration equation. *Soil Sci*. 111, 1982, pp. 170-174.

PARLANGE, J.-Y., HAVERKAMP, R. y TOUMA, J. Infiltration under ponded conditions: 1. Optimal analytical solution and comparison with experimental observations. *Soil Sci*. Vol. 139, núm. 4. 1985, pp. 305-311.

PHILIP, J.R., The theory of infiltration: 4. Sorptivity and algebraic infiltration equations. *Soil Sci*. Vol. 84, 1957, pp. 257-264.

PHILIP, J.R. y FARRELL, D.A. General solution of the infiltration-advance problem in irrigation hydraulics. *Journal of Geophysical Res*. Vol. 69, 1964, pp. 621-631.

PHILIP, J.R. On solving the unsaturated flow equation: 1. The flux-concentration relation. *Soil Sci*. Vol.116, 1973, pp. 328-335.

RICHARDS, L.A., Capillary conduction of liquids through porous medium. *Physics*. Vol. 1, 1931, pp. 318-333.

SAINT-VENANT, A.J.C. BARRE DE. *Théorie du mouvement non permant des eaux, avec application aux crues des rivières et à l'introduction des marées dans leur lits*. Comptes rendus des séances de l'Academie des Sciences. Vol. 73, 1871, pp. 147-154 y 237-240.

SAKKAS, J.G. y STRELKOFF, T. Hydrodinamics of surface irrigation-advance phase. *Journal of the Irrigation and Drainage Division, ASCE*. Vol. 100, 1974, pp. 31-48.

SAUCEDO, H., FUENTES, C., ZAVALA, M. y PARLANGE, J.-Y. La hipótesis del tiempo de contacto en el riego por melgas. XI Congreso Nacional de Irrigación. *Modelación Hidroagrícola*. Vol. S10, 2001, pp. 87-97.

SCHMITZ, G., HAVERKAMP, R. y PALACIOS, O. A coupled surface-subsurface model for shallow water flow over initially dry soil. *Proc. 21st Congr. IAHR, Int. Assoc. For Hydr. Res*. 1985, pp. 23-31.

SINGH, V.P. y RAM, R.S. A kinematic model for surface irrigation: verification by experimental data. *Water Resources Res*. Vol. 19, núm. 6, 1983, pp. 1599-1612.

SMITH, R.E. Border irrigation advance and ephemeral flood waves. *Journal of the Irrigation and Drainage Division, ASCE*. Vol. 98, 1972, pp. 289-307.

STRELKOFF, T. y KATOPODES, N.D. Border-irrigation hydraulics with zero inertia. *Journal of the Irrigation and Drainage Division, ASCE*. Vol. 103, 1977, pp. 325-342.

WILLARDSON, L.S. y BISHOP, A.A. Analysis of surface irrigation application efficiency. *Journal of the Irrigation and Drainage Division, ASCE*. Vol. 93, 1967, pp. 21-36.

WOOLHISER, D.A. Simulation of unsteady overland flow. Unsteady flow in open channels. Mahmood, K. y Yevjevich, V. (editores). Fort Collins, Colorado: *Water Resources Publications*. Vol II, 1975, pp. 485-508.

Abstract

FUENTES, C., DE LEÓN, B., SAUCEDO, H., PARLANGE, J.-I. & ANTONINO, A.C.D. Saint-Venant and Richards equations system in surface irrigation: 1. Hydraulic resistance power law. Hydraulic engineering in Mexico *(in Spanish). Vol. XIX, no. 2, April-June, 2004, pp. 65-75.*

Short-time behavior of coupling Richards and Saint-Venant equations to describe the advance phase in border irrigation has been studied. Particularly, the evolution in time of the friction force has been established. At the same time, the hydraulic resistance power laws used to couple the above-mentioned equations are also analyzed. The fractal hydraulic resistance law developed by Fuentes (1992, 1994) and used by Fuentes and Vauclin (1994) in surface irrigation has been deeply analyzed. The main characteristic of this law is that the power of the friction slope (d) and the hydraulic radii (b) are related through b=3d–1 and d=D/3, where D is a mass fractal dimension (Mandelbrot, 1983). This law includes particular cases, such as the Poiseuille and Chezy extreme laws, the Hazen-Williams law, and the Prandtl-Blasius law. The very short time analysis lead to conclude that the hydraulic resistance fractal law can be adapted to a big family of irrigation flow functions imposed as boundary condition at the head of the border. Hydraulic resistance power law with independent d and b, which includes the Manning-Strickler law, has also been studied. It has been shown that this law is only applicable to the coupling for a very limited family of irrigation flow functions; it is not applicable in the particular important case when irrigation flow is constant. If this law is applied, its parameters depend upon the boundary conditions, and implies that the evolution of the applied irrigation water depth in very short times depends on the irrigation flow, which is opposite to the result obtained through the Richards equation, where this evolution is independent of the irrigation flow. This law should not be applied in the coupling of the Saint-Venant and Richards equations in surface irrigation. In others words, the power law to be used in the coupling of these equations is the hydraulic resistance fractal law.

Keywords: *advance phase, hydraulic resistance fractal law.*

Dirección institucional de los autores:

Dr. Carlos Fuentes
Dr. Benjamín de León
Dr. Heber Saucedo

Instituto Mexicano de Tecnología del Agua,
Coordinación de Tecnología de Riego y Drenaje,
Paseo Cuauhnáhuac 8532,
colonia Progreso,
62550 Jiutepec, Morelos, México,
cfuentes@tlaloc.imta.mx, bleon@tlaloc.imta.mx,
hsaucedo@tlaloc.imta.mx

Dr. Jean-Yves Parlange

Department of Agricultural and Biological Engineering,
Riley-Robb Hall,
Cornell University, Ithaca, New Cork 14853-1901, United Status of America
jp58@cornell.edu

Dr. Antonio C.D. Antonino

Departamento de Energia Nuclear da Universidade Federal de Pernambuco,
Av. Prof. Luz Freire 1000, Cid. Universitária, CEP 54740-540 Recife, PE, Brasil.
acda@ufpe.br