

Artículo publicado en el Repositorio Institucional del IMTA

<i>Título</i>	El sistema de ecuaciones de Saint-Venant y Richards del riego por gravedad: 2. Acoplamiento numérico para la fase de avance en el riego por melgas.
<i>Autor / Adscripción</i>	Heber Saucedo Carlos Fuentes Manuel Zavala  Instituto Mexicano de Tecnología del Agua
<i>Publicación</i>	Ingeniería Hidráulica en México, 20(2): 109-119
<i>Fecha de publicación</i>	2005
<i>Resumen</i>	Se presenta una solución numérica monótona para el acoplamiento interno de las ecuaciones de Saint-Venant y Richards en el riego por melgas. La solución de las ecuaciones de Saint-Venant se aproxima utilizando un esquema lagrangiano en diferencias finitas, mientras que para la ecuación de Richards se utilizan elementos finitos para la integración en el espacio y diferencias finitas implícitas para la integración en el tiempo.
<i>Identificador</i>	<a href="http://hdl.handle.net/123456789/756">http://hdl.handle.net/123456789/756</a>

# El sistema de ecuaciones de Saint-Venant y Richards del riego por gravedad: 2. Acoplamiento numérico para la fase de avance en el riego por melgas

Heber Saucedo  
Carlos Fuentes  
Manuel Zavala

Instituto Mexicano de Tecnología del Agua

*Se presenta una solución numérica monótona para el acoplamiento interno de las ecuaciones de Saint-Venant y Richards en el riego por melgas. La solución de las ecuaciones de Saint-Venant se aproxima utilizando un esquema lagrangiano en diferencias finitas, mientras que para la ecuación de Richards se utilizan elementos finitos para la integración en el espacio y diferencias finitas implícitas para la integración en el tiempo. Se muestra que una discretización de la ecuación de momentum basada en aproximaciones de las derivadas y los coeficientes mediante ponderaciones en tiempo y espacio puede generar cambios de monotonía en la vecindad de la cabecera de la melga; asimismo, se muestra que dicha situación no se presenta si se utiliza una discretización basada en: a) las derivadas en el espacio y la pendiente de fricción en una celda de cálculo se aproximan adelante en el tiempo, b) las derivadas en el tiempo se aproximan utilizando una forma ponderada, y c) los coeficientes son calculados en el tiempo anterior.*

**Palabras clave:** ecuaciones de Saint-Venant, ecuación de Richards, acoplamiento numérico interno.

## Introducción

La descripción del flujo del agua en el riego por melgas requiere tener en cuenta las ecuaciones de Saint-Venant para describir el flujo del agua sobre la superficie del suelo y la ecuación de Richards para el flujo del agua en el suelo, de tal forma que su acoplamiento permita conocer las formas de los perfiles de flujo superficial y la distribución de los potenciales de presión en el suelo según avanza el riego. El tirante proporcionado por las ecuaciones de Saint-Venant se utiliza para definir una condición de frontera tipo Dirichlet para la ecuación de Richards, cuya solución numérica permite el cálculo de la lámina infiltrada necesaria para la solución de las ecuaciones de Saint-Venant, teniéndose, por lo tanto, un procedimiento iterativo.

En el primer trabajo de esta serie (Fuentes *et al.*, 2004) se muestra una relación de los principales trabajos

de modelación del riego por gravedad, los cuales pueden diferenciarse según el tipo de ecuaciones que emplean para representar el fenómeno. Respecto a la modelación del flujo de agua a superficie libre sobre el suelo, los modeladores del riego hacen uso de cuatro aproximaciones: modelo hidrológico o de balance de volumen, onda cinemática, onda difusiva y ecuaciones de Saint-Venant completas. Para la representación del flujo del agua en el suelo se utilizan básicamente tres aproximaciones, la ley de infiltración empírica de Kostiakov (1932), leyes de infiltración con base físico-matemática e hipótesis simplificadoras: ecuación de Green y Ampt (1911), ecuación de Philip (1957a), ecuación de Parlange *et al.* (1982) y ley de infiltración conforme a la ecuación de Richards (1931).

Entre los modelos numéricos reportados en la literatura donde se hace uso de las ecuaciones de Saint-Venant completas para describir el flujo del

agua sobre la superficie del suelo existen algunos que generan resultados que no cumplen con el requisito de ser funciones monótonas, situación que debe cumplirse debido a que se resuelven ecuaciones diferenciales que parten de hipótesis relacionadas con variaciones suaves de los perfiles de agua, en combinación con los supuestos de suelo homogéneo, pendientes topográficas y factor de fricción únicos. En particular, se puede observar que aquellos modelos que generan formas discretas basadas en ponderaciones en tiempo y espacio tanto para aproximar derivadas como para calcular coeficientes pueden producir errores en la determinación de las variables hidráulicas en la vecindad de la cabecera de la melga; el comportamiento no es reportado explícitamente por los autores que utilizan este método de discretización, pero surge al utilizar dicho procedimiento (Strelkoff, 1983; Walker y Scogerboe, 1983; Catalán *et al.*, 1988; Playán *et al.*, 1994). Esta situación es semejante a la que se presenta en la modelación del proceso lluvia-escurrimiento (Singh y Bhallamundi, 1998), en la simulación de la ruptura de una presa (Alcrudo *et al.*, 1992) o en la descripción del flujo del agua sobre obstáculos localizados en el fondo de un canal (García-Navarro *et al.*, 1992). Lo anterior motiva el objetivo del presente trabajo: desarrollar una solución numérica monótona para el acoplamiento interno de las ecuaciones de Saint-Venant y Richards en la fase de avance del riego por melgas.

### Flujo del agua sobre la superficie del suelo

En una melga, la relación entre su ancho y el tirante de agua permite considerar las ecuaciones correspondientes al escurrimiento sobre una superficie de ancho infinito (Woolhiser, 1975, en Mahmood y Yevjevich, 1975); es decir, se tiene en cuenta la ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial l}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

y la forma tradicional de la ecuación de momentum:

$$\frac{1}{h} \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{2q}{h^2} \frac{\partial q}{\partial x} + \left( g - \frac{q^2}{h^3} \right) \frac{\partial h}{\partial x} + g(J - J_o) + \beta \frac{q}{h^2} \frac{\partial l}{\partial t} = 0 \quad (2)$$

donde  $q(x,t) = U(x,t)h(x,t)$  es el gasto por unidad de ancho de melga [ $L^2T^{-1}$ ];  $x$ , la coordenada espacial en la dirección principal del movimiento del agua en la melga [ $L$ ];  $t$ , el tiempo [ $T$ ];  $U$ , la velocidad media [ $LT^{-1}$ ];  $h$ , el tirante de agua [ $L$ ];  $J_o$ , la pendiente topográfica de

la melga [ $LL^{-1}$ ];  $J$ , la pendiente de fricción [ $LL^{-1}$ ];  $V_f = \partial l / \partial t$ , el flujo de infiltración [ $LT^{-1}$ ], es decir, el volumen de agua infiltrado en la unidad de tiempo por unidad de ancho y por unidad de longitud de la melga;  $l$ , la lámina infiltrada [ $L$ ];  $g$ , la aceleración gravitacional [ $LT^{-2}$ ]; el parámetro adimensional  $\beta = 1 - \alpha$ , siendo  $\alpha = 1 - U_k/U$ , donde  $U_k$  es la proyección en la dirección del movimiento de la velocidad de salida de la masa de agua debido a la infiltración.

En el primer trabajo de la serie (Fuentes *et al.*, 2004), se ha demostrado que las variables hidráulicas en la cabecera de la melga y en los tiempos muy cortos tienen los siguientes comportamientos: el tirante evoluciona conforme al límite  $\lim_{t \rightarrow 0} [h(0,t)t^{-\alpha}] = \sigma$ ,

el gasto  $\lim_{t \rightarrow 0} [q(0,t)t^{-\gamma}] = C_q$ , la lámina infiltrada  $\lim_{t \rightarrow 0} [l(0,t)t^{-\beta}] = S$ , la pendiente del perfil de agua sobre

la superficie del suelo  $\lim_{t \rightarrow 0} \left[ \frac{\partial h(0,t)}{\partial x} t^\delta \right] = -C_p$ , la fuerza

unitaria de fricción  $\lim_{t \rightarrow 0} [f_f(0,t)t^\eta] = C_f$ . Asimismo, se

demuestran las relaciones  $\alpha = \beta$ , un resultado válido en las melgas;  $\delta = \gamma - 2\alpha + 1$ , un resultado válido en canales rectangulares tanto impermeables como permeables (melgas), y  $\eta - \alpha - 1 + \gamma = 0$ . Si la ley de infiltración es proporcionada conforme a la ecuación de Richards, se requiere que  $\beta = 1/2$  y  $\gamma \leq 3/4$  para que el límite asociado con la fuerza de fricción exista. La sustitución de los comportamientos referidos en la ecuación de momentum (2) y la consideración de las relaciones mencionadas permite evidenciar que dicha ecuación presenta una singularidad cuando  $t \rightarrow 0$ . En consecuencia, es conveniente utilizar la siguiente forma de la ecuación de momentum en el acoplamiento de las ecuaciones de Saint-Venant y Richards en el riego por gravedad, la cual resulta de multiplicar la ecuación 2 por  $h^3$ :

$$h^2 \frac{\partial q}{\partial t} + 2qh \frac{\partial q}{\partial x} + \left( gh^3 - q^2 \right) \frac{\partial h}{\partial x} + gh^3 (J - J_o) + \beta qh \frac{\partial l}{\partial t} = 0 \quad (3)$$

La relación entre las variables hidráulicas  $q$  y  $h$  con la pendiente de fricción, denominada ley de resistencia hidráulica, es adoptada en secuencia del primer artículo de la serie (Fuentes *et al.*, 2004), haciendo uso de una ley potencial de resistencia:

$$q = kv \left( \frac{h^3 g J}{v^2} \right)^d \quad (4)$$

$\nu$  es el coeficiente de viscosidad cinemática [ $L^2T^{-1}$ ] y  $k$  es un factor adimensional. De esta ley se deduce la de Chézy, haciendo  $d=1/2$  y la de Poiseuille con  $d=1$ .

Las condiciones inicial y de frontera que deben sujetar las ecuaciones de Saint-Venant para modelar la fase de avance en el riego por melgas son las siguientes:

$$q(x,0)=0 \quad y \quad h(x,0)=0 \quad (5)$$

$$q(0,t)=q_o, \quad q(x_f,t)=0 \quad y \quad h(x_f,t)=0 \quad (6)$$

donde  $x_f(t)$  es la posición del frente de onda para el tiempo  $t$ , y  $q_o$  es el gasto de aporte en la entrada de la melga.

Para cerrar el sistema es necesario conocer la forma en que evoluciona en el tiempo la lámina infiltrada en toda posición sobre la melga; es decir, la ley de infiltración, la cual es proporcionada con base en la solución de la ecuación de Richards (1931).

### Flujo del agua en el suelo

La descripción del proceso de infiltración del agua en el suelo puede efectuarse teniendo como base la ecuación de Richards (1931), que resulta de la combinación de la ecuación de continuidad con el campo de velocidades calculado conforme a la ley de Darcy y que en su forma tridimensional, sin tener en cuenta la extracción de agua por las plantas, se escribe como:

$$C(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial t} = \nabla \cdot [K(\psi) \nabla \psi] - \frac{dK}{d\psi} \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (7)$$

donde  $\psi$  es el potencial de presión del agua en el suelo, expresado como la altura de una columna equivalente de agua [ $L$ ] (positivo en la zona saturada y negativo en la zona no saturada del suelo);  $C(\psi)=d\theta/d\psi$  es denominada la capacidad específica de humedad del suelo;  $\theta=\theta(\psi)$  es el volumen de agua por unidad de volumen de suelo o contenido volumétrico de agua [ $L^3L^{-3}$ ] y es una función de  $\psi$  conocida como curva característica de humedad o curva de retención del agua;  $K=K(\psi)$  es la conductividad hidráulica [ $LT^{-1}$ ], que en un suelo parcialmente saturado es una función del potencial de presión; el potencial gravitacional es asimilado a la coordenada espacial  $z$  orientada positivamente hacia abajo [ $L$ ];  $\nabla=(\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$  es el operador gradiente;  $x, y$  y  $z$  son las otras dos coordenadas espaciales [ $L$ ], y  $t$  es el tiempo [ $T$ ].

El riego es un fenómeno que se efectúa en tres dimensiones, lo cual hace necesario que el flujo del

agua en el suelo sea descrito utilizando la ecuación (7), sin embargo es conveniente aceptar la hipótesis de que el fenómeno se efectúa en planos paralelos al desarrollo de la melga; entonces es posible utilizar la forma bidimensional de la ecuación de Richards:

$$C(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ K(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ K(\psi) \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} - 1 \right) \right] \quad (8)$$

la cual debe resolverse sobre el dominio de solución que se muestra en la ilustración 1.

Como condición inicial para la solución de la ecuación de Richards bidimensional se debe especificar la distribución de las presiones en el espacio:

$$\psi = \psi_o(x, z) \quad (9)$$

Las condiciones de frontera correspondientes pueden considerarse como sigue:  $\overline{Ax_f}$  frontera tipo Dirichlet, con potencial prescrito conforme a la solución de las ecuaciones de Saint-Venant;  $\overline{x_fB}$ ,  $\overline{BC}$  y  $\overline{DA}$  fronteras tipo Neumann con flujo nulo;  $\overline{CD}$  frontera bajo gradiente unitario:

$$\psi = h, \quad x \in \overline{Ax_f}, \quad z = 0, \quad t > 0 \quad (10)$$

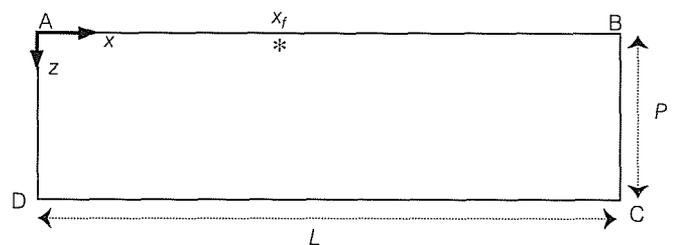
$$-K(\psi) \frac{\partial(\psi - z)}{\partial z} = 0, \quad x \in \overline{x_fB}, \quad z = 0, \quad t > 0 \quad (11)$$

$$-K(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad x = L, \quad z \in \overline{BC}, \quad t > 0 \quad (12)$$

$$\frac{\partial(\psi - z)}{\partial z} = -1, \quad x \in \overline{CD}, \quad z = P, \quad t > 0 \quad (13)$$

$$-K(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad x = 0, \quad z \in \overline{DA}, \quad t > 0 \quad (14)$$

**Ilustración 1. Dominio de solución para la ecuación de Richards bidimensional.**



la profundidad del dominio de solución ( $P$ ) debe ser mayor que la máxima posición del frente de humedecimiento durante el riego.

La solución de la ecuación de Richards hace indispensable representar las propiedades hidrodinámicas del suelo, expresando el potencial de presión ( $\psi$ ) como una función del contenido volumétrico de agua ( $\theta$ ) y la conductividad hidráulica  $K$  como una función de  $\theta$ .

Para la descripción del flujo del agua durante una prueba de riego es necesaria la caracterización hidrodinámica del suelo. Como es señalado por Fuentes *et al.* (1992), la combinación de las características hidrodinámicas de Fujita (1952) y Parlange *et al.* (1982) es conveniente en estudios teóricos, como la construcción de soluciones analíticas exactas; en estudios experimentales puede ser más conveniente la utilización de la combinación de la curva de retención propuesta por van Genuchten (1980), considerando la restricción de Burdine (1953), con la curva de conductividad hidráulica propuesta por Brooks y Corey (1964), debido a que satisfacen las propiedades integrales de la infiltración y a la facilidad para la identificación de sus parámetros.

La curva de retención propuesta por van Genuchten (1980) se escribe como:

$$\frac{\theta(\psi) - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} = \left[ 1 + \left( \frac{\psi}{\psi_d} \right)^n \right]^{-m} \quad (15)$$

donde  $\psi_d$  es un valor característico de la presión del agua en el suelo;  $m$  y  $n$  son dos parámetros de forma empíricos relacionados por la restricción de Burdine (1953):  $m = 1 - 2/n$ , con  $0 < m < 1$  y  $n > 2$ ;  $\theta_s$  es el contenido volumétrico de agua a saturación efectiva del suelo, y  $\theta_r$  es el contenido volumétrico de agua residual.

La conductividad hidráulica propuesta por Brooks y Corey (1964) se representa como:

$$K(\theta) = K_s \left( \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} \right)^\eta \quad (16)$$

donde  $\eta$  es un parámetro de forma empírico y positivo.

La lámina infiltrada se calcula para cada posición  $x_i$ , donde se resuelven numéricamente las ecuaciones de Saint-Venant:

$$I(x_i, t) = \int_0^F [\theta(x_i, z, t) - \theta(x_i, z, 0)] dz \quad (17)$$

donde  $F$  es la posición del frente de humedecimiento y  $\theta(x_i, z, 0)$  es el contenido volumétrico de agua inicial.

## Solución numérica

### Solución numérica de las ecuaciones de Saint-Venant

La ecuación de continuidad se discretiza utilizando un esquema lagrangiano en diferencias finitas, considerando la deformación de la frontera del dominio de solución para seguir el frente de avance. En la ilustración 2 se muestra la disposición de las celdas para expresar en diferencias finitas las ecuaciones de Saint-Venant (Strelkoff y Katopodes, 1977).

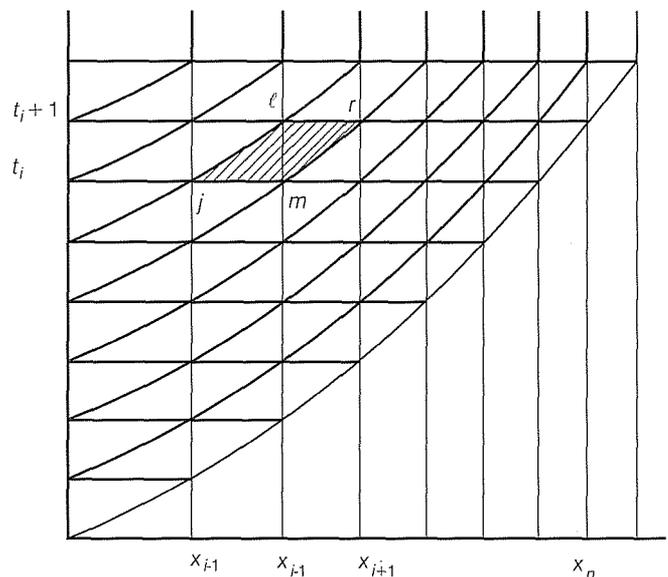
La forma discreta de la ecuación de continuidad es (Strelkoff y Katopodes, 1977):

$$\begin{aligned} & [\omega q_\ell + (1 - \omega) q_j] \delta t - (x_\ell - x_j) [\omega(h_\ell + l_\ell) + (1 - \omega)(h_j + l_j)] \\ & - [\omega q_r + (1 - \omega) q_m] \delta t + (x_r - x_m) [\omega(h_r + l_r) + (1 - \omega)(h_m + l_m)] \quad (18) \\ & - [\phi h_\ell + (1 - \phi) h_r + \phi l_\ell + (1 - \phi) l_r] (x_r - x_\ell) \\ & + [\phi h_j + (1 - \phi) h_m + \phi l_j + (1 - \phi) l_m] (x_m - x_j) = 0 \end{aligned}$$

donde el paso de tiempo se ha denotado como  $\delta t$ , y los factores de peso en el tiempo y el espacio como  $\omega$  y  $\phi$ , respectivamente.

En el riego por melgas, la ecuación de momentum es tradicionalmente discretizada aproximando tanto las derivadas como los coeficientes que en ella intervienen mediante ponderaciones que toman en cuenta los valores de las variables hidráulicas en todos los extremos de cada celda de cálculo (Strelkoff, 1983;

**Ilustración 2. Disposición de las celdas de cálculo para la fase de avance.**



Walker y Scogerboe, 1983; Catalán et al., 1988). Sin embargo, este tipo de aproximación puede generar problemas de monotonía en la solución numérica en las primeras celdas de cálculo, situación que es semejante a la que se presenta en la modelación del proceso lluvia-escurrimiento (Singh y Bhallamundi, 1998), en la simulación de la ruptura de una presa (Alcrudo et al., 1992) o en la descripción del flujo del agua sobre obstáculos localizados en el fondo de un canal (García-Navarro et al., 1992), trabajos en los cuales se han reportado oscilaciones espurias cuando las ecuaciones de movimiento son resueltas utilizando esquemas centrados en tiempo y espacio. Lo anterior ha motivado el ensayo de diferentes formas de aproximación de las derivadas tanto espaciales como temporales, así como de la forma de cálculo de los coeficientes de la ecuación de cantidad de movimiento, habiéndose observado que para obtener una solución numérica monótona es conveniente efectuar la discretización de la ecuación de cantidad de movimiento teniendo en cuenta tres aspectos: a) las derivadas en el espacio y la pendiente de fricción en una celda de cálculo se aproximan adelante en el tiempo, b) las derivadas en el tiempo se aproximan utilizando una forma ponderada en tiempo y espacio, c) los coeficientes son calculados en el tiempo anterior. En consecuencia, se propone la siguiente forma de discretización de la ecuación de *momentum*:

$$2\bar{q}\bar{h}(q_r - q_\ell)\delta t + \left(g\bar{h}^3 - \bar{q}^2\right)(h_r - h_\ell)\delta t + \bar{h}^2(x_r - x_\ell)\left[\omega q_r + (1-\omega)q_\ell - \omega q_m - (1-\omega)q_j\right] + g\delta t \bar{h}^3(x_r - x_\ell)\left[\omega J_r + (1-\omega)J_\ell - J_o\right] + \beta\delta t \bar{q}\bar{h}(x_r - x_\ell)\left[\omega l_r + (1-\omega)l_\ell - \omega l_m - (1-\omega)l_j\right] = 0 \quad (19)$$

en combinación con una forma de cálculo de los coeficientes basada en los valores pertenecientes al nivel de tiempo anterior:

$$\bar{q} = (1-\phi)q_m + \phi q_j \quad (20)$$

$$\bar{h} = (1-\phi)h_m + \phi h_j \quad (21)$$

Se introducen las variables pequeñas (Strelkoff y Katopodes, 1977):  $\delta h_r$ ,  $\delta q_r$ ,  $\delta h_\ell$  y  $\delta q_\ell$ , tales que, para las celdas interiores se tiene  $h_\ell = h_j + \delta h_\ell$ ,  $h_r = h_m + \delta h_r$ ,  $q_\ell = q_j + \delta q_\ell$  y  $q_r = q_m + \delta q_r$ . La variable  $\delta q_r$  de la última celda es sustituida por la variable  $\delta\delta$  que denota la corrección a la posición del frente de avance:  $x_{\bar{r}} = x_{\bar{r}-1} + \delta\delta$ , donde  $x_{\bar{r}}$  es la posición del frente de avance para el tiempo

$i$ -ésimo. Para la primera celda se escribe:  $h_\ell = h_m + \delta h_\ell$ ,  $q_\ell = q_m + \delta q_\ell$ .

Las expresiones que definen las entradas del sistema matricial se muestran en el anexo.

En las formas discretas se ha considerado el factor de peso en el espacio  $\phi = 1/2$  para las celdas interiores (Strelkoff y Katopodes, 1977), para la última celda y el primer nivel de tiempo se ha utilizado  $\phi = \pi/4$ , valor que se deduce a partir del análisis para los tiempos cortos del acoplamiento de las ecuaciones de Saint-Venant y Richards presentado por Fuentes (1992). El factor de peso en el tiempo es  $\omega = 0.60$  (Strelkoff y Katopodes, 1977).

### Solución numérica de la ecuación de Richards

La ecuación de Richards bidimensional es discretizada en el espacio utilizando elementos finitos y en el tiempo mediante un esquema implícito en diferencias finitas. El procedimiento se encuentra bien documentado en la literatura y puede consultarse, por ejemplo, en Saucedo et al. (2002). La solución del sistema de ecuaciones algebraicas que resulta de la aplicación del método del elemento finito es efectuada usando el método del gradiente conjugado precondicionado (Noor y Peters, 1987), el cual ha sido adaptado para utilizar un almacenamiento computacional matricial libre de ceros.

### Comparación de soluciones numéricas

Para ilustrar el comportamiento de la solución numérica propuesta y compararlo con el de la solución obtenida mediante ponderaciones en tiempo y espacio con todos los valores de las celdas de cálculo se utilizan datos de un experimento reportado por Fuentes (1992), en el cual se dispone de los siguientes datos: gasto unitario  $q_o = 0.0032 \text{ m}^3/\text{s}/\text{m}$ ; pendiente topográfica  $J_o = 0.002 \text{ m}/\text{m}$ ; longitud de la melga  $L = 100 \text{ m}$ ; parámetros para la ley de resistencia de Fuentes et al. (2004):  $d = 1$ ,  $k = 1/54$ ; parámetro en la ecuación de cantidad de movimiento:  $\beta = 2$ ; valor inicial del contenido volumétrico de agua  $\theta_o = 0.2749 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$ . Los parámetros  $\theta_s$ ,  $\theta_r$ ,  $m$  y  $n$  de las características hidrodinámicas fueron determinados a partir de la curva granulométrica del suelo franco de Montecillo siguiendo la metodología sugerida por Fuentes (1992), y resulta:  $\theta_s = 0.4865 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$ ,  $\theta_r = 0.0 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$ ,  $m = 0.1258$ ,  $n = 2.2878$  y  $n\eta = 11.0$ . Los valores de los parámetros  $\psi_\sigma = -32.75 \text{ cm}$  y  $K_s = 1.84 \text{ cm}/\text{h}$  fueron obtenidos mediante la aplicación de un procedimiento inverso para describir datos de una prueba de riego efectuada en el experimento mencionado.

Se ha utilizado un paso de tiempo constante  $\Delta t=0.5$  s tanto para las ecuaciones de Saint-Venant como para la ecuación de Richards. Para la ecuación de Richards se utilizaron pasos de espacio mínimo y máximo:  $\Delta z_{\min}=0.02$ cm y  $\Delta z_{\max}=1.0$  cm,  $\Delta x_{\min}=0.02$  cm y  $\Delta x_{\max}=1.0$  cm. La discretización utilizada guarda semejanza con las reportadas en la literatura (e.g., Katopodes y Strelkoff, 1977):  $\Delta t_{\min}=5$  s, Akanbi y Katopodes (1988):  $\Delta t_{\max}=1$  s, para las cuales se reportan resultados consistentes en las variables hidráulicas del riego. La discretización para la ecuación de Richards es más fina que la reportada por Saucedo et al. (2002), quienes comparan perfiles de humedad proporcionados por una solución analítica exacta con los obtenidos mediante el esquema numérico para la ecuación de Richards; los valores del error relativo máximo para el caso de dos suelos contrastantes: una arcilla clara de Yolo, Estados Unidos, y una arena del río Isère, Francia, presentan una cota superior de 0.25% cuando se utiliza un paso de tiempo máximo  $\Delta t_{\max}=30$  s, y pasos de espacio mínimo y máximo y  $\Delta z_{\min}=0.04$  cm y  $\Delta z_{\max}=10.0$  cm. El suelo franco de Montecillo tiene un comportamiento hidrodinámico intermedio entre los que presentan los suelos tratados por estos autores; en consecuencia, con la discretización utilizada, el error relativo máximo debe tener como una cota superior 0.25%.

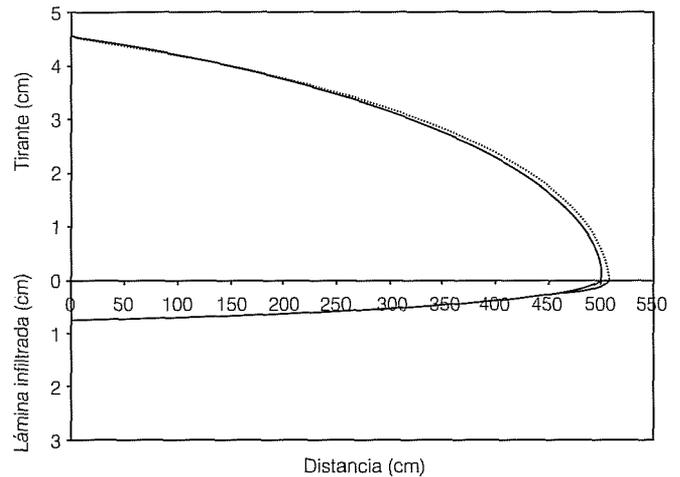
La solución obtenida mediante la aplicación de un esquema donde las derivadas y los coeficientes son estimados haciendo uso de ponderaciones que toman en cuenta los valores de las variables hidráulicas en todos los extremos de cada celda de cálculo muestra cambios de monotonía en las primeras celdas de cálculo, independientemente del tipo de régimen de flujo, lo cual no sucede al utilizar el esquema propuesto en este trabajo. La situación puede variar desde cambios de monotonía poco apreciables (ilustración 3) hasta cambios de monotonía muy significativos (ilustración 4)

El tamaño de los cambios de monotonía varía conforme crece el gasto y, en consecuencia, el número de Froude. Para comparar los cambios de monotonía se seleccionó el tirante normal como escala característica; el factor de fricción ( $k$ ) se calcula para cada tipo de régimen a partir de un valor base teniendo en cuenta que, para un gasto dado, se desea tener el mismo tirante normal, independientemente de la potencia  $d$  de la ley de resistencia, manteniendo de esta forma un patrón de comparación único para cada gasto.

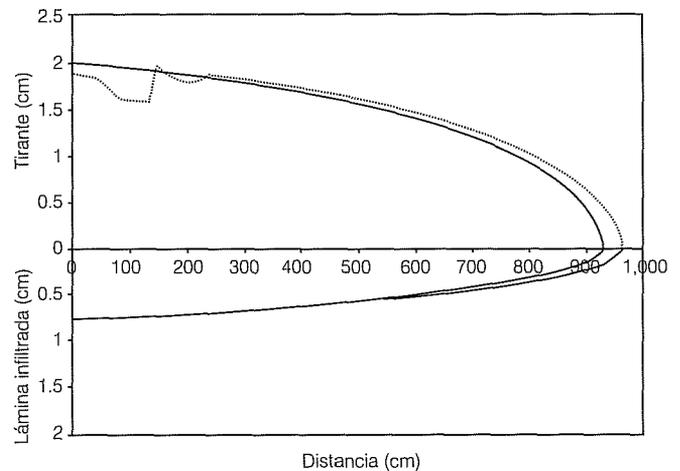
El tirante normal se calcula como (Fuentes, 1992):

$$h_n = 3 \sqrt{\frac{\omega q_o}{g J_o}} \quad (22)$$

**Ilustración 3. Comparación de la solución numérica obtenida mediante un esquema reportado en la literatura; Strelkoff (1983) y Catalán et al. (1988) (línea punteada), y el esquema propuesto en este trabajo (línea continua) para régimen de Chézy.**



**Ilustración 4. Comparación de la solución numérica obtenida mediante un esquema reportado en la literatura; Strelkoff (1983) y Catalán et al. (1988) (línea punteada), y el esquema propuesto en este trabajo (línea continua) para régimen de Chézy.**



con:

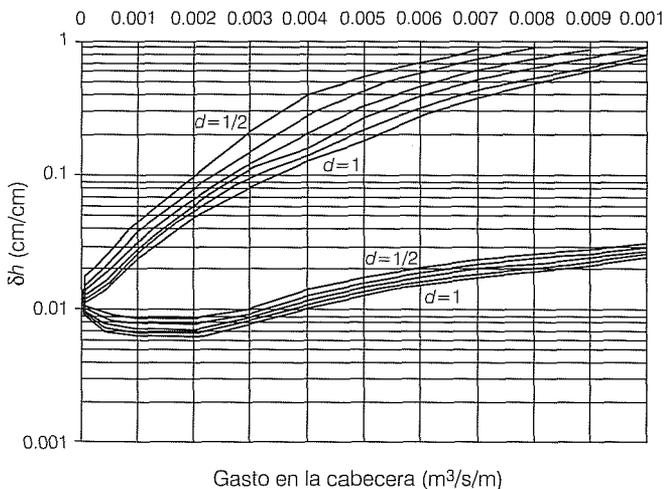
$$\omega = J_* v \left( \frac{q_o}{v} \right)^{\frac{1}{d}-1} \quad (23)$$

donde  $J_* = 1/k^{1/d}$ . El valor de  $h_n$  corresponde con el tirante normal para un canal en el que no se presenta infiltración.

La base del cálculo del factor de fricción para cada potencia ( $d$ ) ha sido considerada como un valor arbitrario; en este caso se tiene en cuenta el factor observado en el experimento realizado en el suelo franco de Montecillo:  $k=1/54$ ; es decir, el comportamiento correspondería con una rugosidad de la superficie del suelo, típica de los experimentos de riego por melgas. La variación que se obtiene de la relación entre el tamaño máximo del cambio de monotonía y el tirante normal, denominada  $\delta h$ , se muestra en las seis curvas inferiores de la ilustración 5, donde puede observarse que, en una etapa inicial, la proporción disminuye conforme se incrementa el gasto, pero posteriormente aumenta sensiblemente. Al disminuir el valor base del coeficiente de fricción veinte veces,  $k=1/1080$ , es decir cuando se trata con superficies más rugosas, se aprecia en las seis curvas superiores de la ilustración 5 que existe un incremento permanente de la proporción  $\delta h$  conforme se incrementa el gasto en la cabecera de la melga hasta que se alcanzan valores cercanos a la unidad, momento en el cual se generan tirantes negativos debido a los cambios de monotonía, y el esquema se torna inestable.

Los gastos de aporte en la cabecera de la melga que se presentan en la práctica de la modelación del riego por melgas generalmente pertenecen al intervalo de  $0.001 \text{ m}^3/\text{s/m}$  a  $0.005 \text{ m}^3/\text{s/m}$ , e.g.: Strelkoff y Katopodes (1977):  $q_o=0.0024 \text{ m}^3/\text{s/m}$ ,  $q_o=0.0032 \text{ m}^3/\text{s/m}$ ,  $q_o=0.0042 \text{ m}^3/\text{s/m}$ ; Strelkoff (1977):  $q_o=0.0023 \text{ m}^3/\text{s/m}$ ; Wallender y Rayej (1990):  $q_o=0.0013 \text{ m}^3/\text{s/m}$ ; Fuentes (1992):  $q_o=0.0032 \text{ m}^3/\text{s/m}$  y  $q_o=0.0024 \text{ m}^3/\text{s/m}$ ; Playán

**Ilustración 5. Variación respecto al gasto de aporte en la cabecera de la melga de la proporción ( $\delta h$ ) entre el valor máximo del cambio de monotonía de la solución numérica obtenida con un esquema presentado en la literatura y el tirante normal. Las curvas inferiores corresponden a  $k=1/54$  y las superiores, a un valor veinte veces menor  $k=1/1080$ .**



et al. (1994b):  $q_o=0.0018 \text{ m}^3/\text{s/m}$ ; Pacheco (1995):  $q_o=0.0013 \text{ m}^3/\text{s/m}$ ; Smerdon et al. (1988), y Blair y Smerdon (1988) reportan diversos experimentos donde se utiliza un gasto mínimo de  $q_o=0.0008 \text{ m}^3/\text{s/m}$  y un máximo de  $q_o=0.004 \text{ m}^3/\text{s/m}$ . La aplicación del modelo basado en aproximaciones que toman en cuenta los valores de las variables hidráulicas en todos los extremos de cada celda de cálculo en el intervalo mencionado ( $0.001 \text{ m}^3/\text{s/m}$  a  $0.005 \text{ m}^3/\text{s/m}$ ) en condiciones de rugosidad típicas del riego por melgas permite observar que el tamaño relativo de los cambios de monotonía resulta poco significativo; sin embargo, es necesario tener en cuenta que existen casos en los cuales el factor de fricción puede adquirir valores de un orden de magnitud mayor, por ejemplo, para un experimento de riego efectuado en la zona productora de arroz de La Chontalpa, Tabasco, México, se tiene  $k=1/300$  (Saucedo et al., 2003), situación en la cual la utilización del modelo reportado en el literatura puede ser inconveniente.

En otras palabras, el modelo numérico desarrollado en este trabajo cubre un mayor rango de condiciones de aplicabilidad sin modificar la monotonía de la solución numérica, en comparación con un modelo numérico tradicionalmente utilizado en la literatura, el cual se basa en la aproximación de las derivadas y los coeficientes de la ecuación de momentum mediante ponderaciones de todos los valores de las variables hidráulicas presentes en cada celda de cálculo.

## Conclusiones

Se ha desarrollado una solución numérica monótona para el acoplamiento interno de las ecuaciones de Saint-Venant y Richards en el riego por melgas. La solución de las ecuaciones de Saint-Venant se ha aproximado utilizando un esquema lagrangiano en diferencias finitas, mientras que para la ecuación de Richards se han utilizado elementos finitos para la integración en el espacio y diferencias finitas implícitas para la integración en el tiempo. Se ha mostrado que una discretización de la ecuación de momentum basada en aproximaciones de las derivadas y los coeficientes mediante ponderaciones en tiempo y espacio de los valores de las variables hidráulicas de todas las esquinas de una celda de cálculo puede generar cambios de monotonía en la vecindad de la cabecera de la melga; asimismo, se ha mostrado que dicha situación no se presenta si se utiliza una discretización basada en lo siguiente: a) las derivadas en el espacio y la pendiente de fricción en una celda de cálculo se aproximan adelante en el tiempo, b) las derivadas en el tiempo se aproximan utilizando una forma ponderada, y c) los coeficientes son calculados en el tiempo anterior.

## Anexo. Entradas del sistema matricial para el esquema propuesto

Las entradas del sistema matricial relacionadas con la solución de la forma discreta de la ecuación de continuidad para el caso de la primera celda son:

$$\begin{aligned} & [-\phi(x_r - x_\ell)]\delta h_\ell + [-\omega\delta t]\delta q_r + [(\omega + \phi - 1)(x_r - x_\ell)]\delta h_r = \\ & -\omega\delta t q_\ell - [\omega(h_m + l_r) + (1 - \omega)(h_m + l_m) - \phi l_\ell - h_m - (1 - \phi)l_r](x_r - x_\ell) \end{aligned} \quad (A.1)$$

para las celdas interiores se tiene:

$$\begin{aligned} & [\omega\delta t]\delta q_\ell + [-\omega(x_m - x_j) - \phi(x_r - x_\ell)]\delta h_\ell + [-\omega\delta t]\delta q_r + [(\omega + \phi - 1)(x_r - x_\ell)]\delta h_r = \\ & \delta t(q_m - q_j) - [\phi h_j + \phi l_j + (1 - \phi)h_m + (1 - \phi)l_m - \omega(h_j + l_\ell) + (1 - \omega)(h_j + l_j)](x_m - x_j) \\ & - [\omega(h_m + l_r) + (1 - \omega)(h_m + l_m) - \phi h_j - \phi l_\ell - (1 - \phi)h_m - (1 - \phi)l_r](x_r - x_\ell) \end{aligned} \quad (A.2)$$

y para la última celda se escribe:

$$\begin{aligned} & [\omega\delta t]\delta q_\ell + [-\omega(x_m - x_j) - \phi(x_m - x_j)]\delta h_\ell + [-\phi(h_j + l_j)]\delta\delta = \\ & -\delta t q_j - [\phi h_j + \phi l_j + \omega(h_j + l_\ell) - (1 - \omega)(h_j + l_j) + \phi h_j + \phi l_\ell](x_m - x_j) \end{aligned} \quad (A.3)$$

Las entradas del sistema matricial relacionadas con la solución de la forma discreta de la ecuación de momentum son, para el caso de la primera celda:

$$\begin{aligned} & \left[ -2\delta t(g\bar{h}^3 - \bar{q}^2) - 3\phi g\delta t\bar{h}^3(x_r - x_\ell)\frac{J_m}{h_m} \right]\delta h_\ell \\ & + \left[ 2\bar{q}\bar{h}\delta t + (1 - \phi)\frac{g\delta t}{d}\bar{h}^3(x_r - x_\ell)\frac{J_m}{q_m} + (1 - \phi)\bar{h}^2(x_r - x_\ell) \right]\delta q_r \\ & + \left[ \delta t(g\bar{h}^3 - \bar{q}^2) - 3(1 - \phi)g\delta t\bar{h}^3(x_r - x_\ell)\frac{J_m}{h_m} \right]\delta h_r = \\ & -g\delta t\bar{h}^3(x_r - x_\ell)(J_m - J_o) - \beta\bar{q}\bar{h}(x_r - x_\ell)[(1 - \phi)l_r + \phi l_\ell - l_m] \end{aligned} \quad (A.4)$$

para las celdas interiores se tiene:

$$\begin{aligned}
 & \left[ -2\bar{q}\bar{h}\delta t + \phi \frac{g\delta t}{d} \bar{h}^3 (x_r - x_\ell) \frac{J_j}{q_j} + \phi \bar{h}^2 (x_r - x_\ell) \right] \delta q_\ell \\
 & + \left[ -\delta t (g\bar{h}^3 - \bar{q}^2) - 3\phi g \delta t \bar{h}^3 (x_r - x_\ell) \frac{J_j}{h_j} \right] \delta h_\ell \\
 & + \left[ 2\bar{q}\bar{h}\delta t + (1-\phi) \frac{g\delta t}{d} \bar{h}^3 (x_r - x_\ell) \frac{J_m}{q_m} + (1-\phi) \bar{h}^2 \right] \delta q_r \\
 & + \left[ \delta t (g\bar{h}^3 - \bar{q}^2) - 3(1-\phi) g \delta t \bar{h}^3 (x_r - x_\ell) \frac{J_m}{h_m} \right] \delta h_r \\
 & = -2\bar{q}\bar{h}\delta t (q_m - q_j) - \delta t (g\bar{h}^3 - \bar{q}^2) (h_m - h_j) - g(x_r - x_\ell) \delta t \bar{h}^3 ((1-\phi)J_m + \phi J_j - J_o) \\
 & - \beta \bar{q}\bar{h} (x_r - x_\ell) \left\{ [(1-\phi)l_r - \phi l_\ell] - [(1-\phi)l_m - \phi l_j] \right\}
 \end{aligned} \tag{A.5}$$

y para la última celda se escribe:

$$\begin{aligned}
 & \left[ -2\bar{q}\bar{h}\delta t + \frac{g\delta t}{d} \bar{h}^3 (x_m - x_j) \frac{J_j}{q_j} + \bar{h}^2 (x_m - x_j) \right] \delta q_\ell \\
 & + \left[ -\delta t (g\bar{h}^3 - \bar{q}^2) - 3g \delta t \bar{h}^3 (x_m - x_j) \frac{J_j}{h_j} \right] \delta h_\ell \\
 & + \left[ g \delta t \bar{h}^3 (J_j - J_o) + \phi \beta \bar{q}\bar{h} (l_\ell - l_j) \right] \delta \delta \\
 & = 2\bar{q}\bar{h}\delta t q_j + \delta t (g\bar{h}^3 - \bar{q}^2) h_j - g \delta t \bar{h}^3 (x_m - x_j) (J_j - J_o) - \phi \beta \bar{q}\bar{h} (x_m - x_j) (l_\ell - l_j)
 \end{aligned} \tag{A.6}$$

Para el primer nivel de tiempo, las entradas del sistema matricial asociadas con la ecuación de continuidad son:

$$\left[ -\phi (x_r - x_\ell) \right] \delta h_\ell + \left[ -\phi l_\ell \right] \delta \delta = -\omega \delta t q_\ell \tag{A.7}$$

mientras que para la ecuación de momentum se tiene:

$$\left[ -2\delta t (g\bar{h}^3 - \bar{q}^2) \right] \delta h_\ell + \left[ 2g\bar{h}^3 (J_\ell - J_o) + \bar{h}^2 q_\ell + \beta \bar{q}\bar{h} l_\ell \right] \delta \delta = 4\bar{q}\bar{h} \delta t q_\ell \tag{A.8}$$

Recibido: 01/04/2004  
Aprobado: 19/05/2004

## Referencias

- AKANBI A. y KATOPODES, N. Model for flow propagation on initially dry land. *Journal of hydraulic engineering*. Vol. 114, núm. 7, 1988, pp. 689-706.
- ALCRUDO, F., GARCÍA-NAVARRO, P. y SAVIRON, J.M. Flux difference splitting for 1D open channel flow equations. *International journal for numerical methods in fluids*. Vol. 14, 1992, pp. 1009-1018.
- BLAIR, A.W. y SMERDON, T.E. Infiltration from irrigation advance data I: Experimental. *Journal of irrigation and drainage engineering*. Vol. 114, núm. 1, 1988, pp. 18-29.
- BROOKS, R.H. y COREY, A.T. Hydraulic properties of porous media. *Hydrol. pap.* 3. Fort Collins: Colorado State University, 1964.
- BURDINE, N.T. Relative permeability calculation from size distributions data. *Transactions AIME*. Vol. 198, 1953, pp. 171-199.
- CATALÁN, V.E., CHÁVEZ, J., CUEVAS, B., PALACIOS, O. y FUENTES, C. Modelo hidrodinámico para la predicción del avance en el riego por melgas. *Agrociencia*. Vol. 73, 1988, pp. 243-261.
- FUENTES, C. *Approche fractale des transferts hydriques dans les sols non saturés*. Tesis de doctorado. Grenoble, Francia: Universidad Joseph Fourier de Grenoble, 1992, 267 pp.
- FUENTES, C., HAVERKAMP, R. y PARLANGE, J.-Y. Parameter constraints on closed-form soil-water relationships. *Journal of hydrology*. Vol. 134, 1992, pp. 117-142.
- FUENTES, C., DE LEÓN, B., SAUCEDO, H., PARLANGE, J.Y. y ANTONINO, A. El sistema de ecuaciones de Saint-Venant y Richards del riego por gravedad: la ley potencial de resistencia hidráulica. *Ingeniería hidráulica en México*. Vol. XVIII, núm. 2, 2004, pp. 121-131.
- FUJITA, H. The exact pattern of a concentration-dependent diffusion in a semi-infinite medium, part I. *Textile research journal*. Vol. 22, 1952, pp. 757-761.
- GARCÍA-NAVARRO, P., ALCRUDO, F. y SAVIRON, J.M. 1D open channel flow simulation using TVD-McCormack scheme. *Journal of hydraulic engineering ASCE*. Vol. 118, núm. 10, 1992, pp. 1359-1372.
- GREEN, W.H. y AMPT, G.A. Studies in soil physics, I: the flow of air and water through soils. *J. Agric. Sci.* Vol. 4, 1911, pp. 1-24.
- KOSTIAKOV, A.N. *On the dynamics of the coefficient of water-percolation in soils and on the necessity for studying it from a dynamic point of view for purposes of amelioration*. Trans. Sixth International Society of Soil Science. Russian Part A. 1932, pp. 17-21.
- NOOR, K.A. y PETERS, J.M. *Preconditioned conjugate gradient technique for the analysis of symmetric structures*. *International journal of numerical methods in engineering*. Vol. 24, 1987, pp. 2057-2070.
- PACHECO, P. *Comparación de los métodos de riego por surcos y por melgas y alternativas de diseño en el cultivo del arroz (Oryza sativa L)*. Tesis de maestría en ciencias. México, D.F.: Colegio de Postgraduados en Ciencias Agrícolas. 1995.
- PARLANGE, J.-Y., BRADDOCK, R.D., LISLE, I. y SMITH, R.E. Three parameter infiltration equation. *Soil sci.* Vol. 111, 1982, pp. 170-174.
- PHILIP, J.R. The theory of infiltration: 1. The infiltration equation and its solution. *Soil sci.* Vol. 83, 1957a, pp. 345-357.
- PLAYÁN, E., WALKER, W.R. y MERKLEY, G.P. Two-dimensional simulation of basin irrigation. I: Theory. *Journal of irrigation and drainage engineering*. Vol. 120, núm. 5, 1994a, pp. 837-856.
- PLAYÁN, E., WALKER, W.R. y MERKLEY, G.P. Two-dimensional simulation of basin irrigation. II: Applications. *Journal of irrigation and drainage engineering*. Vol. 120, núm. 5, 1994b, pp. 857-870.
- RICHARDS, L.A. Capillary conduction of liquids through porous mediums. *Physics 1*. 1931, pp. 318-333.
- SAUCEDO, H., FUENTES, C., ZAVALA, M. y VAUCLIN, M. Una solución de elemento finito para la transferencia de agua en un sistema de drenaje agrícola subterráneo. *Ingeniería hidráulica en México*. Vol. XVII, núm. 1, 2002, pp. 93-105.
- SAUCEDO, H., PACHECO, P., FUENTES, C. y ZAVALA, M. Efecto de la posición del manto freático en la evolución del frente de avance en el riego por melgas. *Ingeniería hidráulica en México*. Vol. XVIII, núm. 4, 2003, pp. 119-126.
- SINGH, V. y BHALLAMUNDI, S.M. Conjunctive surface-subsurface modeling of overland flow. *Advances in water resources*. Vol. 21, 1998, pp. 567-579.
- Smerdon, E.T., Balir, W. y Reddell, D.L. Infiltration from irrigation advance data I: Theory. *Journal of irrigation and drainage engineering*. Vol. 114, núm. 1, 1988, pp. 5-17.
- STRELKOFF, T. y KATOPODES, N. Border-irrigation hydraulics with zero inertia. *Journal of the Irrigation and Drainage Division*. IR3, 1977, pp. 325-342. 13189.
- STRELKOFF, T. Algebraic computation of flow in border irrigation. *Journal of the Hydraulics Division, ASCE*. Vol. 103, IR3, 1977, pp. 357-377. 223-252.
- STRELKOFF, T. *BRDFW, a mathematical model of border irrigation*. Phoenix, Arizona: US Department of Agriculture. Agricultural Research Service, 1983.
- VAN GENUCHTEN, M.T.H. A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils. *Soil Sci. Soc. Amer. J.* Vol. 44, 1980, pp. 892-898.
- WALKER, W.R. y SCOGERBOE, G.V. *The theory and practice of surface irrigation. A guide for study in Surface Irrigation Engineering*. Loganm Utah: Prentice Hall, 1983.
- WALLENDER, W. y RAYEJ, M. Shottting method for Saint-Venant equations of furrow irrigation. *Journal of irrigation and drainage engineering*. Vol. 116, núm. 1, 1990, pp. 114-122.

WOOLHISER, D.A. Simulation of unsteady overland flow.  
*Unsteady flow in open channels*. Vol. II. Mahmood, K.

y Yevjevich, V. (editores). Fort Collins, Colorado: Water Resources Publications, 1975, pp. 485-508.

#### Abstract

SAUCEDO, H., FUENTES, C. & ZAVALA, M. *The Saint-Venant and Richards equation system in surface irrigation: numerical coupling for the advance phase in border irrigation*. Hydraulic engineering in Mexico (in Spanish). Vol. XX, no. 2, April-June, 2005, pp. 109-119.

A numerical scheme for the coupled system of Saint-Venant and Richards equations in border irrigation advance phase is presented. The solution of Saint-Venant equations is approximated by a finite-difference Lagrangian scheme; for the Richards equation finite elements for the space discretization and implicit finite-differences for the time discretization are used. It is shown that a discretization of the momentum equation based on: i) the space derivatives and the friction slope in a cell are approximated forward in time, ii) the time derivatives are approximated by a ponderated form in time and space, and iii) the coefficients are computed in the previous time, has a basic advantage in the monotone numerical solution it produces versus a discretization based on the use of values of all corners of the calculus cell.

**Key words:** Saint-Venant equations, Richards equation, internal numerical coupling.

#### Dirección institucional de los autores:

*Dr. Heber Saucedo*  
*Dr. Carlos Fuentes*  
*Dr. Manuel Zavala*

Instituto Mexicano de Tecnología del Agua,  
Coordinación de Tecnología de Riego y Drenaje,  
Paseo Cuauhnáhuac 8532,  
62450 Progreso, Jiutepec, Morelos, México,  
teléfono: + (52) (777) 329 3659,  
hsaucedo@tlaloc.imta.mx,  
cfuentes@tlaloc.imta.mx,  
mzavala@tlaloc.imta.mx