

Artículo publicado en el Repositorio Institucional del IMTA

<i>Título</i>	Caracterización hidrodinámica de los suelos a partir del perfil de las presiones.
<i>Autor / Adscripción</i>	<p>Antonio C.D. Antonino Universidad Federal de Pernambuco, Brasil</p> <p>Carlos Fuentes Instituto Mexicano de Tecnología del Agua</p> <p>Willames A. Soares Edvane Borges André M. Netto José R.S. Lima Carlos A.B.O. Lira Universidad Federal de Pernambuco, Brasil</p> <p>Claude Hammecker Institut de Recherche pour le Développement, Francia</p>
<i>Publicación</i>	Ingeniería Hidráulica en México, 20(4): 45-52
<i>Fecha de publicación</i>	2005
<i>Resumen</i>	Las características hidrodinámicas de los suelos están formadas por la curva característica de humedad o curva de retención de humedad del suelo y la curva de conductividad hidráulica de la ley de Darcy de los suelos parcialmente saturados. El objetivo de este trabajo consiste en la determinación de las curvas de retención de agua y la conductividad hidráulica a partir de la evolución del perfil de las presiones usando la modelación inversa de la ecuación de Richards.
<i>Identificador</i>	<a href="http://hdl.handle.net/123456789/803">http://hdl.handle.net/123456789/803</a>

## Caracterización hidrodinámica de los suelos a partir del perfil de las presiones

Antonio C.D. Antonino  
Universidad Federal de Pernambuco, Brasil

Carlos Fuentes  
Instituto Mexicano de Tecnología del Agua

Willames A. Soares  
Edvane Borges  
André M. Netto  
José R.S. Lima  
Carlos A.B.O. Lira  
Universidad Federal de Pernambuco, Brasil

Claude Hammecker  
Institut de Recherche pour le Développement, Francia

*Las características hidrodinámicas de los suelos formadas por las curvas de retención de humedad del suelo,  $\theta(\psi)$ , y de la conductividad hidráulica,  $K(\psi)$ , son estimadas mediante modelación inversa con la ecuación de Richards. Se ha aceptado la función hiperbólica general presentada por Braddock et al. (2001) para la curva de retención y tres modelos fractales de la conductividad hidráulica propuestos por Fuentes et al. (2001): los modelos del poro de la media geométrica (PMG), del poro neutral (PN) y del poro grande (PG). La función hiperbólica contiene seis parámetros ( $\theta_r$ ,  $\theta_s$ ,  $\psi_{cr}$ ,  $\lambda$ ,  $m$ ,  $n$ ); los contenidos de humedad residual ( $\theta_r$ ) y a saturación ( $\theta_s$ ) son asumidos iguales a cero y a la porosidad volumétrica total del suelo, respectivamente. Para obtener formas analíticas cerradas de la conductividad hidráulica a partir de los modelos fractales y explicitar la función  $\theta(\psi)$ , los tres parámetros de forma ( $\lambda$ ,  $m$ ,  $n$ ) son reducidos a uno ( $m$ ); la presión característica ( $\psi_{cr}$ ) y la conductividad hidráulica a saturación ( $K_s$ ) forman parte de los parámetros desconocidos del sistema ( $\psi_{cr}$ ,  $K_s$ ,  $m$ ), los cuales pueden ser obtenidos replicando las observaciones de la presión en el perfil del suelo. Para ello, en una parcela de 1.15 x 0.60 m, con un suelo de textura arena francosa, ubicada en la Universidad Federal de Pernambuco, Brasil, fueron instalados tres tensiómetros con caja de vacío y dos probetas automáticas. Los primeros se instalaron a 5, 11 y 17 cm de profundidad, y las probetas, que miden el contenido de agua, a 5 y 11 cm de profundidad. Los instrumentos fueron conectados a un sistema de adquisición de datos para almacenarlos cada media hora durante 72 horas. Para la caracterización de esta columna de suelo de 12 cm de espesor se ha utilizado una solución numérica de la ecuación de Richards unidimensional vertical combinada con la subrutina DBCONF de IMSL (1989). Los parámetros obtenidos permiten reproducir las presiones observadas en la profundidad de 11 cm, mediante el criterio de mínimos cuadrados; las presiones observadas en sus extremos son las condiciones de frontera y la condición inicial es obtenida con una interpolación lineal. La raíz del error cuadrático medio del grado efectivo de saturación indica que no existen diferencias significativas entre los tres modelos para describir la evolución temporal de la presión experimental. Sin embargo, las diferencias son significativas en la capacidad de predicción de la evolución temporal del contenido de humedad en la profundidad de 11 cm, y en la predicción de la curva de retención experimental; el mejor modelo de predicción es el modelo del poro grande, seguido por el modelo del poro neutral y, finalmente, por el modelo del poro de la media geométrica.*

**Palabras clave:** curva de retención, curva de conductividad hidráulica, modelos fractales, método inverso.

## Introducción

Las características hidrodinámicas de los suelos están formadas por la curva característica de humedad o curva de retención de humedad del suelo y la curva de conductividad hidráulica de la ley de Darcy de los suelos parcialmente saturados. La primera establece una relación entre el contenido volumétrico de agua ( $\theta$ ), llamado también contenido de humedad, y la presión del agua del suelo ( $\psi$ );  $\theta$  se expresa como el volumen de agua por unidad de volumen de suelo y  $\psi$  como la altura equivalente de una columna de agua. Respecto de la presión atmosférica, esta presión es negativa en la zona no saturada y positiva en la zona saturada. La segunda establece una relación entre la conductividad hidráulica y el contenido de humedad  $K(\theta)$  o la presión del agua del suelo  $K(\psi)$ . Estas características son las principales funciones para simular el flujo transitorio de agua y el transporte de solutos en el suelo con la ecuación de Richards (1931). Es común que las curvas  $\theta(\psi)$  y  $K(\psi)$  se determinen mediante experimentos de campo y laboratorio; sin embargo, estas determinaciones son caras, especialmente para la conductividad hidráulica, y consumen mucho tiempo.

Una alternativa para la determinación de las características hidrodinámicas es la utilización de la modelación inversa en la ecuación de Richards para reproducir las observaciones experimentales en el espacio y el tiempo de la presión del agua o del contenido de humedad del suelo (Zachman *et al.*, 1981; Dane y Hruska, 1983; Russo y Jury, 1987; Carrera y Newman, 1986; Kool *et al.*, 1987; Kool y Parker, 1988; Kuczera, 1990; Russo *et al.*, 1991; Hopmans *et al.*, 1992; van Dam *et al.*, 1994; Simunek y van Genuchten, 1996). La modelación inversa adopta funciones particulares para representar las características hidrodinámicas. En la mayoría de los casos, la ecuación de Richards se resuelve numéricamente para condiciones iniciales y de frontera representativas de un flujo transitorio observado. Los parámetros de las funciones se estiman mediante la optimización de una función objetivo.

La aplicación del método inverso está fundamentada en la hipótesis de existencia, unicidad y estabilidad de la solución, además de la evidente necesidad de que los modelos adoptados para las características hidrodinámicas describan fielmente la situación física observada (Russo *et al.*, 1991; Ritter *et al.*, 2003). Zou *et al.* (2001) afirman que todo problema inverso es inherentemente mal condicionado y por ello es posible que presenten soluciones no únicas. Destacan, sin embargo, que la utilización de una información con calidad y en cantidad suficiente es capaz de garantizar

la existencia de una solución única y estable para el problema inverso del flujo del agua en suelos no saturados.

El método inverso ha sido largamente utilizado en el contexto de investigación básica en física de los suelos, frecuentemente restringido a la estimación de los parámetros hidráulicos de suelos uniformes en pequeñas muestras o columnas de suelos en laboratorio. Con todo, el método puede ser considerado como una poderosa herramienta de ingeniería para la obtención de parámetros del suelo, si se tiene en cuenta su aplicabilidad en datos experimentales de campo relativos a los procesos de la dinámica del agua en el suelo de interés práctico, tales como la infiltración, redistribución, drenaje o recarga de acuíferos (Ritter *et al.*, 2003).

El objetivo de este trabajo consiste en la determinación de las curvas de retención de agua y la conductividad hidráulica a partir de la evolución del perfil de las presiones usando la modelación inversa de la ecuación de Richards, considerando: a) la curva de retención en potencia presentada por Braddock *et al.* (2001) y b) tres modelos fractales de la conductividad hidráulica propuestos por Fuentes *et al.* (2001).

## Teoría

El modelo hidrodinámico ampliamente utilizado para describir las transferencias de agua en el suelo, resultado de la combinación de las ecuaciones de conservación de la masa y la ley de Darcy, es la ecuación de Richards:

$$C(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial t} = \nabla \cdot [K(\psi) \nabla \psi] - \frac{dK}{d\psi} \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (1)$$

donde  $\psi = \psi(\mathbf{x}, t)$  [L] es la presión del agua como una función de las coordenadas espaciales  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  [L] y del tiempo  $t$  [T], la coordenada  $z$  está orientada positivamente hacia abajo;  $K(\psi)$  [L<sup>T</sup>-1] es la conductividad hidráulica como una función de la presión;  $C(\psi)$  [L<sup>-1</sup>] es la capacidad específica definida como la pendiente de la curva de retención:

$$C(\psi) = \frac{d\theta}{d\psi} \quad (2)$$

donde  $\theta$  [L<sup>3</sup>L<sup>-3</sup>] es el contenido volumétrico de agua o contenido de humedad.

Para resolver la ecuación de Richards, es necesario conocer: a) la curva de retención de agua  $\theta(\psi)$ , b) la conductividad hidráulica como una función de la presión

$K(\psi)$  o del contenido de humedad  $K(\theta)$ , c) la distribución inicial de la presión o del contenido de humedad y d) las condiciones de frontera.

Uno de los grupos más grandes de modelos presentados en la literatura para la relación  $\psi(\theta)$  es el modelo en función potencia (Braddock *et al.*, 2001):

$$\psi = \psi_d \Theta^{-1/\lambda} \left(1 - \Theta^{1/m}\right)^{1/n} \quad (3)$$

en el cual el grado efectivo de saturación  $\Theta$  está definido por:

$$\Theta = \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} \quad (4)$$

donde  $\theta_s$  y  $\theta_r$  son, respectivamente, los contenidos de humedad a saturación y residual;  $\psi_d$  es un parámetro de escala representando un valor característico de la presión;  $m > 0$ ,  $n > 0$  y  $\lambda > 0$  son tres parámetros de forma. Se debe notar que cuando  $\Theta \rightarrow 0$  se obtiene la ecuación de Brooks y Corey (1964) y cuando  $\lambda = mn$  se obtiene la ecuación de van Genuchten (1980).

Es posible representar la curva de conductividad hidráulica a partir de los modelos fractales propuestos por Fuentes *et al.* (2001). De los modelos propuestos se utilizarán los modelos del poro de la media geométrica o simplemente *poro geométrico* (PMG), del *poro neutral* (PN) y del *poro grande* (PG), los cuales se escriben, respectivamente, como sigue:

$$K(\Theta) = K_s \left[ \frac{\int_0^\Theta \frac{\vartheta^{s-1} d\vartheta}{|\psi(\vartheta)|^{2s}}}{\int_0^1 \frac{\vartheta^{s-1} d\vartheta}{|\psi(\vartheta)|^{2s}}} \right]^2 \quad (5)$$

$$K(\Theta) = K_s \Theta^s \left[ \frac{\int_0^\Theta \frac{\vartheta^{s-1} d\vartheta}{|\psi(\vartheta)|^{4s}}}{\int_0^1 \frac{\vartheta^{s-1} d\vartheta}{|\psi(\vartheta)|^{4s}}} \right] \quad (6)$$

$$K(\Theta) = K_s \left[ \frac{\int_0^\Theta \frac{\vartheta^{2s-1} d\vartheta}{|\psi(\vartheta)|^{4s}}}{\int_0^1 \frac{\vartheta^{2s-1} d\vartheta}{|\psi(\vartheta)|^{4s}}} \right] \quad (7)$$

donde  $s = D/E$ ;  $D$  es la dimensión fractal del suelo y  $E = 3$  es la dimensión euclídeana del espacio físico. Este parámetro es una función de la porosidad volumétrica total del suelo ( $\phi$ ) definida de manera implícita por:

$$(1 - \phi)^s + \phi^{2s} = 1 \quad (8)$$

A partir de los modelos (5), (6) y (7), Fuentes *et al.* (2003) obtuvieron formas analíticas cerradas de la conductividad hidráulica al imponer, respectivamente, las relaciones entre  $\lambda$  y  $m$  siguientes:  $\lambda = 2sm/(1-sm)$ ,  $\lambda = 4sm/(1-sm)$  y  $\lambda = 4sm/(1-2sm)$ ; el número de parámetros de forma se reduce a dos ( $m, n$ ) y pueden aún ser reducidos a uno ( $m$ ), si se acepta que  $\lambda = mn$ , lo cual permite expresar de manera explícita la función  $\theta(\psi)$ . Los resultados correspondientes a los modelos PMG, PN y PG han sido validados experimentalmente por Fuentes *et al.* (2003) y son, respectivamente, los siguientes:

$$K(\Theta) = K_s \left[ 1 - \left(1 - \Theta^{1/m}\right)^{sm} \right]^2, \quad 0 < sm = 1 - 2s/n < 1 \quad (9)$$

$$K(\Theta) = K_s \Theta^s \left[ 1 - \left(1 - \Theta^{1/m}\right)^{sm} \right], \quad 0 < sm = 1 - 4s/n < 1 \quad (10)$$

$$K(\Theta) = K_s \left[ 1 - \left(1 - \Theta^{1/m}\right)^{2sm} \right], \quad 0 < 2sm = 1 - 4s/n < 1 \quad (11)$$

Los parámetros del sistema (9), (10) y (11) son seis  $\mathbf{p} = (\theta_r, \theta_s, \phi, \psi_d, K_s, m)$ . Para reducir el número de parámetros se asume  $\theta_r = 0$  y el contenido de humedad a saturación se asimila a la porosidad volumétrica total ( $\theta_s = \phi$ ); esta última se estima experimentalmente. El vector final de parámetros desconocidos contiene dos parámetros de escala ( $\psi_d, K_s$ ); el primero es una escala de la presión y el segundo de la conductividad y un parámetro de forma ( $m$ ), es decir:  $\mathbf{p} = (\psi_d, K_s, m)$ .

La estimación de los parámetros de las características hidrodinámicas con una modelación inversa consiste en reproducir los datos observados de la presión o el contenido de humedad con la solución de la ecuación de Richards sujeta a las condiciones iniciales y de frontera de la dinámica del agua observada. Si  $\psi_{\text{exp}}(\mathbf{x}_i, t_j)$  y  $\psi(\mathbf{x}_i, t_j; \mathbf{p})$  son, respectivamente, las presiones observada y calculada en diferentes puntos  $\mathbf{x}_i$ , con  $i = 1, 2, \dots, N_i$ , y en diferentes tiempos  $t_j$ , con  $j = 1, 2, \dots, N_t$ , el vector de parámetros puede ser estimado con el criterio clásico de minimizar la suma de los cuadrados de los errores. En otras palabras, se debe encontrar el vector  $\mathbf{p}_{\text{min}}$  que haga mínima la siguiente función objetivo:

$$\text{SCE}(\mathbf{p}) = \sum_{j=1}^{N_t} \sum_{i=1}^{N_i} \left[ \psi_{\text{exp}}(\mathbf{x}_i, t_j) - \psi(\mathbf{x}_i, t_j; \mathbf{p}) \right]^2 \quad (12)$$

El vector de parámetros puede ser también estimado si se minimiza la suma de los cuadrados de los errores entre los contenidos de humedad. En este caso, la función objetivo es:

$$SCE(\mathbf{p}) = \sum_{j=1}^{N_t} \sum_{i=1}^N [\hat{\theta}_{\text{exp}}(\mathbf{x}_i, t_j; \mathbf{p}) - \theta(\mathbf{x}_i, t_j; \mathbf{p})]^2 \quad (13)$$

en donde los contenidos de humedad se obtienen a partir de las presiones de la ecuación (12) utilizando la curva de retención,  $\theta(\psi)$ , de la solución de la ecuación de Richards,  $\theta(\mathbf{x}_i, t_j; \mathbf{p}) = \theta[\psi(\mathbf{x}_i, t_j; \mathbf{p}); \mathbf{p}]$ , y de los datos experimentales de la presión del agua en el suelo,  $\hat{\theta}_{\text{exp}}(\mathbf{x}_i, t_j; \mathbf{p}) = \theta[\psi_{\text{exp}}(\mathbf{x}_i, t_j); \mathbf{p}]$ .

La función objetivo que es retenida en el presente trabajo es la proporcionada por la ecuación (13); se debe observar que esta función objetivo no requiere información experimental sobre el contenido de humedad, sino de la presión del agua como en la ecuación (12). Para un vector de parámetros dado, la presión es obtenida generalmente mediante una solución numérica de la ecuación de Richards. La ecuación (1) se resuelve usando un esquema implícito en diferencias finitas, con  $K$  tomado en el tiempo precedente (linealización explícita) (Haverkamp *et al.*, 1977; Belmans *et al.*, 1983) y  $C$  como es propuesto por Celia *et al.* (1990). El promedio espacial de  $K$  es calculado como la media geométrica (Haverkamp y Vauclin, 1979). El método inverso se implementó combinando la solución numérica con la subrutina DBCONF de IMSL (IMSL, 1989), la cual encuentra el mínimo de la función  $SCE(\mathbf{p})$  utilizando un método cuasi-newtoniano (Dennis y Schnabel, 1983).

Para evaluar la capacidad de descripción y predicción de la ecuación de Richards con los modelos de las características hidrodinámicas, se utiliza como índice la raíz del error cuadrático medio  $RECM = \sqrt{SCE(\mathbf{p}_{\text{mín}})/(N_t \times N)}$ , donde  $\mathbf{p}_{\text{mín}}$  es el vector de parámetros que hace mínima la función objetivo. En términos más precisos, se utiliza el índice  $\langle \Delta \theta \rangle = RECM / (\theta_s - \theta_l)$ , ya que  $RECM$  tiene las unidades del contenido de humedad, es decir, la raíz del error cuadrático medio del grado efectivo de saturación:

$$\langle \Delta \theta \rangle = \sqrt{\frac{1}{N_t \times N} \sum_{j=1}^{N_t} \sum_{i=1}^N [\hat{\theta}_{\text{exp}}(\mathbf{x}_i, t_j; \mathbf{p}_{\text{mín}}) - \theta(\mathbf{x}_i, t_j; \mathbf{p}_{\text{mín}})]^2} \quad (14)$$

### Aplicaciones

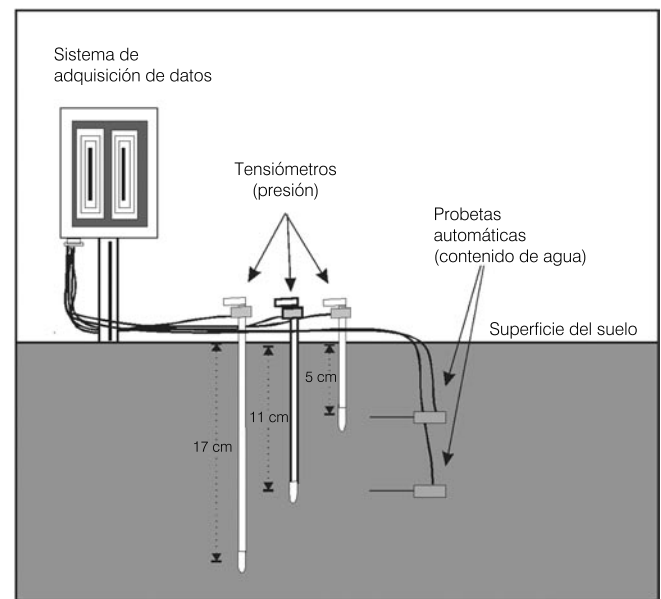
En una parcela experimental localizada en el Departamento de Energía Nuclear de la Universidad

Federal de Pernambuco se monitoreó la presión y el contenido de humedad en la capa superficial del suelo (0-20 cm) que, por su textura, es una arena francosa. En una superficie de 1.15 x 0.60 m se instalaron tres tensiómetros con caja de vacío a las profundidades de 5, 11 y 17 cm, y dos probetas automáticas para medir el contenido de agua en las profundidades de 5 y 11 cm, como se muestra en la ilustración 1. Los instrumentos se conectaron a un sistema de adquisición de datos; los datos se almacenaron cada media hora durante 72 horas.

La ecuación de Richards unidimensional vertical se utiliza para la caracterización de la capa de suelo de 12 cm de espesor, comprendida entre 5 y 17 cm de profundidad. Las presiones observadas en estas profundidades se toman como las condiciones de frontera superior e inferior, respectivamente:  $\psi(5 \text{ cm}, t) = \psi_{\text{sup}}(t)$  y  $\psi(17 \text{ cm}, t) = \psi_{\text{inf}}(t)$ ; la condición inicial se obtiene mediante la interpolación lineal de los valores de la presión medida en las profundidades 5, 11 y 17 cm en  $t=0$ . En la ilustración 2 se muestra la evolución temporal de la presión observada en las tres profundidades.

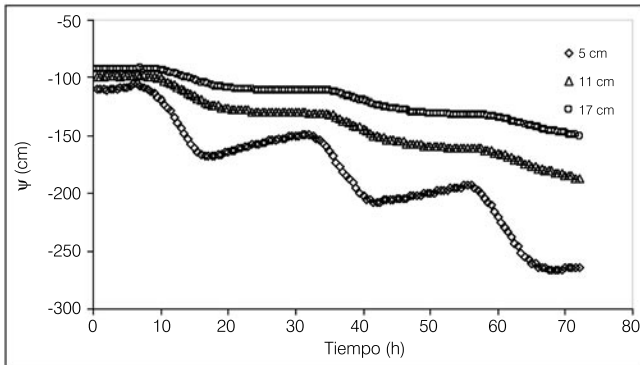
Los parámetros de las características hidrodinámicas corresponden a la profundidad de 11 cm, considerando en la función objetivo  $N_t=145$  y  $N=1$ . Con un vector de parámetros ( $\hat{\mathbf{p}}$ ) se estima  $\hat{\theta}_{\text{exp}}(11 \text{ cm}, t_j)$  a partir de  $\psi_{\text{exp}}(11 \text{ cm}, t_j)$  utilizando la ecuación (3) y una

**Ilustración 1. Medición de la presión del agua en tres puntos del perfil del suelo y del contenido de humedad en dos puntos del mismo, en una parcela del Departamento de Energía Nuclear de la Universidad Federal de Pernambuco, con suelo de textura arena francosa.**





**Ilustración 2. Evoluciones temporales de la presión del agua en el suelo en las profundidades de 5, 11 y 17 centímetros.**



de las ecuaciones (9), (10) u (11); luego se resuelve la ecuación de Richards hasta el tiempo  $t_j$  para obtener  $\psi(11 \text{ cm}, t_j; \hat{\mathbf{p}})$  y, en consecuencia,  $\theta(11 \text{ cm}, t_j; \hat{\mathbf{p}})$ , y si la función objetivo (13) presenta un mínimo, entonces  $\mathbf{p}_{\min} = \hat{\mathbf{p}}$ ; en caso contrario, se sigue utilizando la subrutina DBCONF de IMSL.

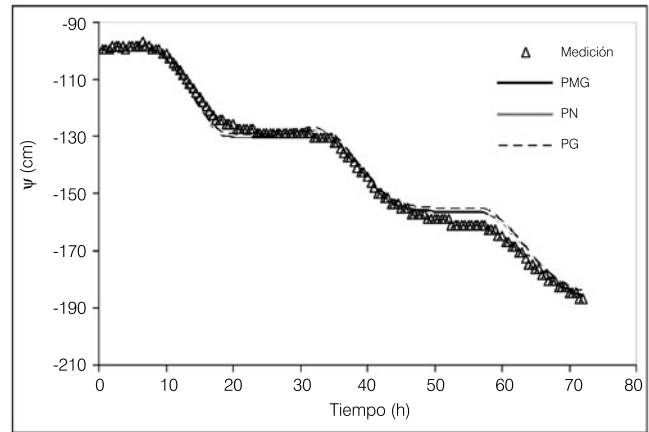
En el cuadro 1 se muestran los valores de los parámetros del vector  $\mathbf{p}_{\min} = (\psi_d, K_s, m)$  correspondientes a los tres modelos de conductividad hidráulica utilizados; los valores de los parámetros fijos son  $\theta_r = 0 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$  y  $\theta_s = 0.415 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$ . En la ilustración 3, la comparación gráfica entre la presión medida y las calculadas indica que no existe diferencia significativa entre los tres modelos para describir los datos experimentales utilizados en la obtención de los valores de los parámetros involucrados en los mismos; los valores de  $\langle \Delta \theta \rangle$  son similares estadísticamente (cuadro 1).

La evaluación de la capacidad de predicción de los modelos de las características hidrodinámicas utilizados en la ecuación de Richards, considerando los parámetros obtenidos mediante la modelación inversa, se realiza con la evolución temporal del contenido de humedad observada en la profundidad de 11 cm; esta información

**Cuadro 1. Valores obtenidos de los parámetros de las características hidrodinámicas, correspondientes a  $\theta_r = 0 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$  y  $\theta_s = \phi = 0.415 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$  ( $s = 0.6765$ ), y de la raíz del error cuadrático medio del grado efectivo de saturación.**

Modelo	$[\psi_d]$ (cm)	$K_s$ (cm/h)	$m$	$\langle \Delta \theta \rangle$
PMG	62.50	0.1086	0.2282	0.0038
PN	40.00	0.1792	0.0989	0.0040
PG	41.67	0.0914	0.0983	0.0043

**Ilustración 3. La evolución temporal de la presión de agua en la profundidad de 11 cm y su descripción por los tres modelos con los vectores de parámetros obtenidos con la modelación inversa:  $\langle \Delta \theta \rangle_{\text{PMG}} = 0.0038$ ,  $\langle \Delta \theta \rangle_{\text{PN}} = 0.0040$  y  $\langle \Delta \theta \rangle_{\text{PG}} = 0.0043$ .**



no ha sido utilizada en la obtención de parámetros. Puesto que las características hidrodinámicas están formadas por la curva de retención y la curva de conductividad hidráulica, una buena predicción de la evolución del contenido de humedad es consecuencia de una buena representación de las dos curvas por los modelos utilizados.

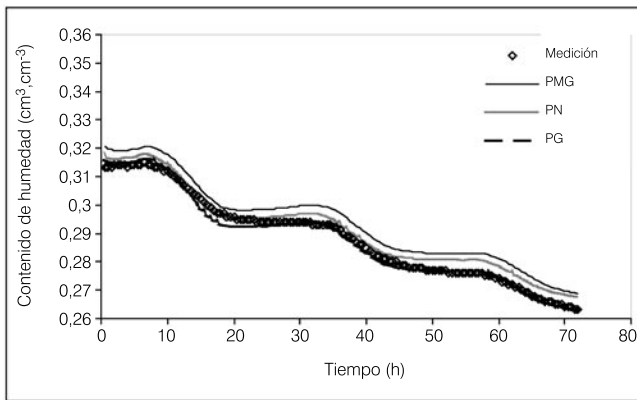
A partir de las presiones calculadas con la ecuación de Richards, considerando los modelos PMG, PN y PG, en la profundidad de 11 cm (ilustración 3), se estima el contenido de humedad con la curva de retención, ecuaciones (3) y (4). En la ilustración 4 se compara la evolución temporal,  $\theta(11 \text{ cm}, t_j)$ , calculada con cada uno de los modelos, y la medida en la profundidad de 11 cm. Los valores de  $\langle \Delta \theta \rangle$ , correspondientes a la predicción de la evolución temporal del contenido de humedad, se muestran en el cuadro 2. Son significativamente diferentes entre sí; la desigualdad  $\langle \Delta \theta \rangle_{\text{PG}} < \langle \Delta \theta \rangle_{\text{PN}} < \langle \Delta \theta \rangle_{\text{PMG}}$  indica que el mejor modelo de predicción de esta evolución es el modelo del poro grande.

Se debe observar que con los valores medidos del contenido de humedad y la presión en las profundidades 5 y 11 cm, se puede construir la curva experimental de retención de agua del suelo. En la ilustración 5 se presenta la comparación entre la curva experimental y las curvas de predicción proporcionadas por los tres modelos de las características hidrodinámicas, utilizando los parámetros obtenidos con la modelación inversa y presentados en el cuadro 1. Los valores de  $\langle \Delta \theta \rangle$ , correspondientes a la predicción de la curva de retención experimental, se muestran en el cuadro 2; de nuevo, la desigualdad  $\langle \Delta \theta \rangle_{\text{PG}} < \langle \Delta \theta \rangle_{\text{PN}} < \langle \Delta \theta \rangle_{\text{PMG}}$  indica

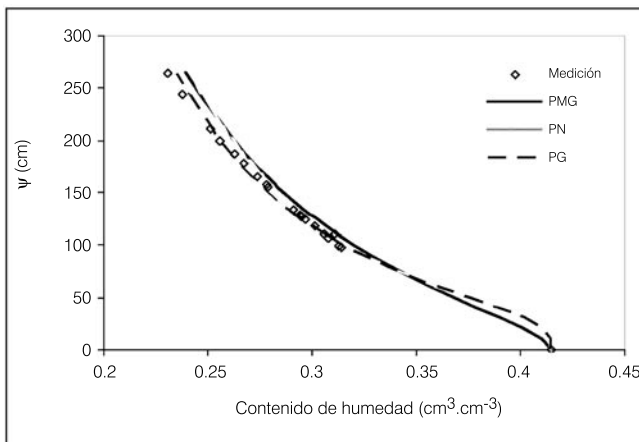
**Cuadro 2.** Valores de la raíz del error cuadrático medio del grado efectivo de saturación, correspondientes a la obtención de parámetros a través de la modelación inversa, a la predicción de la evolución temporal del contenido de humedad y a la predicción de la curva de retención experimental.

Modelo	$\langle \Delta \theta \rangle$ Modelación inversa	$\langle \Delta \theta \rangle$ Predicción del contenido de humedad	$\langle \Delta \theta \rangle$ Predicción de la curva de retención
PMG	0.0038	0.0137	0.0144
PN	0.0040	0.0072	0.0104
PG	0.0043	0.0039	0.0054

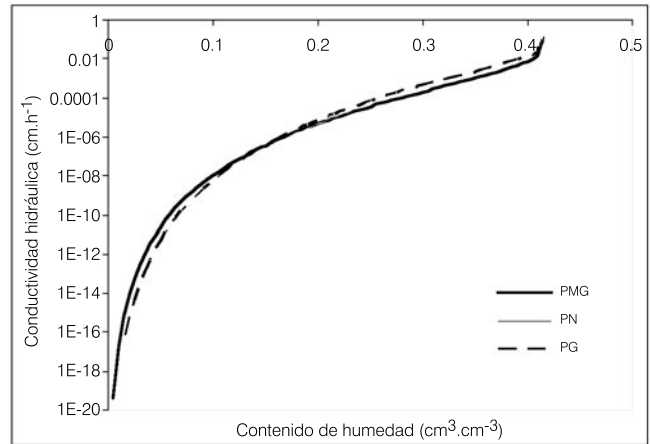
**Ilustración 4.** Las evoluciones temporales de los contenidos de humedad medidos y predichos por la ecuación de Richards con los tres modelos de las características hidrodinámicas, en la profundidad de 11 cm:  $\langle \Delta \theta \rangle_{PMG}=0.0137$ ,  $\langle \Delta \theta \rangle_{PN}=0.0072$  y  $\langle \Delta \theta \rangle_{PG}=0.0039$ .



**Ilustración 5.** Comparación entre la curva experimental de retención de agua y las curvas de predicción calculadas con los parámetros obtenidos con la modelación inversa y presentados en el cuadro 1, correspondientes a los tres modelos de las características hidrodinámicas:  $\langle \Delta \theta \rangle_{PMG}=0.0144$ ,  $\langle \Delta \theta \rangle_{PN}=0.0104$  y  $\langle \Delta \theta \rangle_{PG}=0.0054$ .



**Ilustración 6.** La conductividad hidráulica como una función del contenido de humedad proporcionada por las ecuaciones (9), (10) y (11), que definen los modelos PMG, PN y PG de la conductividad hidráulica, utilizando los valores de los parámetros presentados en el cuadro 1.



que el mejor modelo de predicción de esta curva es el modelo del poro grande.

En cuanto a la curva de conductividad hidráulica, en la ilustración 6 se muestran las gráficas de las ecuaciones (9), (10) y (11), que definen, respectivamente, los modelos PMG, PN y PG de la conductividad hidráulica en función del contenido de humedad, utilizando los vectores de parámetros obtenidos con la modelación inversa. De acuerdo con la validación precedente, es de esperar que el valor de  $K_s$  obtenido con el modelo del poro grande sea cercano a la conductividad a saturación del suelo.

## Conclusiones

Las características hidrodinámicas de los suelos parcialmente saturados, formadas por la curva de retención de humedad del suelo y la curva de conductividad hidráulica, son estimadas mediante modelación inversa con la ecuación de Richards. Se ha aceptado la función hiperbólica general presentada por Braddock *et al.* (2001) para la curva de retención y tres modelos fractales de la conductividad hidráulica propuestos por Fuentes *et al.* (2001): los modelos del poro de la media geométrica (PMG), del poro neutral (PN) y del poro grande (PG).

Se ha utilizado la raíz del error cuadrático medio del grado efectivo de saturación como indicador de la bondad de ajuste de los datos experimentales por los tres modelos; con los parámetros obtenidos para reproducir

la evolución temporal de la presión no existen diferencias significativas en la capacidad de descripción de los tres modelos. Sin embargo las diferencias son significativas en la capacidad de predicción de la evolución temporal del contenido de humedad y en la predicción de la curva de retención experimental; el mejor modelo de predicción es el modelo del poro grande, seguido por el modelo del poro neutro y, finalmente, por el modelo del poro de la media geométrica.

Recibido: 24/03/2004  
Aprobado: 14/01/2005

## Referencias

- BELMANS, C., WESSELING, J.G. y FEDDES, R.A. Simulation of the water balance of a cropped soil: SWATRE. *Journal of Hydrology*. Vol. 63, 1983, pp. 271-286.
- BRADDOCK, R.D., PARLANGE, J.-Y. y LEE, H. Application of a soil water hysteresis model to simple water retention curves. *Transport in Porous Media*. Vol. 44, 2001, pp. 407-420.
- BROOKS, R.H. y COREY, A.T. Hydraulic properties of porous media. *Hydrologie Paper*. Vol. 3, 1964, pp. 1-27.
- CARRERA, J., y NEWMAN, S.P. Estimation of aquifer parameters under transient and steady state conditions: I. Maximum likelihood method incorporating prior information. *Water Resources Research*. Vol. 22, 1986, pp. 199-210.
- CELIA, M.A., BOULOUTAS, E.T. y ZARBA, R.L. A general mass conservative numerical solution for the unsaturated flow equation. *Water Resources Research*. Vol. 26, 1990, pp. 1483-1496.
- DANE, J.H. y HRUSKA, S. In situ determination of soil hydraulic properties during drainage. *Soil Science Society of America Journal*. Vol. 47, 1983, pp. 619-624.
- DENNIS, J.E. y SCHNABEL, R.B. *Numerical methods for unconstrained optimization and nonlinear equations*. Nueva Jersey: Prentice-Hall, 1983.
- FUENTES, C., BRAMBILA, F., VAUCLIN, M., PARLANGE, J.-Y. y HAVERKAMP, R. Modelación fractal de la conductividad hidráulica de los suelos no saturados. *Ingeniería hidráulica en México*. Vol. 16, núm. 2, 2001, pp. 119-137.
- FUENTES, C., ANTONINO, A.C.D., SEPÚLVEDA, J., ZATARÁIN, F. y DE LEÓN, B. Predicción de la conductividad hidráulica relativa de los suelos con modelos fractales. *Ingeniería hidráulica en México*. Vol. 18, núm. 4, 2003, pp. 31-40.
- HAVERKAMP, R., VAUCLIN, M., TOUMA, J., WIERENGA, P.J. y VACHAUD, G. A comparison of numerical simulation models for one-dimensional infiltration. *Soil Science Society of America Journal*. Vol. 41, 1977, pp. 285-294.
- HAVERKAMP, R. y VAUCLIN, M. A note on estimating finite difference interblock hydraulic conductivity values for transient unsaturated flow problems. *Water Resources Research*. Vol. 15, 1979, pp. 181-187.
- HOPMANS, J.W., VOGEL, T. y KOBLIK, P.D. X-ray topography of soil water distribution in one-step outflow experiments. *Soil Science Society of America Journal*. Vol. 56, 1992, pp. 355-362.
- IMSL. IMSL math/library; *User manual*. Houston, Texas: IMSL, 1989.
- KOOL, J.B., PARKER, J.C. y VAN GENUCHTEN, M.Th. Parameter estimation for unsaturated flow and transport models: a review. *Journal of Hydrology*. Vol. 91, 1987, pp. 255-293.
- KOOL, J.B. y PARKER, J.C. Analysis of the inverse problem for transient unsaturated flow. *Water Resources Research*. Vol. 24, núm. 6, 1988, pp. 817-830.
- KUCZERA, G. Assessing hydrological nonlinearity using response surface plots. *Journal of Hydrology*. Vol. 118, 1990, pp. 143-161.
- RITTER, A., HUPET, F., MUÑOZ-CARPENA, R., LAMBOT, S. y VANCLOOSTER, M. Using inverse methods for estimating soil hydraulic properties from field data as an alternative to direct methods. *Agricultural Water Management*. Vol. 59, 2003, pp. 77-96.
- RUSSO, D. y JURY, W.A. A theoretical study of the estimation of the correlation scale in spatially variable fields. 2. Nonstationary Fields. *Water Resources Research*. Vol. 23, núm. 7, 1987, pp. 1269-1279.
- RUSSO, D., BRESLER, E., SHANI, U. y PARKER, J. Analysis of infiltration events in relation to determining soil hydraulic properties by inverse problem methodology. *Water Resources Research*. Vol. 27, 1991, pp. 1361-1373.
- SIMUNEK, J. y VAN GENUCHTEN, M.T. Estimating unsaturated soil hydraulic properties from tension disc infiltrometer data by numerical inversion. *Water Resources Research*. Vol. 32, núm. 9, 1996, pp. 2683-2696.
- VAN DAM, J.C., STRICKER, J.N.M. y DROOGERS, P. Inverse method to determine soil hydraulic functions from multistep outflow experiments. *Soil Science Society of America Journal*. Vol. 58, 1994, pp. 647-652.
- VAN GENUCHTEN, M.T. A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils. *Soil Science Society of America Journal*. Vol. 44, 1980, pp. 892-892.
- ZACHMANN, D.W., DUCHATEAU, P.C. y KLUTE, A. The calibration of the Richards flow equation for draining column by parameter identification. *Soil Science Society of America Journal*. Vol. 45, 1981, pp. 1012-1015.
- ZOU, Z.Y., YOUNG, M.H., LI, Z. y WIERENGA, P.J. Estimation of depth averaged unsaturated soil hydraulic properties from infiltration experiments. *Journal of Hydrology*. Vol. 242, 2001, pp. 26-42.



### Abstract

ANTONINO, A.C.D., FUENTES, C., SOARES, W.A., BORGES, E., NETTO, A.M, LIMA, J.R.S., LIRA, C.A.B.O. & HAMMECKER, C. *Hydrodynamic characterization of soils from pressure profile*. Hydraulic engineering in Mexico (in Spanish). Vol. XX, no. 4, October-December, 2005, pp. 45-52.

Soil hydraulic characteristics, namely: water retention curve,  $\theta(\psi)$ , and hydraulic conductivity curve,  $K(\psi)$ , were estimated by using the inverse modeling based on Richards equation. The general hyperbolic function reported by Braddock et al. (2001) for the water retention curve has been accepted. Three fractal models proposed by Fuentes et al. (2001) were applied for the hydraulic conductivity: geometric mean pore model, neutral pore model, and large pore model. The hyperbolic function contains six parameters ( $\theta_r, \theta_s, \psi_d, \lambda, m, n$ ), where the residual water content ( $\theta_r$ ) is assumed to be zero and the water content at saturation ( $\theta_s$ ) is set at total soil volumetric porosity. To obtain closed-form equations for the hydraulic conductivity from the fractal models and to achieve an explicit function  $\theta(\psi)$ , the three form parameters ( $\lambda, m, n$ ) are reduced to one ( $m$ ); the characteristic pressure ( $\psi_d$ ) and the saturated hydraulic conductivity ( $K_s$ ) compose the three unknown system parameters ( $\psi_d, K_s, m$ ); these parameters are obtained in order to reproduce the pressure measurements in the soil profile. In a surface plot of 1.15x0.60 m, with a soil of loamy sand texture, located in the Federal University of Pernambuco, Brazil, the water content and the matric potential of the water in the soil were obtained and stored in a datalogger every 30 minutes for 72 hours, at the depths of 5, 11, and 17 cm. To characterize the 12 cm thick soil layer, a numeric solution of the Richards equation combined with the subroutine DBCONF of IMSL (1989) was used. To find the parameters, the sum of the differences between measured and estimated pressures at 11 cm depth was minimized; the boundary conditions are the measured pressures at the top and bottom of the layer and the initial condition was obtained by linear interpolation of the measured values for the pressure. Using the root mean square error of the saturation degree as an indicator for fitting goodness of the experimental data for these three models, no significant differences in the capability for describing the temporal evolution of the measured pressure was observed for the three models. However, differences in the prediction capability are significant for the temporal evolution of the water content at a depth of 11 cm and the experimental water retention curve. The best prediction approach is the large pore model followed by the neutral pore and the geometric mean pore models, respectively.

**Keywords:** water retention curve, hydraulic conductivity curve, fractal models, inverse method.

### Dirección institucional de los autores:

Dr. Antonio C.D. Antonino  
M. en C. Willames A. Soares  
Dra. Edvane Borges  
Dr. André M. Netto  
Dr. José R.S. Lima  
Dr. Carlos A.B.O. Lira

Departamento de Energia Nuclear da Universidade Federal de Pernambuco,  
Av. Prof. Luiz Freire 1000, Cd. Universitária. CEP 54740-540,  
Recife, PE, Brasil,  
acda@ufpe.br

Dr. Carlos Fuentes

Instituto Mexicano de Tecnología del Agua,  
Paseo Cuauhnáhuac 8532,  
Progreso, Jiutepec, Morelos, México,  
C.P. 62550,  
teléfono: + (52) (777) 329 3659,  
cfuentes@tlaloc.imta.mx

Dr. Claude Hammecker

Institut de Recherche pour le Développement,  
IRD – MSEM, 300 av. Emile Jeanbrau, 34095, Montpellier, France,  
claude.hammecker@msem.univ-montp2.fr