

Artículo publicado en el Repositorio Institucional del IMTA

<i>Título</i>	Radiación no lineal en la ecuación de Richards bidimensional aplicada al drenaje agrícola subterráneo.
<i>Autor / Adscripción</i>	Manuel Zavala Carlos Fuentes Heber Saucedo  Instituto Mexicano de Tecnología del Agua
<i>Publicación</i>	Ingeniería Hidráulica en México, 20(4): 111-119
<i>Fecha de publicación</i>	2005
<i>Resumen</i>	Se presenta una aproximación mecanicista para modelar el funcionamiento hidráulico de un sistema de drenaje agrícola subterráneo que consiste en acoplar numéricamente la ecuación de Richards bidimensional para el flujo de agua en el suelo con la ecuación de continuidad y una ley de resistencia para el flujo de agua en el dren. Haciendo uso de evidencia experimental, se evalúa la capacidad de descripción tanto del modelo basado en la condición de radiación no lineal como del modelo clásico reportado en la literatura que impone en los drenes una condición de superficie de filtración.
<i>Identificador</i>	<a href="http://hdl.handle.net/123456789/804">http://hdl.handle.net/123456789/804</a>

# Radiación no lineal en la ecuación de Richards bidimensional aplicada al drenaje agrícola subterráneo

Manuel Zavala  
Carlos Fuentes  
Heber Saucedo

Instituto Mexicano de Tecnología del Agua

*Se presenta una aproximación mecanicista para modelar el funcionamiento hidráulico de un sistema de drenaje agrícola subterráneo que consiste en acoplar numéricamente la ecuación de Richards bidimensional para el flujo de agua en el suelo con la ecuación de continuidad y una ley de resistencia para el flujo de agua en el dren. Este acoplamiento se realiza imponiendo en el perímetro de los drenes la condición de radiación no lineal de Zavala et al. (2003). Haciendo uso de evidencia experimental, se evalúa la capacidad de descripción tanto del modelo basado en la condición de radiación no lineal como del modelo clásico reportado en la literatura que impone en los drenes una condición de superficie de filtración. A partir de la comparación con datos experimentales, se muestra que con la condición de superficie de filtración se sobrestima el gasto de drenaje y el abatimiento de la superficie libre debido a que se considera nula la resistencia en la interfaz suelo saturado-dren. La validación experimental permite mostrar que la descripción de las transferencias de masa y energía que se desarrollan en un sistema de drenaje agrícola subterráneo durante la recesión del manto freático debe realizarse imponiendo en los drenes la condición de radiación no lineal.*

**Palabras clave:** ecuación de continuidad, ley de resistencia, interfaz suelo-dren, flujo de agua en el suelo.

## Introducción

La rehabilitación de terrenos agrícolas afectados por mantos freáticos someros puede realizarse con la construcción de sistemas de drenaje agrícola subterráneo. Estos sistemas remueven los excesos de agua producto de sobre-riegos y precipitaciones abundantes, generando en el suelo un régimen de humedad propicio para el desarrollo de los cultivos. Dados los beneficios que se obtienen con estos sistemas de drenaje, es importante estudiar su funcionamiento hidráulico considerando las siguientes variables: profundidad, separación y geometría de los drenes, así como la evolución de la presión en el interior de los mismos. No obstante que este estudio puede realizarse con las ecuaciones de Richards (1931) y Saint-Venant, su aplicación se ha visto limitada por la incertidumbre

asociada al tipo de la condición de frontera que debe imponerse en la circunferencia del dren.

La modelación del flujo del agua hacia drenes subterráneos generalmente se realiza considerando la frontera del dren como una superficie de filtración (Neuman, 1973; Zaradny y Feddes, 1979; Merva *et al.*, 1983; Cooley, 1983; Fipps *et al.*, 1986; Huyakorn *et al.*, 1986; Ahmad *et al.*, 1993; Kohler *et al.*, 2001; Saucedo *et al.*, 2002). La condición de superficie de filtración (ilustración 1) es una combinación de condiciones tipo Dirichlet y tipo Neumann que se aplica de la siguiente manera: sobre el segmento de circunferencia del dren que está en contacto con suelo saturado ( $\overline{ab}$ ) se impone una condición tipo Dirichlet homogénea (presión igual a la presión atmosférica convencionalmente supuesta cero) y si existe un segmento del dren en contacto con suelo no saturado ( $\overline{bc}$ ), se le impone una condición

tipo Neumann con flujo nulo ( $q=0$ ); la longitud de los segmentos varía en función de la posición de la superficie libre. La condición tipo Dirichlet supone que la resistencia en la interfaz suelo-dren es nula, mientras que la condición tipo Neumann de flujo nulo implica que la resistencia es infinita; sin embargo, la resistencia en la interfaz varía en función de la diferencia de presiones existente en la vecindad del dren y no como delta de Dirac; en consecuencia, la condición de filtración no representa con precisión la física de la transferencia del agua del suelo al dren.

Recientemente, Zavala *et al.* (2003) analizaron las transferencias de masa y energía que se desarrollan en la base de la columna de suelo que se ubica encima del dren, imponiendo en esta frontera una condición tipo radiación, en la cual el flujo de drenaje es directamente proporcional a la diferencia de presiones en la vecindad del dren e inversamente proporcional a la resistencia en la interfaz suelo-dren. Los autores analizan con la ecuación de Richards unidimensional el comportamiento del coeficiente de resistencia durante la recesión del manto freático y muestran que cuando este coeficiente se supone constante (radiación lineal), se tiene que para un rango de presiones en la base de la columna de suelo la superficie libre debe ubicarse encima de su posición original, lo cual es físicamente incorrecto. Para resolver este problema obtienen una relación tipo función beta para el coeficiente de resistencia, a partir de la cual establecen que el drenaje de una columna de suelo a la atmósfera durante la recesión del manto freático debe describirse con una condición de radiación no lineal.

La condición de radiación no lineal de Zavala *et al.* (2003) se ha aplicado para describir la transferencia de agua en columnas de suelo inicialmente saturado

que drenan libremente a la atmósfera (modelaciones unidimensionales). Sin embargo, en el drenaje agrícola, la acumulación del agua en los drenes origina que la presión en su perímetro interno varíe y no corresponda exclusivamente a la presión atmosférica; además, en un modelo unidimensional no pueden considerarse de manera explícita la forma geométrica y la disposición de los drenes en el suelo. Estas condiciones motivan los objetivos de este trabajo: 1) desarrollar un modelo bidimensional para describir las transferencias de masa y energía desarrolladas en los sistemas de drenaje agrícola durante la recesión del manto freático, que considere la condición de radiación no lineal de Zavala *et al.* (2003) y la evolución de la presión en el interior del dren; 2) evaluar la capacidad de descripción del modelo planteado y del modelo basado en la condición de superficie de filtración, comparando sus resultados con los obtenidos en un experimento de drenaje realizado en laboratorio.

### Planteamiento del problema

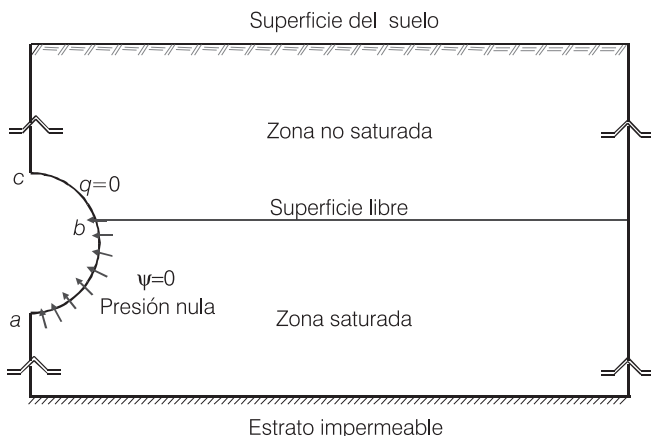
El movimiento del agua en un sistema de drenaje agrícola subterráneo es un fenómeno tridimensional, cuya descripción debe realizarse estrictamente con la ecuación de Richards en tres dimensiones. Sin embargo, cuando las variaciones de la superficie libre en el sentido del dren son despreciables, puede aceptarse la hipótesis de que el fenómeno es básicamente bidimensional, es decir, que se efectúa en planos perpendiculares a la dirección de un dren. La ecuación que gobierna el proceso es, entonces:

$$C(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ K(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ K(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial z} \right] - \frac{\partial K}{\partial z} \quad (1)$$

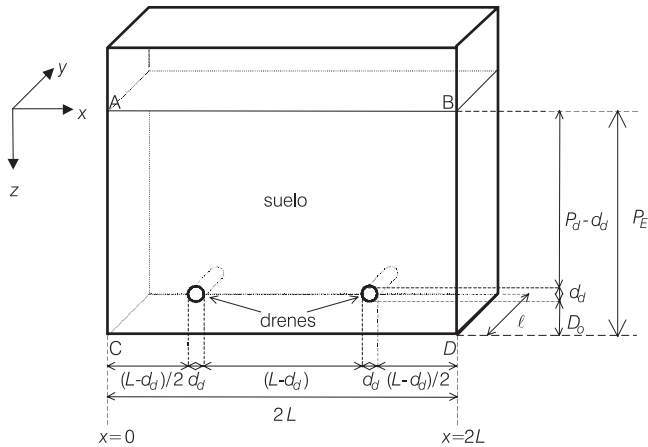
donde  $\psi = \psi(x, z, t)$  es el potencial de presión del agua en el suelo [L]; (el potencial gravitacional ha sido asimilado a la coordenada vertical  $z$  orientada positivamente en dirección descendente [L]);  $x$  es la coordenada horizontal [L];  $t$ , el tiempo [T];  $K(\psi)$ , la conductividad hidráulica [ $LT^{-1}$ ];  $C(\psi) = d\theta(\psi)/d\psi$ , la capacidad específica [ $L^{-1}$ ];  $\theta = \theta(\psi)$ , el contenido volumétrico de agua [ $L^3L^{-3}$ ] y depende de la presión del agua en el suelo, esta dependencia es conocida como la característica de humedad o curva de retención. La ecuación (1) puede ser usada para describir el movimiento del agua en sistemas de drenaje como el que se presenta en la ilustración 2.

Para describir el flujo de agua en un sistema de drenaje, es necesario conocer, además de la ecuación (1), el estado inicial del medio poroso y definir las

**Ilustración 1. Condición de frontera de superficie de filtración para el caso del drenaje agrícola subterráneo.**



**Ilustración 2. Sistema de drenaje experimental.**



condiciones de frontera. Si en el tiempo inicial se tiene un suelo saturado que no transfiere agua a la atmósfera, se puede suponer que la condición inicial es una distribución hidrostática de presiones, es decir:

$$\psi(x, z) = z \quad (2)$$

En sistemas de drenaje similares al mostrado en la ilustración 2, se tiene que en las fronteras laterales (paredes  $\overline{AC}$  y  $\overline{BD}$ ) la componente horizontal del flujo de Darcy es nula. También se usa una condición de flujo nulo en la frontera inferior  $\overline{CD}$  para representar al estrato impermeable. Estas condiciones se expresan de la siguiente manera:

$$-K(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad x = 0, \quad z \in \overline{AC} \quad (3)$$

$$-K(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad x = 2L, \quad z \in \overline{BD} \quad (4)$$

$$-K(\psi) \frac{\partial(\psi - z)}{\partial z} = 0 \quad x \in \overline{CD}, \quad z = P_E \quad (5)$$

En la superficie del suelo se puede imponer una condición de flujo prescrito, tal como la intensidad de la evaporación ( $i$ ):

$$-K(\psi) \frac{\partial(\psi - z)}{\partial z} = i \quad x \in \overline{AB}, \quad z = 0 \quad (6)$$

De acuerdo con Zavala *et al.* (2003), debe describirse el drenaje de una columna de suelo a la atmósfera durante la recesión del manto freático con una condición de radiación no lineal. Para el caso del drenaje agrícola subterráneo, esta condición de frontera debe expresarse como:

$$-K(\psi) \frac{\partial(\psi - z)}{\partial n} = \frac{\psi - h}{R_{in}(\psi)} \quad \forall (x, y) \in \Omega \quad (7)$$

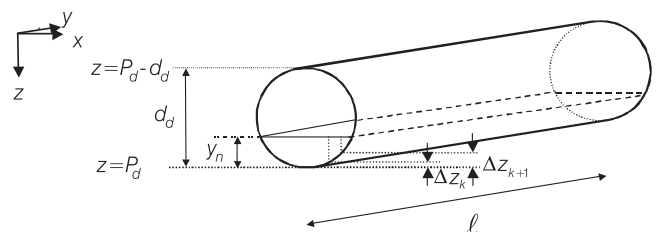
con:

$$R_{in}(\psi) = P / q_o \left( 1 - \frac{\psi}{P} \right)^\alpha \left( \frac{\psi - h}{P} \right)^{\beta - 1} \quad (7.1)$$

donde  $\partial/\partial n$  es la derivada en la dirección normal;  $\Omega$ , la circunferencia del dren;  $R_{in}$ , el coeficiente de resistencia al flujo del agua en la interfaz suelo-dren [ $T^{-1}$ ];  $q_o$ , un valor particular del flujo del agua en el suelo [ $LT^{-1}$ ];  $\alpha$  y  $\beta$ , parámetros adimensionales;  $P$ , la altura inicial de la columna de agua sobre el dren [ $L$ ], y  $h$  es la presión en el interior del dren [ $L$ ], que es igual a la presión atmosférica en el segmento del perímetro interno del dren en contacto con aire ( $h=0$ ) y en la fracción restante, si se acepta la hipótesis de una distribución hidrostática de las presiones, es igual a la altura de la columna de agua en el interior del dren ( $h=y_n - \Delta z$ ), siendo  $y_n$  el tirante medio (ver ilustración 3).

A partir de los comportamientos extremos del coeficiente de resistencia (7.1), se muestra que la condición de superficie de filtración reportada en la literatura es un caso particular de la condición de radiación no lineal (7), ya que cuando  $R_{in} \rightarrow \infty$ , se obtiene la condición de Neumann de flujo nulo  $-K(\psi)\partial(\psi - z)/\partial n = 0$  y cuando  $R_{in} \rightarrow 0$ , se obtiene la condición de Dirichlet  $\psi = h$ .

**Ilustración 3. Representación esquemática del flujo del agua en un dren.**



$$h = \begin{cases} 0 & P_d - d_d \leq z < P_d - y_n \\ y_n - \Delta z & z \geq P_d - y_n \end{cases}$$

La aplicación de la relación (7) requiere del conocimiento de la evolución espacial y temporal del tirante medio en el dren  $y_n(y, t)$ . Considerando que las variaciones en el sentido longitudinal son despreciables, el tirante puede suponerse constante en el espacio (uniforme), pero variable en el tiempo  $y_n(t)$ . En consecuencia, la evolución del tirante medio se calcula a partir de la ecuación de continuidad para flujo uniforme:

$$Q = VA \quad (8)$$

y de una ley de resistencia, la cual relaciona la pendiente de fricción y las principales variables del movimiento del agua en un conducto. Por su generalidad, se propone el uso de la ley potencial de resistencia hidráulica de Fuentes *et al.* (2004):

$$V = k \frac{R_H^{3d-1}}{\nu^{2d-1}} (gJ)^d \quad (9)$$

donde  $Q$  es el gasto total que descarga el dren [ $L^3T^{-1}$ ];  $V$ , la velocidad media del flujo [ $LT^{-1}$ ];  $A$ , el área hidráulica [ $L^2$ ];  $d$ , un parámetro adimensional que varía entre  $1/2 \leq d \leq 1$  en función del tipo de flujo, los valores extremos  $d=1/2$  y  $d=1$  corresponden, respectivamente, al régimen de Chézy y al flujo laminar de Poiseuille;  $k$  es un coeficiente adimensional;  $g$ , la aceleración gravitacional [ $LT^{-2}$ ];  $\nu$ , la viscosidad cinemática del agua [ $L^2T^{-1}$ ];  $R_H$ , el radio hidráulico [ $L$ ], y  $J$  es la pendiente de fricción [ $LL^{-1}$ ], que en flujo uniforme es igual a la pendiente topográfica del dren  $J_o$ .

La introducción de la ley de resistencia (9) en la ecuación de continuidad (8) permite establecer la siguiente relación entre el tirante medio en el dren y el gasto que conduce:

$$Q = k \frac{AR_H^{3d-1}}{\nu^{2d-1}} (gJ)^d \quad (10)$$

La relación (10) contiene dos variables a determinar (gasto y tirante). Para cerrar el sistema, se plantea una segunda relación para el gasto drenado, integrando la condición de radiación no lineal (7):

$$Q = \ell \int_{\Omega} q_o \left(1 - \frac{\Psi}{P}\right)^{\alpha} \left(\frac{\Psi - h}{P}\right)^{\beta} d\Omega \quad (11)$$

donde  $\ell$  es la longitud del dren.

La igualación de las relaciones (10) y (11) permite obtener la siguiente expresión para calcular la evolución del tirante medio:

$$k \frac{AR_H^{3d-1}}{\nu^{2d-1}} (gJ)^d - \ell \int_{\Omega} q_o \left(1 - \frac{\Psi}{P}\right)^{\alpha} \left(\frac{\Psi - h}{P}\right)^{\beta} d\Omega = 0 \quad (12)$$

El conjunto de ecuaciones (1-12) describe el funcionamiento hidráulico de un sistema de drenaje agrícola subterráneo, considerando simultáneamente el flujo del agua en el suelo, el flujo del agua en el dren y las transferencias desarrolladas en la interfaz suelo-dren. Para aplicar este modelo matemático al análisis de sistemas de drenaje experimentales o parcelarios, es necesario disponer de una solución del mismo. Como su solución analítica no es conocida, es necesario el uso de métodos numéricos.

### Solución numérica

La solución numérica de la ecuación de Richards bidimensional (1) se realiza integrando en el espacio esta ecuación diferencial con el método de los elementos finitos tipo Galerkin y en el tiempo con un método de diferencias finitas implícito (Saucedo *et al.*, 2002). La no linealidad del sistema de ecuaciones resultante se trata con el método iterativo de Picard, lo cual permite obtener el siguiente esquema numérico:

$$\left[ \frac{\mathbf{M}_{t+\Delta t}^w}{\Delta t} + \mathbf{B}_{t+\Delta t}^w \right] \Psi_{t+\Delta t}^{w+1} = \frac{\mathbf{M}_{t+\Delta t}^w}{\Delta t} \Psi_t^w + \mathbf{G}_{t+\Delta t}^w + \mathbf{F}_{N_{t+\Delta t}}^w + \mathbf{F}_{R_{t+\Delta t}}^w \quad (13)$$

donde  $\Delta t$  es el paso de tiempo;  $w$  indica el número de iteración en el intervalo de tiempo;  $\Psi$  es la solución de elemento finito de la ecuación (1) en cada nodo de la malla numérica;  $\mathbf{M}$ , la matriz de masa;  $\mathbf{B}$ , la matriz de rigidez;  $\mathbf{G}$ , el vector de gravedad;  $\mathbf{F}_N$ , el vector de términos asociado a los segmentos de frontera sujetos a una condición de Neumann (ecuaciones 3-6), y  $\mathbf{F}_R$  es el vector de términos asociado a los segmentos de frontera sujetos a la condición de radiación no lineal (7). El uso de funciones de base lineales (Mori, 1983) y funciones de masa concentrada (Neuman, 1973) permite obtener los coeficientes de las matrices y vectores del sistema (13):

$$M_{ij} = \delta_{ij} \sum_e C_j \frac{\Delta}{3} \quad (14.1)$$

$$B_{ij} = \sum_e \frac{\bar{K}}{4\Delta} (u_j u_i + v_j v_i) \quad (14.2)$$

$$G_j = \sum_e \frac{\bar{K}}{2} v_j \quad (14.3)$$

$$F_{Nj} = \sum_e \frac{qL_{Nj}}{2} \quad (14.4)$$

$$F_{Rj} = -\sum_e q_0 \left(1 - \frac{\Psi_j}{P_j}\right)^\alpha \left(\frac{\Psi_j - h_j}{P_j}\right)^\beta \frac{L_{Rj}}{2} \quad (14.5)$$

donde  $\delta_{ij}$  es la delta de Kronecker;  $\Delta$ , el área del elemento finito;  $\bar{K}$ , la conductividad en el elemento tomada como el promedio aritmético de las conductividades en los tres nudos del elemento;  $C_j$ , la capacidad específica correspondiente al nudo  $j$ ;  $u$  y  $v$  son factores geométricos definidos según las funciones de forma:  $u_i = z_j - z_k$ ,  $v_i = x_j - x_k$  (los subíndices  $i, j, k$ , que corresponden a las esquinas del elemento triangular, corren sobre sus tres posibles permutaciones secuenciales);  $L_{Nj}$  es la longitud de frontera asociada a cada nudo bajo condición de Neumann y  $q$  es el flujo de Darcy correspondiente (ecuaciones 3-6);  $L_{Rj}$  es la longitud de frontera asociada a cada nudo bajo condición de radiación no lineal;  $\Psi_j$  y  $h_j$  son el potencial de presión del agua en el suelo y la presión en la pared interna del dren en cada nudo sujeto a la condición de radiación no lineal (7), y  $P_j$  es la altura inicial de la columna de agua sobre el dren.

Para calcular los coeficientes del vector (14.5) en la primera iteración de cada paso de tiempo ( $w=1$ ), se usan los valores de  $h$  obtenidos en la iteración final del paso de tiempo precedente. En seguida se resuelve el sistema de ecuaciones (13) utilizando el método iterativo de gradiente conjugado preconditionado de Noor y Peters (1987).

La relación para el tirante medio en el dren (12) se resuelve al final de cada iteración del sistema de ecuaciones (13) con el método de Newton-Raphson, considerando el flujo de drenaje calculado con los valores del potencial de presión obtenidos en dicha iteración. En consecuencia, la función cuya raíz se determina es:

$$f(Y_n) = k \frac{AR_H^{3d-1}}{v^{2d-1}} (gJ)^d - \ell \int_{\Omega} q_0 \left(1 - \frac{\Psi}{P}\right)^\alpha \left(\frac{\Psi - h}{P}\right)^\beta d\Omega \Bigg|_{t+\Delta t}^{w+1} \quad (15)$$

El área hidráulica y el radio hidráulico del dren se calculan con las fórmulas clásicas de conductos circulares (Chow, 1982).

Una vez determinados los nuevos valores de  $h$ , éstos son utilizados para recalcular los valores del potencial de presión  $\Psi$ , repitiéndose el proceso de solución del sistema (13-15) hasta alcanzar el grado de convergencia que se fije.

La no linealidad de las características hidrodinámicas del suelo, curva de retención de humedad  $\theta(\Psi)$  y curva de conductividad hidráulica  $K(\theta)$  ha originado que no se disponga de un criterio general de convergencia y estabilidad para la ecuación de Richards (1). Por ello, la selección del paso de tiempo y espacio, así como la convergencia de la solución numérica (13-15) se realiza de la siguiente manera:

- Se eligen una discretización espacial y un paso de tiempo inicial. En el transcurso de la simulación, la discretización espacial se mantiene fija y el paso de tiempo  $\Delta t$  se incrementa gradualmente conforme al número de iteraciones que es necesario realizar en cada paso de tiempo hasta alcanzar un máximo fijado ( $\Delta t_{\text{máx}}$ ). El criterio adoptado para variar el paso de tiempo depende de la convergencia del sistema (13-15); para una tolerancia dada, si el esquema converge en un número menor o igual a  $W_1$  iteraciones, el paso de tiempo se incrementa en, por ejemplo, 5%; si el número de iteraciones necesario para alcanzar la convergencia es mayor que  $W_2$ , donde  $W_2 > W_1$ , se reduce el paso de tiempo en, por ejemplo, 25%. El esquema numérico (13-15) se codificó en el lenguaje de programación *Borland C++5.0*.

## Aplicaciones

La evaluación de la capacidad de descripción del modelo (1-12) y del modelo basado en la condición de superficie de filtración se realiza considerando el experimento de drenaje de Zavala (2003) y la solución numérica (13-15). La información obtenida en el experimento permite aislar la estimación de los parámetros de la condición de radiación no lineal (7) de la caracterización hidrodinámica del suelo, puesto que esta última se realiza de forma independiente al evento transitorio de drenaje considerando el procedimiento sugerido por Fuentes (1992), que está basado en la porosidad del suelo, la curva granulométrica y una prueba de infiltración. El experimento consistió en saturar el suelo de un sistema de drenaje (muestra alterada de suelo de Tezoyuca, Morelos) e impedir la evacuación de agua por los drenes, dejar reposar el sistema durante un periodo de tiempo para que se estabilizara la presión del agua, cubrir la superficie del suelo para eliminar la evaporación

( $i=0$  en la ecuación 6) y destapar los drenes para medir la evolución del gasto evacuado. Las características del sistema de drenaje son las siguientes: separación entre drenes  $L=1.0$  m; profundidad del estrato impermeable a partir del dren  $D_o=0.25$  m; distancia de la superficie del suelo hasta el estrato impermeable  $P_E=1.45$  m; longitud y diámetro del dren de  $\ell=0.3$  m y  $d_d=0.05$  m.

Para modelar el experimento, es indispensable disponer de relaciones funcionales entre el contenido volumétrico de agua  $\theta$  y el potencial de presión  $\psi$ , y entre la conductividad hidráulica  $K$  y  $\theta$ . Siguiendo la recomendación de Fuentes *et al.* (1992), se usa la representación analítica de la curva de retención de van Genuchten (1980) sujeta a la restricción de Burdine (1953):

$$\theta(\psi) = \frac{\theta_s - \theta_r}{\left[1 + (\psi/\psi_d)^n\right]^m} + \theta_r \quad m = 1 - 2/n \quad \text{con } n > 2 \quad (16)$$

así como el modelo para la conductividad hidráulica de Brooks y Corey (1964):

$$K(\theta) = K_s \left( \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} \right)^\eta \quad (17)$$

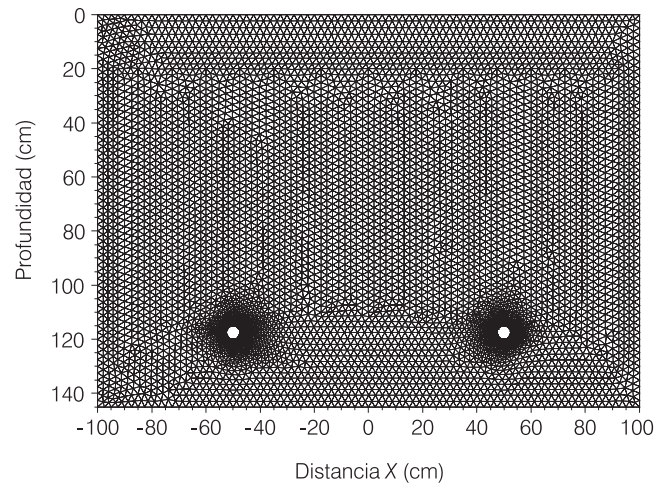
donde  $\theta_s$  es el contenido volumétrico de agua a saturación;  $\theta_r$ , el contenido volumétrico residual;  $\psi_d$ ,  $m$  y  $n$  son parámetros empíricos;  $K_s$  es la conductividad hidráulica a saturación [ $LT^{-1}$ ], y  $\eta$  es un parámetro adimensional.

Los parámetros del suelo de Tezoyuca son (Zavala, 2003):  $\theta_s=0.539$   $\text{cm}^3/\text{cm}^3$ ,  $\theta_r=0.0$   $\text{cm}^3/\text{cm}^3$ ,  $K_s=18.3$   $\text{cm}/\text{h}$ ,  $\psi_d=-41.8$   $\text{cm}$  y  $n=3.19$ .

El dominio de solución mostrado en la ilustración 2 se discretiza generando una malla de elementos finitos con el paquete comercial *Argus ONE 4.0p*. La malla generada consta de 6,757 nudos y 13,096 elementos, con espaciamientos mínimos de  $\Delta x_{\min}=\Delta z_{\min}=0.2$   $\text{cm}$ , y máximos de  $\Delta x_{\max}=\Delta z_{\max}=2.5$   $\text{cm}$  (ilustración 4). El paso de tiempo inicial usado es de  $\Delta t_{\text{ini}}=0.01$   $\text{s}$  y se incrementó hasta un máximo de  $\Delta t_{\text{máx}}=30$   $\text{s}$ . El valor máximo de  $\Delta t$  se determinó empleando el procedimiento sugerido por Saucedo *et al.* (2002).

La descripción de la evolución del tirante en el dren se realiza usando los siguientes valores:  $J=0.001$ ,  $d=0.54$  (valor que permite establecer una equivalencia entre la ecuación 9 y la ecuación de Hazen-Williams) y  $k \cong 9.83$  (estimado a partir del coeficiente de Hazen-Williams para tubos lisos de PVC). Los parámetros  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $q_o$  de la

Ilustración 4. Malla de elementos finitos.



condición de radiación no lineal (ecuación 7) se estiman aplicando un método que minimiza la diferencia entre la lámina drenada medida y la calculada con el modelo

$$\text{numérico } \ell_d(t) = L^{-1} \int_{0,\Omega} q_o (1 - \psi/P)^\alpha \left[ (\psi - h)/P \right]^\beta d\Omega dt. \text{ El}$$

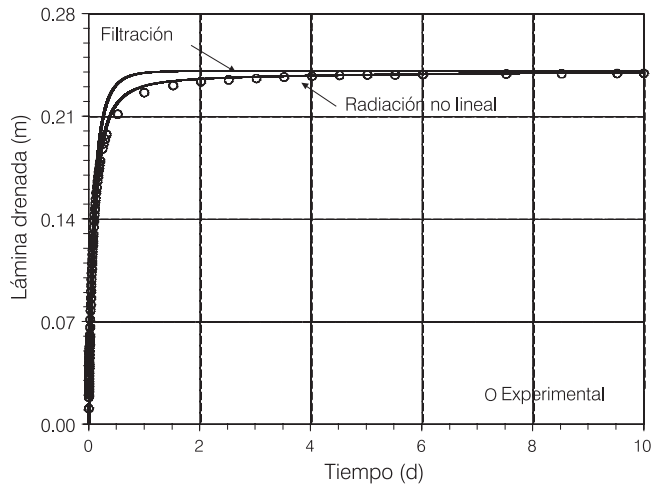
mejor acuerdo entre ambas series de valores se obtiene con  $\alpha=\beta=1.88$  y  $q_o=300K_s$ .

Los resultados de las simulaciones numéricas se muestran en las ilustraciones 5, 6 y 7. En la ilustración 5 se comparan los resultados experimentales con los obtenidos tanto con la condición de radiación no lineal como con la condición de superficie de filtración. La mejor aproximación a los datos medidos se obtiene cuando se impone en el dren la condición de radiación no lineal; la raíz del error cuadrático medio es r.e.c.m  $\cong 0.48$   $\text{cm}$ . La evidencia experimental permite mostrar que la condición de filtración sobrestima el gasto de drenaje (ilustración 5) y, en consecuencia, el abatimiento del manto freático (ilustración 6) debido a que esta condición de frontera supone que la resistencia en la interfaz suelo saturado-dren es nula. Esta hipótesis puede eliminarse sujetando la ecuación de Richards en la frontera del dren a la condición de radiación no lineal (7). En la ilustración 7 se muestra la evolución del tirante en el dren descrito con el sistema (1-12).

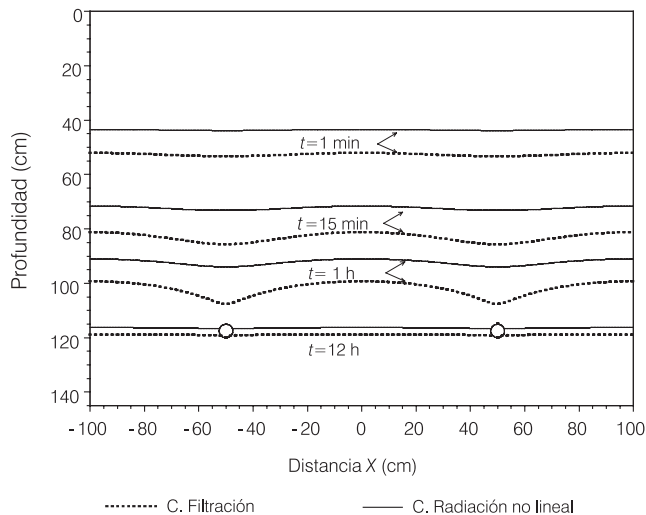
## Conclusiones

Se ha presentado una aproximación mecanicista para modelar el funcionamiento hidráulico de un sistema de drenaje agrícola subterráneo, que consiste en acoplar la ecuación de Richards bidimensional para el flujo

**Ilustración 5. Comparación de la lámina drenada experimental con las láminas drenadas calculadas con la radiación no lineal (r.e.c.m  $\cong$  0.48 cm) y con la condición de superficie de filtración (r.e.c.m  $\cong$  0.95 cm).**

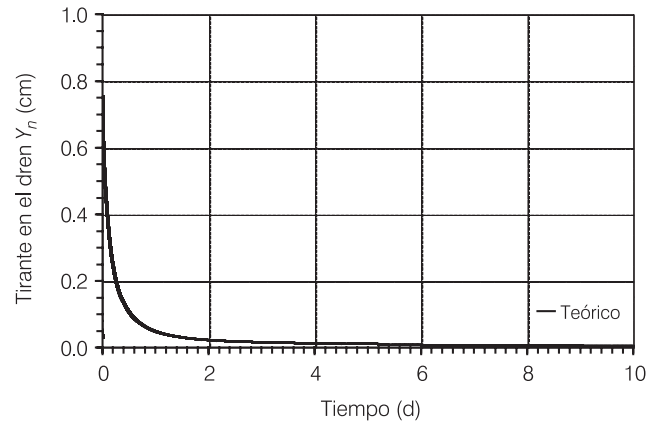


**Ilustración 6. Evolución de la superficie libre.**



de agua en el suelo con la ecuación de continuidad y una ley de resistencia para el flujo de agua en el dren. Este acoplamiento se ha realizado imponiendo en el perímetro de los drenes la condición de radiación no lineal de Zavala *et al.* (2003). Haciendo uso de evidencia experimental, se ha evaluado la capacidad de descripción tanto del modelo basado en la condición de radiación no lineal como del modelo clásico reportado en la literatura que impone en los drenes una condición de superficie de filtración. A partir de la comparación con datos experimentales, se ha mostrado que la condición

**Ilustración 7. Evolución del tirante en el dren descrita con el sistema (1-12).**



de superficie de filtración sobrestima el gasto de drenaje y el abatimiento de la superficie libre debido a que supone nula la resistencia en la interfaz suelo saturado-dren. La validación experimental ha permitido mostrar que la descripción de las transferencias de masa y energía que se desarrollan en un sistema de drenaje agrícola subterráneo durante la recesión del manto freático debe realizarse imponiendo en los drenes la condición de radiación no lineal.

Recibido: 21/07/2004  
Aprobado: 06/10/2004

## Referencias

- AHMAD, S., KASHYAP, D. y MATHUR, B.S. Mathematical modeling of saturated-unsaturated flow to drains. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*. Vol. 119, núm. 1, 1993, pp. 18-33.
- BROOKS, R.H. y COREY, A.T. Hydraulic properties of porous media. *Hydrol. Pap. 3*. Colorado State University, Fort Collins, 1964.
- BURDINE, N.T. *Relative permeability calculation from size distribution data*. Pet. Trans. AIME. Vol. 198, 1953, pp. 71-78.
- CHOW, V.T. *Hidráulica de los canales abiertos*. México: Diana, 1982, 633 p.
- COOLEY, R.L. Some new procedures for numerical solution of variably saturated flow problems. *Water Resources Research*. Vol. 19, núm. 5, 1983, pp. 1271-1285.
- FIPPS G., SKAGGS, R.W. y NIEBER, W. Drains as a boundary condition in finite elements. *Water Resources Research*. Vol. 22, núm. 11, 1986, pp. 1613-1621.



- FUENTES, C., HAVERKAMP, R. y PARLANGE, J.-Y. Parameter constraints on closed-form soil-water relationships. *Journal of Hydrology*. Vol.134, 1992, pp. 117-142.
- FUENTES, C. *Approche fractale des transferts hydriques dans les sols non saturés*. Tesis de Doctorado de la Universidad Joseph Fourier de Grenoble, 1992, 267 pp.
- FUENTES, C., DE LEÓN, B., SAUCEDO, H., PARLANGE, J.-Y. y ANTONINO, A.C.D. El sistema de Saint-Venant y Richards en el riego por gravedad: Ley potencial de resistencia hidráulica. *Ingeniería hidráulica en México*. Vol. 19, núm. 2, 2004, pp. 65-75.
- HUYAKORN, P.S., SPRINGER, E.P., GUVANASEN, V. y WADSWORTH, T.D. A three-dimensional finite element model for simulating water flow in variably saturated porous media. *Water Resources Research*. Vol. 22, núm. 13, 1986, pp. 1790-1808.
- KOHLER, A., ABBASPOUR, K.C., FRITSCH, M., VAN GENUCHTEN, M.Th. y SCHULIN, R. Simulating unsaturated flow and transport in a macroporous soil to tile drains subject to an entrance head: model development and preliminary evaluation. *Journal of Hydrology*. Vol. 254, 2001, pp. 67-81.
- MERVA, G.E., SEGERLIND, L., MURASE, H. y FAUSEY, M.R. Finite element modelling for depth and spacing of drains in layered soils. *Trans. of ASAE*. Vol. 26, núm. 2, 1983, pp. 452-456.
- MORI, M. *The finite element method and its applications*. Nueva York: Macmillan, 1983, 188 pp.
- NEUMAN, S.P. Saturated-unsaturated seepage by finite elements. *Journal of Hydraulic Division, ASCE, HY12, Pap.* Vol. 10201, 1973, pp. 2233-2250.
- NOOR, A. y PETERS, J.M. Preconditioned conjugated gradient technique for the analysis of symmetric structures. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*. Vol. 24, 1987, pp. 2057-2070.
- RICHARDS, L.A. Capillary conduction of liquids through porous mediums. *Physics*. Vol.1, 1931, pp. 318-333.
- SAUCEDO, H., FUENTES, C., ZAVALA, M. y VAUCLIN, M. Una solución de elemento finito para la transferencia de agua en un sistema de drenaje agrícola subterráneo. *Ingeniería hidráulica en México*. Vol. 17, núm. 1, 2002, pp. 93-105.
- VAN GENUCHTEN, M.Th. A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of the unsaturated soils. *Soil Sci. Soc. Amer. J.* Vol. 44, 1980, pp. 892-898.
- ZARADNY, H. y FEDDES, R.A. Calculation of non-steady flow towards a drain in saturated-unsaturated soil by finite elements. *Agricultural Water Management*. Vol. 1, núm 2, 1979, pp. 37-53.
- ZAVALA, M. *Sobre la condición de radiación no lineal en el drenaje agrícola subterráneo*. Tesis de Doctorado por la Universidad Nacional Autónoma de México, 2003, 162 pp.
- ZAVALA, M., FUENTES, C. y SAUCEDO, H. Sobre la condición de radiación en el drenaje de una columna de suelo inicialmente saturado. *Ingeniería hidráulica en México*. Vol. 8, núm. 2, 2003, pp. 121-131.

### Abstract

ZAVALA, M., FUENTES, C., SAUCEDO, H. *Non-linear radiation for bidimensional Richards equation in subsurface agricultural drainage*. Hydraulic engineering in Mexico (in Spanish). Vol. XX, no. 4, October-December, 2005, pp. 111-119.

A mechanistic approach is presented to simulate the hydraulic operation of a subsurface agricultural drainage system that consists in numerically coupling the bidimensional Richards equation for the water flow in the soil with the continuity equation and a resistance law for the water flow in the drain. This coupling is made by imposing a non-linear radiation condition on the drain perimeter (Zavala et al., 2003). By using experimental data, the description capacity of both the non-linear radiation condition and the classical approximation reported in the literature as seepage-face condition is evaluated. By comparison with experimental information, it is shown that the seepage-face condition overestimates drainage flow and the recession of the water table, due to the fact that it assumes a null resistance in the saturated soil-drain interface. The experimental validation allows to conclude that the description of mass and energy transferences in an agricultural subsurface drainage system during the recession of the water table must be made by imposing the non-linear radiation condition in the circumference of the drain.

**Keywords:** continuity equation, resistance law, soil-drain interface, water flow in the soil.

### Dirección institucional de los autores:

*Dr. Manuel Zavala  
Dr. Carlos Fuentes  
Dr. Heber Saucedo*

Instituto Mexicano de Tecnología del Agua,  
Paseo Cuauhnáhuac 8532, Progreso,  
Jiutepec, Morelos, México, C.P. 62550,  
teléfono: +(52) (777) 329 3600,  
mzavala@tlaloc.imta.mx,  
cfuentes@tlaloc.imta.mx,  
hsaucedo@tlaloc.imta.mx