

Artículo publicado en el Repositorio Institucional del IMTA

<i>Título</i>	Escalamiento de la ecuación de Burgers.
<i>Autor / Adscripción</i>	<p>Álvaro A. Aldama Consultor independiente</p> <p>Miguel Á. Mejía Instituto Mexicano de Tecnología del Agua</p> <p>Roger Beckie University of British Columbia, Canadá</p>
<i>Publicación</i>	Ingeniería Hidráulica en México, 24(4): 55-64
<i>Fecha de publicación</i>	2009
<i>Resumen</i>	<p>El flujo viscoso con altos números de Reynolds, gobernado por las ecuaciones de Navier-Stokes, exhibe significativa variabilidad espacial y temporal. Dado que las ecuaciones dinámicas que gobiernan estos procesos incluyen términos no lineales, es común que se desarrolle un amplio espectro de escalas. En este trabajo se desarrolla un modelo de escala grande filtrando espacialmente la ecuación de Burgers, que constituye la contraparte unidimensional de las ecuaciones de Navier-Stokes. El empleo del filtro de Butterworth permite la construcción de cerraduras exactas. La solución numérica de estas ecuaciones filtradas se conoce como simulaciones de remolinos grandes (large-eddy simulations).</p>
<i>Identificador</i>	http://hdl.handle.net/123456789/808

Escalamiento de la ecuación de Burgers

Álvaro A. Aldama

Consultor independiente

Miguel Á. Mejía

Instituto Mexicano de Tecnología del Agua

Roger Beckie

University of British Columbia, Canadá

El flujo viscoso con altos números de Reynolds, gobernado por las ecuaciones de Navier-Stokes, exhibe significativa variabilidad espacial y temporal. Dado que las ecuaciones dinámicas que gobiernan estos procesos incluyen términos no lineales, es común que se desarrolle un amplio espectro de escalas. Por lo mismo, hay escalas demasiado pequeñas para ser resueltas mediante un modelo o para ser observadas con los aparatos convencionales de medición. Aun cuando no es posible desarrollar modelos que resuelvan todas las escalas significantes, sí es posible desarrollar modelos de la dinámica de las escalas grandes. Estos modelos de escala grande no requieren la descripción explícita de las pequeñas, pero sí deben incluir el efecto de las pequeñas en la dinámica de las grandes. Este proceso se conoce como escalamiento dinámico y es un problema muy complejo, debido a que involucra la solución de un problema de cerradura. En este trabajo se desarrolla un modelo de escala grande filtrando espacialmente la ecuación de Burgers, que constituye la contraparte unidimensional de las ecuaciones de Navier-Stokes. El empleo del filtro de Butterworth permite la construcción de cerraduras exactas. La solución numérica de estas ecuaciones filtradas se conoce como simulaciones de remolinos grandes (large-eddy simulations). En el documento se incluyen pruebas numéricas que validan los resultados teóricos.

Palabras clave: ecuación de Burgers, escalas grandes, filtro de Butterworth, filtro espacial.

Introducción

El flujo viscoso con altos números de Reynolds exhibe significativa variabilidad espacial y temporal. Debido a que las ecuaciones dinámicas que gobiernan estos procesos incluyen términos no lineales, es común que se desarrolle un amplio espectro de escalas.

Dado que las ecuaciones que representan estos procesos por lo general se solucionan numéricamente, se debe introducir una discretización espacial. Para poder resolver todo el espectro de escalas sería necesario el uso de mallas extremadamente refinadas,

las cuales demandarían cargas computacionales excesivas. Pero incluso si fuera posible remover las limitaciones computacionales, sería prácticamente imposible obtener la información asociada con las escalas pequeñas del flujo. Por lo tanto, es de interés práctico desarrollar modelos de las escalas grandes que están presentes en las variables del flujo. El proceso de transformar una ecuación que tiene todas las escalas significantes en una que gobierna el comportamiento de las escalas grandes es comúnmente conocido como *escalamiento* (*upscaling* en inglés). Las ecuaciones escaladas no deberían contener la dinámica de las

escalas pequeñas explícitamente, sino solamente el efecto que las pequeñas producen en la dinámica de las grandes. La naturaleza no lineal de los procesos de flujo y transporte implica que cuando se intenta determinar este efecto surja un problema de cerradura.

Una de las principales líneas que se ha seguido para abordar el problema del escalamiento es conocida como "Modelación de Turbulencia Convencional". El propósito de este enfoque es cerrar las ecuaciones de Reynolds introduciendo hipótesis basadas en observaciones de campo y características físicas del problema en cuestión. Así, las ecuaciones de los modelos contienen un número de constantes empíricas, las cuales, en general, se incrementan con el grado de complejidad. En otras palabras, el objetivo de este tipo de procedimientos es encontrar, usando una metodología fenomenológica, adecuadas relaciones constitutivas (Lumley, 1970). Se han presentado excelentes revisiones de este tema en varios trabajos, entre ellos el escrito por Rodi (2000), Launder y Spalding (1972), y el editado por Bradshaw (1978). El problema con este enfoque es que para lograr una completa cerradura, los modelos requieren un gran número de constantes empíricas. Rodi (2000) presenta en su monografía un modelo con 16 constantes. Otro problema con este enfoque es que la definición de "flujo medio" y "fluctuaciones" es totalmente arbitraria, en el sentido de que estos conceptos no están relacionados con las escalas del flujo.

El primer autor de este artículo y sus colaboradores han estado trabajando en el desarrollo de un enfoque alterno al problema de escalamiento, que lo aborda directamente, sin requerir el uso de ensamblajes promedio, ni de modelos fenomenológicos (Aldama, 1992; Beckie *et al.*, 1996a; Beckie *et al.*, 1996b). Dicho enfoque se basa en el uso de filtros espaciales. En este trabajo se presenta un escalamiento de la ecuación primitiva de Burgers por medio de un filtrado espacial y se introduce la familia de filtros de Butterworth que se utiliza en el análisis de señales digitales (Stearns, 1975). En particular, se emplea el filtro de Butterworth de primer orden, que permite resolver el problema de cerradura en forma exacta.

La ecuación de Burgers es una analogía unidimensional de las ecuaciones de Navier-Stokes, ya que comparten muchas características importantes. Sin embargo, en contraste con la ecuación de Navier-Stokes, sí es posible simular numéricamente el rango completo de escalas dinámicas que se desarrollan en la ecuación de Burgers. De esta manera se pueden comparar las simulaciones de remolinos grandes con las simulaciones primitivas "exactas". Mediante experimentos numéricos se realizaron pruebas para validar la aplicación de

la teoría presentada. Se utilizó un método numérico espectral de Fourier para resolver numéricamente las ecuaciones de escala grande.

Escalamiento dinámico y metodología de filtrado

El primer paso para aplicar la técnica de filtrado al modelo de turbulencia de Burgers consiste en derivar ecuaciones de escala grande para los componentes de la velocidad. La naturaleza no lineal de la ecuación de Burgers implica que existe un rango continuo de diferentes tamaños de remolinos, y que consecuentemente no hay una división natural del flujo en remolinos grandes y pequeños. Lo mismo aplica para las ecuaciones de Navier-Stokes cuando el flujo es turbulento.

Ecuación de movimiento

La metodología se desarrollará para un flujo de Burgers sin forzamiento, gobernado por la ecuación siguiente:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial U^2}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (1)$$

donde U representa la componente de velocidad instantánea; ν , la viscosidad cinemática del fluido; x , la coordenada espacial, y t es el tiempo.

Metodología de filtrado espacial

En el marco de un método de filtrado espacial, los componentes de "escala grande" (eg) de una función $F=F(x)$, son definidos por la siguiente operación de convolución (Aldama, 1990 y 1992):

$$\bar{F}(x;\lambda) = \int G(x-x';\lambda)F(x')dx' \quad (2)$$

donde, a partir de ahora, la barra superior representa la operación de filtrado dada por (2), G es una función de filtrado y $\lambda > 0$ es un parámetro que modula el efecto de dicha función, comúnmente referido como el "ancho del filtro". La función G que aparece en (2) posee las siguientes propiedades:

$$\int G(x;\lambda)dx = 1 \quad (3)$$

$$\lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} \frac{\partial^\alpha G}{\partial x^\alpha} = 0 \quad \forall \alpha \quad (4)$$

$$\lim_{|k| \rightarrow \infty} \hat{G} = 0 \quad (5)$$

donde α es un número entero no negativo; \hat{G} representa la transformada espacial de Fourier de G , por lo que dichas funciones constituyen el siguiente par de Fourier:

$$\hat{G}(k;\lambda) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} G(x;\lambda) e^{-ikx} dx \quad (6)$$

$$G(x;\lambda) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{G}(k;\lambda) e^{ikx} dx \quad (7)$$

donde k representa el número de onda.

La propiedad (3) implica que G preserva la media y la propiedad (4) es necesaria para demostrar que la operación de filtrado conmuta con derivadas espaciales de orden arbitrario. La implicación de la propiedad (5), así como la importancia de la operación de filtrado se comprende mejor en el espacio de Fourier.

Transformando la ecuación (2) al espacio de Fourier, se obtiene:

$$\hat{F}(k;\lambda) = \hat{G}(k;\lambda) \hat{F}(k;\lambda) \quad (8)$$

donde, a partir de este punto, el circunflejo denota transformada espacial de Fourier.

Entonces, la propiedad (5) implica que los componentes de número de onda altos de \hat{F} , que por naturaleza son altamente fluctuantes, son eliminadas (gradualmente si \hat{G} posee un soporte no compacto, o totalmente si \hat{G} posee un soporte compacto) a través de la operación de filtrado.

El problema de cerradura y localización

Filtrando la ecuación de Burgers (1) espacialmente, y tomando en cuenta el hecho de que, gracias a la propiedad (4), la operación de filtrado conmuta con las derivadas espaciales, se obtiene la siguiente ecuación de escala grande:

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{U}\bar{U}}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x^2} \quad (9)$$

Es conveniente expresar la velocidad en términos de sus componentes de escala grande (*eg*), denotadas con sobrebarra y definidas a través de la operación de filtrado (2), y de escala pequeña (*ep*), denotadas por medio de letras minúsculas, como sigue:

$$U = \bar{U} + u \quad (10)$$

La ecuación (10) de hecho constituye la definición de la componente de *ep*, u .

Substituyendo la expresión (10) en el término advectivo, $\bar{U}\bar{U}$, de la ecuación (9) se obtiene:

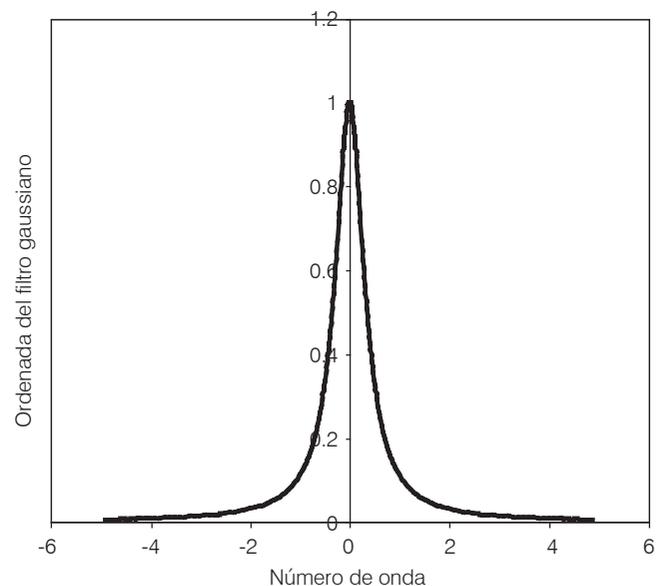
$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial (\bar{U}\bar{U} + \bar{U}u + u\bar{U} + uu)}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x^2} \quad (11)$$

donde $\bar{U}\bar{U}$ representa la interacción *eg-eg* (escala grande-escala grande), $\bar{U}u$ y $u\bar{U}$ la interacción *eg-ep* (escala grande-escala pequeña), y uu la interacción *ep-ep* (escala pequeña-escala pequeña). El problema de cerradura se muestra claramente en la expresión (11), que representa la ecuación de Burgers escalada. Los términos de interacción *eg-ep* y *ep-ep* contienen variables de escala pequeña. Para cerrar la ecuación es necesario expresar estos términos exclusivamente en términos de variables de escalas grandes. También es necesario que los términos de interacción *eg-eg* se expresen localmente, debido a que, en vista de la definición de la operación de filtrado a través de la expresión (2), su naturaleza da a la ecuación (11) un carácter integrodiferencial.

Metodología de filtrado espacial gaussiano

Aldama (1992) y Beckie *et al.* (1996a y 1996b) han empleado un filtro gaussiano, que en el espacio de Fourier tiene la forma (ilustración 1):

Ilustración 1. Filtro gaussiano en el espacio de Fourier.



$$\hat{G}(k) = \hat{G}_G(k) = \exp\left(-\frac{\lambda^2 k^2}{24}\right) \quad (12)$$

donde λ es el ancho de filtro. Una expansión en serie de Taylor de \hat{G}_G resulta en:

$$\hat{G}_G(k) = 1 - \frac{\lambda^2 k^2}{24} + \frac{\lambda^4 k^4}{576} + O(\lambda^6) \quad (13)$$

Substituyendo (13) en (8), empleando el resultado de (11) y usando el teorema de diferenciación de Fourier, se obtiene la ecuación de Burgers de escala grande localizada (Aldama y Beckie, 1996):

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} = v \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \bar{U}^2 + \frac{\lambda^2}{12} \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \frac{\lambda^4}{288 \gamma^2} \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x^2} \right\} + O(\lambda^6) \quad (14)$$

Mientras que el ancho de filtro, λ , sea mucho más pequeño que la escala de longitud dominante en las variables de eg, se esperaría que los términos de $O(\lambda^6)$ fueran despreciables en la ecuación (14). Por tanto, una vez que esos términos se hubieren despreciado, se esperaría que la tasa de convergencia de la norma del error de la solución de la ecuación fuera de orden sexto en λ .

Aunque Aldama y Beckie (1996) obtuvieron resultados numéricos muy alentadores en la solución de las ecuaciones de escala grande de Burgers, no se obtuvo la tasa teórica de convergencia del error que se esperaba. Esto se atribuyó al hecho de que cuando la expansión (13) se trunca, lo cual es equivalente a despreciar términos proporcionales a cierta potencia de λ , la función del filtro gaussiano se aproxima mediante un polinomio en el espacio de Fourier. Este tipo de aproximaciones es muy precisa en números de onda bajos, pero se degrada significativamente en números de onda altos. De hecho, por definición, el filtro gaussiano es definido-positivo, mientras que las aproximaciones polinomiales que surgen de su expansión de Taylor no lo son. Aun más, estas aproximaciones no satisfacen la propiedad (5), dado que su magnitud no tiende a cero para $k \rightarrow \infty$. Estas observaciones llevaron a buscar alternativas a la aproximación polinomial del filtro gaussiano, que dieran una mejor solución al problema de cerradura y localización de la ecuación de escala grande (14).

La metodología de filtrado de Butterworth y la solución de problema de cerradura

La principal ventaja de aplicar una aproximación polinomial al filtro gaussiano es que, en el espacio de Fourier, la variable de eg, \hat{F} , se expresa como el producto de un polinomio de grado par en k por la variable primitiva \hat{F} . Esto permite el uso del teorema de diferenciación de Fourier cuando se invierte tal expresión. De esta manera, un término que involucra una potencia par en k multiplicado por \hat{F} se convierte, después de invertirlo, en una potencia par del operador $\partial/\partial x$ aplicado a F . Por tanto, una aproximación polinomial del filtro gaussiano en el espacio de Fourier permite expresar a F en términos de \bar{F} y de sumandos proporcionales a potencias pares del producto $\lambda \partial/\partial x$ aplicados a \bar{F} . Estos términos son presumiblemente pequeños en comparación con \bar{F} , por lo que se puede aplicar un método basado en una substitución iterada que permite la derivación de expresiones como (14). Sin embargo, como se señaló antes, la falta de propiedades como la definición-positiva y el decaimiento en el infinito en las aproximaciones polinomiales del filtro gaussiano motivó a los autores a encontrar un filtro alternativo que preservara las ventajas de dicho filtro, pero que no tuviera las desventajas de las aproximaciones polinomiales.

Los filtros que se proponen en este trabajo son los de Butterworth, los cuales están definidos por la siguiente expresión en el espacio de Fourier (Stearns, 1975):

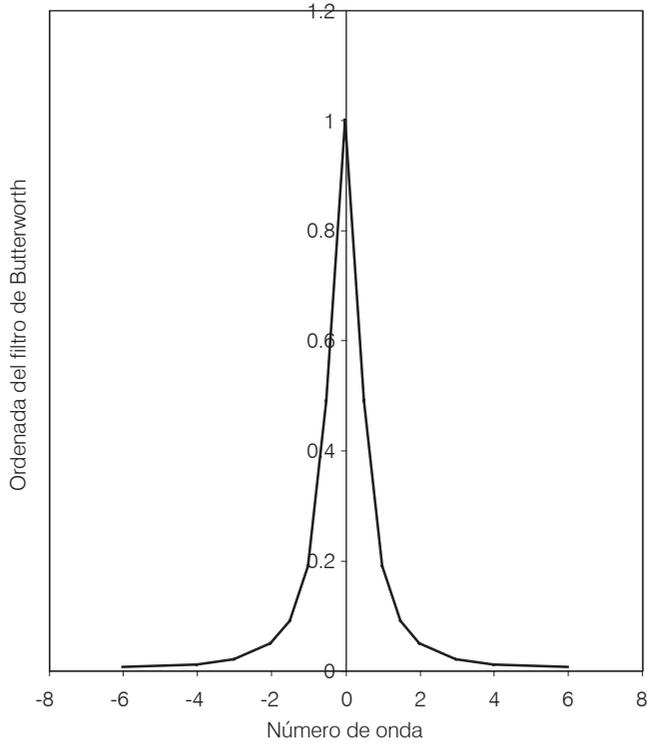
$$\hat{G}_{B,N}(k;\lambda) = \frac{1}{1 + \eta_N^2 (k/k_c)^{2N}} \quad (15)$$

donde N es un número entero que representa el orden del filtro; k_c , un número de onda de corte, y η_N es un parámetro relacionado con la tasa de decaimiento del filtro, en el sentido de que $k > k_c \Rightarrow \hat{G}_{B,N}(k) < 1/(1 + \eta_N^2)$. Como se puede observar en (15), $\hat{G}_{B,N}$ es definido-positivo. También se puede demostrar que entre más alto es el valor de N , $\hat{G}_{B,N}$ se aproxima más y más a un filtro ideal de paso bajo (Stearns, 1975). Finalmente, $\hat{G}_{B,N}$ también satisface las propiedades (3)-(5).

Hasta el momento se ha investigado el uso del miembro más simple de la familia de Butterworth, esto es, el filtro de orden uno, correspondiente a $N=1$. Asimismo, se eligió la siguiente opción para los parámetros del filtro:

$$\left(\frac{\eta_1}{k_c}\right)^2 = \frac{\lambda^2}{24} \quad (16)$$

Ilustración 2. Filtro de Butterworth en el espacio de Fourier.



De esta manera, substituyendo (16) en (15), con $N=1$, se obtiene la siguiente expresión para la función del filtro a ser aplicada de aquí en adelante (ilustración 2):

$$\hat{G}(k;\lambda) = \hat{G}_{B,1}(k;\lambda) = \frac{1}{1 + \frac{\lambda^2 k^2}{24}} \quad (17)$$

La razón para elegir la opción (16) es que la expresión que resulta para el filtro, (17) se puede considerar como la aproximación de Padé (0,2) del filtro gaussiano (12). No obstante, a partir de este momento, la expresión (17) debe ser vista como una redefinición de la función de filtrado y no como una aproximación.

Substituyendo la expresión (17) en la ecuación (8), y resolviendo para \hat{F} resulta en:

$$\hat{F} = \hat{F} + \frac{\lambda^2 k^2}{24} \hat{F} \quad (18)$$

Invirtiendo (18) se obtiene:

$$F = \bar{F} - \frac{\lambda^2}{24} \frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial x^2} \quad (19)$$

Como se puede observar, el uso de un filtro de Butterworth permite derivar un resultado más conveniente que el que se obtiene aplicando el filtro gaussiano. En efecto, (19) expresa en forma exacta una variable primitiva en términos de la variable de eg y su Laplaciano.

Empleando (19) para la velocidad se tiene:

$$U = \bar{U} - \frac{\lambda^2}{24} \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x^2} \quad (20)$$

Substituyendo (20) en (9) resulta:

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x^2} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\overline{\left(\bar{U} - \frac{\lambda^2}{24} \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x^2} \right) \left(\bar{U} - \frac{\lambda^2}{24} \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x^2} \right)} \right) \quad (21)$$

La expresión (21) representa la ecuación de Burgers de escala grande, la cual se ha cerrado *exactamente*. Sin embargo, la ecuación no es local, dado que la barra superior representa la operación de convolución. Por tanto, dicha ecuación posee un carácter integrodiferencial.

La ecuación (20) se puede resolver para \bar{U} expresándola como la suma de F y un residuo de $O(\lambda^2)$. Con base en esta observación se puede llevar a cabo el producto en (21), y los términos filtrados que resultan se pueden expresar en términos de su contraparte no filtrada más un residuo de $O(\lambda^2)$. La operación se puede repetir una y otra vez, resultando en un procedimiento de substitución iterada. Su aplicación a (21) resulta en la siguiente expresión adimensional de eg para la ecuación de Burgers, que es *localizada* (hasta los términos de $O(\lambda^4)$), *cerrada* y *exacta*:

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{t}} - \frac{1}{R_e} \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \bar{x}^2} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left\{ \bar{U}^2 + \frac{1}{12} \epsilon^2 \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{x}} \right)^2 + \epsilon^4 \left[\frac{5}{576} \left(\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \bar{x}^2} \right)^2 + \frac{1}{144} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial^3 \bar{U}}{\partial \bar{x}^3} \right] \right\} \quad (22)$$

$$\frac{\epsilon^6}{13284} \left[\frac{\partial^6 \bar{U}^2}{\partial \bar{x}^6} + 2 \frac{\partial^4}{\partial \bar{x}^4} \left(\overline{\bar{U} \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \bar{x}^2}} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2} \left(\overline{\left(\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \bar{x}^2} \right)^2} \right) \right]$$

donde $\bar{U} \equiv \bar{U}/U_0$ es la velocidad de eg adimensional, siendo U_0 la escala de velocidad dominante de la

velocidad dimensional \bar{U} ; $\bar{x} \equiv x/\Lambda$ es la coordenda espacial adimensional, siendo Λ la escala espacial dominante asociada con la velocidad dimensional de eg ; $\bar{t} \equiv U_0 t/\Lambda$ es la escala temporal dominante asociada con la velocidad dimensional de eg ; $R_e \equiv U_0 \Lambda/\nu$ es el número de Reynolds asociado con la eg de movimiento, y $\varepsilon \equiv \lambda/\Lambda$ representa la relación entre el ancho del filtro y la escala espacial dominante. Si λ se elige en forma adecuada, puede lograrse que $\varepsilon \ll 1$, con lo que la ecuación (22) puede ser resuelta por medio de una técnica perturbatoria, como se describirá más adelante.

Solución de las ecuaciones

Ecuación de Burgers primitiva

Se aborda el problema constituido por la ecuación (1) sujeta a una condición inicial $U(x,0)=f(x)$ para $x \in [0,L]$, siendo L la longitud del dominio espacial y $f(x)=f(x+L)$, y a una condición de frontera periódica $U(x,t)=U(x+L,t)$ para $t>0$.

La velocidad se aproxima con una serie de Fourier truncada de N -términos U^N , la cual satisface automáticamente la condición de frontera periódica:

$$U(x,t) \approx U^N(x,t) = \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} \hat{U}_n(t) e^{ik_n x} \quad (23)$$

donde $i = \sqrt{-1}$, $k_n = 2\pi n/L$, $n = -N/2, N/2+1, \dots, N-2, N/2-1$, siendo k_n el n -ésimo número de onda discreto; N es el número total de componentes de Fourier consideradas, y $\hat{U}_n(t)$ representa la n -ésima componente de Fourier de la velocidad instantánea.

Siguiendo el método espectral de Fourier (Canuto et al., 1987), se usa e^{-ikx} como una función de prueba o ponderación y se integra contra la ecuación (1) en el dominio para producir las siguientes ecuaciones para los componentes de Fourier de la ecuación de Burgers primitiva:

$$\frac{d\hat{U}_n}{dt} = -\nu k_n^2 \hat{U}_n - \frac{ik_n}{2} \mathfrak{K}(\hat{U}_n), \quad n = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2}-1 \quad (24)$$

donde $\mathfrak{K}(\hat{U}_n) \equiv \sum_{\ell+m=n} \hat{U}_\ell \hat{U}_m$ es la representación espectral del término no lineal.

Se usó la técnica del factor de integración (Canuto et al., 1987), en combinación con una aproximación de Euler hacia adelante, para avanzar en el tiempo (Rogallo y Moin, 1984).

Multiplicando la ecuación (24) por el factor de integración $e^{\nu k_n^2 t}$ y escribiendo el miembro izquierdo de

la ecuación resultante como una diferencial exacta, se obtiene:

$$\frac{d}{dt} \left[e^{\nu k_n^2 t} \hat{U}_n \right] = -e^{\nu k_n^2 t} \frac{ik_n}{2} \mathfrak{K}(\hat{U}_n), \quad n = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2}-1 \quad (25)$$

Realizando una aproximación de Euler explícita se obtienen las siguientes ecuaciones explícitas:

$$\hat{U}_n^{\rho+1} = -e^{-\nu k_n^2 \Delta t} \left[\hat{U}_n^\rho - \Delta t \frac{ik_n}{2} \mathfrak{K}(\hat{U}_n^\rho) \right], \quad \left\{ \begin{array}{l} n = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2}-1 \\ \rho = 0, 1, \dots \end{array} \right. \quad (26)$$

donde el superíndice indica el nivel del tiempo y Δt representa el intervalo de tiempo.

Los términos no lineales se calculan usando el método de la transformada descrito en Basdevant et al. (1986) y Canuto et al. (1987):

1. Sea $N=2/3 M$.
2. Sea $\tilde{U}_k = \hat{U}_k$ para $|k| \leq N$ y $\tilde{U}_k = 0$ para $N < |k| \leq M$.
3. Transformar \tilde{U}_k al espacio físico usando la transformada inversa discreta de Fourier.
4. Calcular la no linealidad cuadrática $w = (U^N)^2$ en cada punto $i=1, \dots, M$ del espacio físico.
5. Transformar w de regreso al espacio de Fourier usando la transformada de Fourier discreta. La regla del 2/3 se usa para evitar errores de *aliasing* que entran en el cálculo del término no lineal \mathfrak{K} de (24).

Ecuación de Burgers filtrada

Se considera ahora la solución de la ecuación (22), sujeta a una condición inicial $\tilde{U}(\bar{x},0)=\tilde{f}(\bar{x}) \equiv \tilde{f}(\bar{x})/U_0$ para $\bar{x} \in [0,L/\Lambda]$, donde evidentemente $\tilde{f}(\bar{x}) = \tilde{f}(\bar{x}+L/\Lambda)$, y a una condición de frontera periódica $\tilde{U}(\bar{x},\bar{t}) = \tilde{U}(\bar{x}+L/\Lambda,\bar{t})$ para $\bar{t}>0$. Una vez calculada \tilde{U} es posible obtener U a través de la relación $U = U_0 \tilde{U}$.

Las ecuaciones para los componentes de Fourier de la velocidad se pueden determinar transformando discretamente la ecuación de Burgers de eg (22) al espacio de Fourier:

$$\frac{d\hat{U}_n}{dt} + \frac{\tilde{k}_n^2}{Re} \hat{U}_n = -\frac{i\tilde{k}_n}{2} \left\{ \sum_{\ell+m=n} \hat{U}_\ell \hat{U}_m + \frac{\varepsilon^2}{12} \sum_{\ell+m=n} \hat{g}_\ell \hat{g}_m \right\} + \varepsilon^4 \left[\frac{5}{576} \sum_{\ell+m=n} \hat{h}_\ell \hat{h}_m + \frac{1}{144} \sum_{\ell+m=n} \hat{g}_\ell \hat{w}_m \right] + O(\varepsilon^6), \quad (27)$$

$$n = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2}-1$$

donde $\tilde{k}_n = 2\pi n\Lambda/L$ representa el n -ésimo número de onda discreto adimensional; y $\hat{U}_n(t)$, representa la n -ésima componente de Fourier de la velocidad de eg adimensional \tilde{U} , y $\hat{g}_n = i\tilde{k}_n \hat{U}_n$, $\hat{h}_n = -\tilde{k}_n^2 \hat{U}_n$ y $\hat{w}_n = -i\tilde{k}_n^3 \hat{U}_n$.

Sea:

$$G(\hat{U}_n; \varepsilon) \equiv \left\{ \sum_{\ell+m=n} \hat{U}_\ell \hat{U}_m + \frac{\varepsilon^2}{12} \sum_{\ell+m=n} \hat{g}_\ell \hat{g}_m + \varepsilon^4 \left[\frac{5}{576} \sum_{\ell+m=n} \hat{h}_\ell \hat{h}_m + \frac{1}{144} \sum_{\ell+m=n} \hat{g}_\ell \hat{w}_m \right] \right\} + O(\varepsilon^6), \quad n = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2}-1 \quad (28)$$

Substituyendo (28) en (27):

$$\frac{d\hat{U}_n}{dt} + \frac{\tilde{k}_n^2}{R_e} \hat{U}_n = -\frac{i\tilde{k}_n}{2} G(\hat{U}_n; \varepsilon), \quad n = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2}-1 \quad (29)$$

Multiplicando (29) por el factor de integración $e^{v\tilde{k}_n^2 \tilde{t}/R_e}$ y escribiendo el miembro izquierdo de la ecuación resultante como una diferencial exacta, se obtiene:

$$\frac{d}{d\tilde{t}} (\hat{U}_n e^{v\tilde{k}_n^2 \tilde{t}/R_e}) = -e^{v\tilde{k}_n^2 \tilde{t}/R_e} \frac{i\tilde{k}_n}{2} G(\hat{U}_n; \varepsilon), \quad n = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2}-1 \quad (30)$$

Utilizando el método de Euler hacia delante:

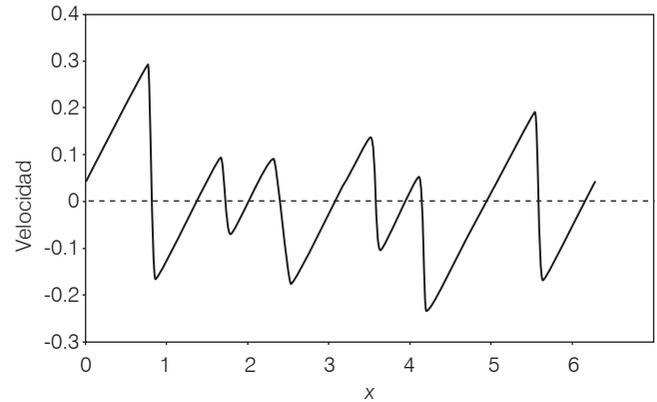
$$\hat{U}_n^{p+1} = -e^{-v\tilde{k}_n^2 \Delta \tilde{t}/R_e} \left[\hat{U}_n^p + \Delta t \frac{i\tilde{k}_n}{2} G(\hat{U}_n^p; \varepsilon) \right], \quad \begin{cases} n = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2}-1 \\ p = 0, 1, \dots \end{cases} \quad (31)$$

Considérese una expansión perturbatoria de la forma:

$$\hat{U}_n^{p+1} = [\hat{U}_n^{p+1}]_0 + \varepsilon^2 [\hat{U}_n^{p+1}]_1 + \varepsilon^4 [\hat{U}_n^{p+1}]_2 + O(\varepsilon^6) \quad (32)$$

Substituyendo (32) en (31) e igualando potencias de ε^2 , se obtiene la siguiente solución de orden cero, así como las correcciones de orden uno y dos (todas ellas en ε^2):

Ilustración 3. Velocidad exacta.



Orden cero:

$$[\hat{U}_n^{\rho+1}]_0 = -e^{-v\tilde{k}_n^2 \Delta \tilde{t}/R_e} \left\{ [\hat{U}_n^\rho]_0 + \Delta t \frac{i\tilde{k}_n}{2} \sum_{\ell+m=n} [\hat{U}_\ell^\rho]_0 [\hat{U}_m^\rho]_0 \right\}, \quad \begin{cases} n = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2}-1 \\ \rho = 0, 1, \dots \end{cases} \quad (33)$$

Corrección de orden uno:

$$[\hat{U}_n^{\rho+1}]_1 = -e^{-v\tilde{k}_n^2 \Delta \tilde{t}/R_e} \left\{ [\hat{U}_n^\rho]_1 + \Delta t \frac{i\tilde{k}_n}{2} \left(2 \sum_{\ell+m=n} [\hat{U}_\ell^\rho]_0 [\hat{U}_m^\rho]_1 + \frac{1}{12} \sum_{\ell+m=n} [\hat{g}_\ell^\rho]_0 [\hat{g}_m^\rho]_0 \right) \right\}, \quad \begin{cases} n = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2}-1 \\ \rho = 0, 1, \dots \end{cases} \quad (34)$$

Corrección de orden dos:

$$[\hat{U}_n^{\rho+1}]_2 = -e^{-v\tilde{k}_n^2 \Delta \tilde{t}/R_e} \left\{ [\hat{U}_n^\rho]_2 + \Delta t \frac{i\tilde{k}_n}{2} \left(2 \sum_{\ell+m=n} [\hat{U}_\ell^\rho]_0 [\hat{U}_m^\rho]_2 + \sum_{\ell+m=n} [\hat{U}_\ell^\rho]_1 [\hat{U}_m^\rho]_1 + \frac{1}{6} \sum_{\ell+m=n} [\hat{g}_\ell^\rho]_0 [\hat{g}_m^\rho]_1 + \frac{1}{576} \sum_{\ell+m=n} [\hat{h}_\ell^\rho]_0 [\hat{h}_m^\rho]_0 + \frac{1}{144} \sum_{\ell+m=n} [\hat{g}_\ell^\rho]_0 [\hat{w}_m^\rho]_0 \right) \right\}, \quad \begin{cases} n = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2}-1 \\ \rho = 0, 1, \dots \end{cases} \quad (35)$$

En las ecuaciones (34) y (35), según sea aplicable, $[\hat{g}_n^\rho]_q = i\tilde{k}_n [\hat{U}_n^\rho]_q$ para $q=0, 1$, y $[\hat{h}_n^\rho]_0 = -\tilde{k}_n^2 [\hat{U}_n^\rho]_0$ y $[\hat{w}_n^\rho]_0 = -i\tilde{k}_n^3 [\hat{U}_n^\rho]_0$.

Ilustración 4. Velocidad aproximada de orden cero.

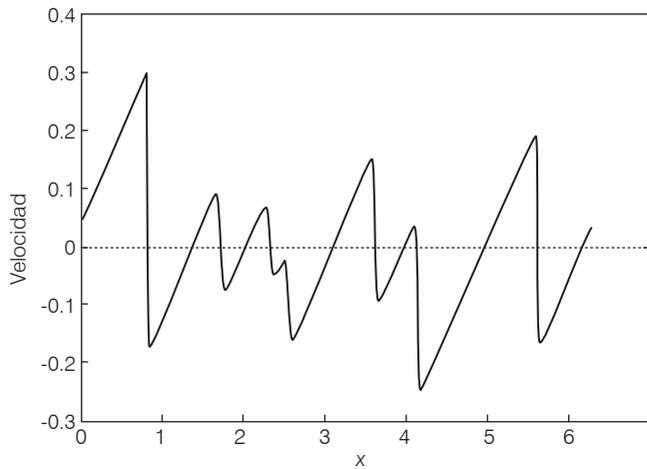


Ilustración 5. Velocidad exacta (línea sólida) y aproximada de orden cero (línea punteada).

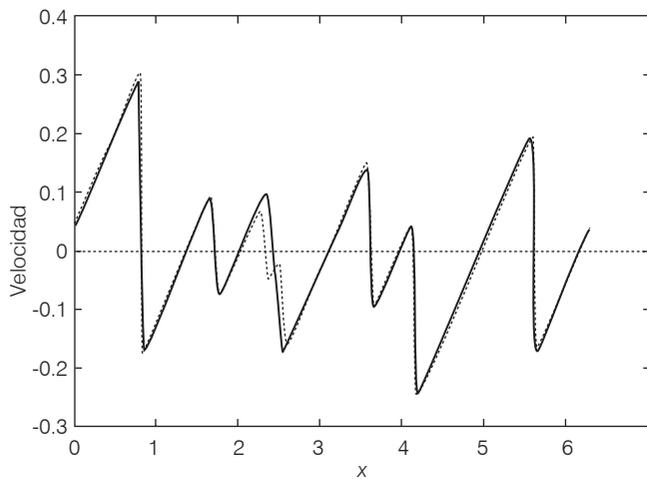


Ilustración 6. Velocidad exacta (línea sólida) y aproximada de orden dos (línea punteada).

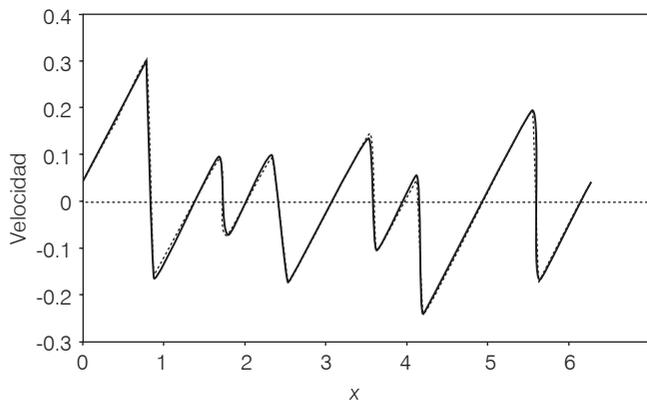
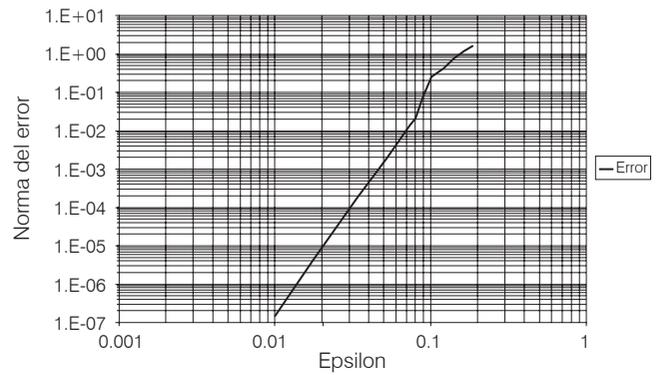


Ilustración 7. Tasa de convergencia de la norma ℓ_2 del error.



Validación

Ecuación primitiva

Para evaluar la teoría que se presenta, se simuló un flujo que decae libremente. Empleando el método descrito en Aldama (1990), se generaron condiciones iniciales aleatorias con una densidad espectral dada por:

$$S(k) = Ak^4 \exp(-\sigma^2 k^2/2) \quad (36)$$

donde A y σ son parámetros de amplitud y longitud, espectralmente. Estas condiciones iniciales producen un flujo con una escala de longitud dominante $\Lambda = \pi\sigma$.

Las simulaciones se realizaron en un dominio $[0, 2\pi]$. La velocidad característica se fija en $U_0 = 1$, la escala de longitud dominante se fija en $\Lambda = \pi/6$, y el tiempo característico en $\Lambda/U_0 = \pi/6$.

La ilustración 3 muestra un perfil de velocidad con un número de Reynolds de 325 y un tiempo de 6 s. El perfil se calculó resolviendo la ecuación de Burgers primitiva, con el método numérico espectral de Fourier descrito anteriormente, con un número de modos igual a 3 600, el cual es suficientemente grande como para generar una solución "verdadera".

En la ilustración 3 se pueden observar dos longitudes características: una escala de longitud macroscópica, asociada con los modos que contienen la energía, y una escala de longitud microscópica, el ancho de los frentes de choque, la cual se asocia con los procesos de disipación. Ambas longitudes varían conforme evoluciona el tiempo. Como puede observarse, existe la tendencia de los campos de flujo gobernados por la ecuación de Burgers a organizarse en regiones de variación suave de los gradientes de velocidad, separadas por regiones aisladas de gradientes de velocidad muy fuertes (ondas de choque). Debido a esto se forma el clásico perfil en forma de dientes de serrucho.

Ecuación filtrada

La ecuación de Burgers involucra un proceso en el cual la energía se transfiere de los números de onda bajos (escalas grandes) a los números de onda altos (escalas pequeñas), donde la energía se disipa por fuerzas viscosas. Esto quiere decir que si no se toman en cuenta las escalas pequeñas, no existe mecanismo para disipar la energía. Este efecto se manifiesta como pequeñas ondas o perturbaciones a lo largo de la onda de choque principal.

En la ilustración 4 se presenta el perfil de velocidad que se obtuvo de la solución de la ecuación de Burgers filtrada de orden cero (33), con 360 modos de Fourier (una décima parte de los modos de la solución exacta). De (22) es evidente que la ecuación que satisface la solución de orden cero coincide con la ecuación de Burgers primitiva o instantánea. Como se puede observar, este perfil presenta perturbaciones, las cuales no están presentes en la solución exacta. Aún más, se desvía considerablemente alrededor de $x=2.3$ (ilustración 5). Lo anterior es indicativo de que 360 modos de Fourier no son suficientes para resolver numéricamente los choques, lo que, en términos físicos, significa que las escalas más pequeñas que se capturan con ese número de modos no son capaces de realizar el proceso de disipación en forma adecuada. A continuación se describe el efecto que tiene incluir los términos de $O(\varepsilon^2)$ y de $O(\varepsilon^4)$ que aparecen en la ecuación (22).

En la ilustración 6 se presenta el perfil de velocidad exacto y el que se obtuvo de la solución de la ecuación de Burgers filtrada de orden dos calculada como sigue:

$$\hat{U}_n^{p+1,(2)} = [\hat{U}_n^{p+1}]_0 + \varepsilon^2 [\hat{U}_n^{p+1}]_1 + \varepsilon^4 [\hat{U}_n^{p+1}]_2 \quad (37)$$

Dicha solución se construyó con 360 modos de Fourier y $\varepsilon=0.07$. Como se puede apreciar, a pesar de que el número de modos que se utilizó es solamente una décima parte de los que se usaron para la solución exacta, ambas soluciones son prácticamente iguales. Asimismo, esta solución no presenta perturbaciones a lo largo de la onda de choque, lo cual significa que está tomando en cuenta el efecto disipativo de las escalas pequeñas. Lo anterior significa que los términos de $O(\varepsilon^2)$ y de $O(\varepsilon^4)$ que aparecen en la ecuación (22) llevan a cabo la disipación de energía en forma adecuada.

La norma ℓ_2 del error se obtuvo para diferentes valores de ε . De acuerdo con los argumentos teóricos que se presentaron anteriormente, se espera una tasa de convergencia de orden sexto para la solución del orden dos. En la ilustración 7 se muestra la tasa de convergencia, la cual confirma la expectativa teórica.

Conclusiones

Se presentó una metodología de filtrado para simular procesos de escala grande en flujos de Burgers, la cual se puede aplicar a problemas que exhiben no linealidades y está basada en el uso de filtros de Butterworth. Estos filtros permiten la derivación de cerraduras exactas. Se definieron rigurosamente las escalas grandes por medio de filtros espaciales y se derivaron aproximaciones locales usando expansiones asintóticas.

Asimismo, se presentó una estrategia de perturbación espectral de Fourier para resolver la ecuación de Burgers filtrada y se realizaron simulaciones sobre un amplio rango de anchos de filtro para investigar las propiedades de convergencia y precisión de las aproximaciones. Las pruebas numéricas que se hicieron con el flujo de Burgers para validar la teoría muestran resultados muy prometedores. La teoría presentada podría ser extendida al caso de turbulencia de Navier-Stokes.

Recibido: 28/07/2008
Aprobado: 27/02/2009

Referencias

- ALDAMA, A. *Filtering techniques for turbulent flow simulation*. Berlin: Springer-Verlag, 1990, 397 pp.
- ALDAMA, A. A subgrid scale theory for physical processes with quadratic nonlinearities: an a priori test for Burgers' flow. *Proc. IX Int. Conf. Comp. Meth. Water Res.* Vol. 2. Southampton: Comp. Mech. Publications, 1992, pp. 91-98.
- ALDAMA, A. and BECKIE, R. A posteriori investigation of a spatial-filtering-based closure applied to Burgers equation using a Fourier spectral numerical method. *Comp. Meth. Water Res.* XI. Vol. 2, 1996, pp. 109-116.
- BASDEVANT, C., DEVILLE, M., HALDENWANG, P., LACROIX, J.M., OUZZANI, J., PEYRET, R., ORLANDI, P. and PATERA, A.T. Spectral and finite difference solutions of Burgers equation. *Comp. and Fluids*. Vol. 14, 1986, pp. 23-41.
- BECKIE, R., ALDAMA, A. and WOOD, E. Modeling the large-scale dynamics of saturated groundwater flow using spatial-filtering theory: 1. Theoretical development. *Water Resources Res.* Vol. 22, 1996a, pp. 1269-1280.
- BECKIE, R., ALDAMA, A. and WOOD, E. Modeling the large-scale dynamics of saturated groundwater flow using spatial-filtering theory: 2. Numerical evaluation. *Water Resources Res.* Vol. 22, 1996b, pp. 1281-1288.
- BRADSHAW, P. (editor). *Turbulence*. Berlin: Springer-Verlag, 1978.

CANUTO, C., HUSSAINI, M.Y., QUARTERONI, A. and ZANG, T.A. *Spectral methods in fluid dynamics*. Springer series in computational physics. New York-Heidelberg-Berlin: Springer-Verlag, 1987.

LAUNDER, B.E. and SPALDING, D.B. *Mathematical Models of Turbulence*. London: Academic Press, 1972.

LUMLEY, J.L. Towards a turbulent constitutive relation. *J. Fluid*

Mech. Vol. 41, 1970, pp. 413-434.

RODI, W. *Turbulence Models and their Application in Hydraulics*. Rotterdam: A.A. Balkema Publishers, 2000.

ROGALLO, R.S. and MOIN, P. Numerical simulation of turbulent flows. *Ann. Rev. Fluid Mech.* Vol. 16, 1984, pp. 99-137.

STEARNS, S. *Digital signal analysis*. Rochelle Park: Hayden, 1975, 280 pp.

Abstract

ALDAMA, A.A., MEJÍA, M.A. & BECKIE, R. *Upscaling of Burgers equation*. Hydraulic engineering in Mexico (in Spanish). Vol. XXIV, no. 4, October-December, 2009, pp. 55-64.

The great range of eddy sizes in a high Reynolds number flow means that for such flows it is and may always be impossible to compute the detailed motions of all length scales. The numerical simulation of the dynamics of all scales would require excessively large computational resources. Whereas it may never be possible to develop models to resolve all significant scales, it may be feasible to develop models of the large scale dynamics. These large scale models would not require the explicit description of the small scales, but should include the effect of the small scales on the large scale dynamics. The incorporation of such effects requires the solution of a problem of closure. Through the use of Butterworth filters, an exact solution of the closure problem for Burgers equation is developed. Numerical tests that validate the theoretical results are included.

Keyword: Burgers equation, large scales, Butterworth filter, spatial filtering.

Dirección institucional de los autores:

Álvaro A. Aldama

Consultor independiente
teléfono: + (52) (777) 162 6340
alvaro.aldama@gmail.com

Miguel Á. Mejía

Instituto Mexicano de Tecnología del Agua
Coordinación de Hidrología
Subcoordinación de Hidrología Subterránea
Paseo Cuauhnáhuac 853, colonia Progreso
62550 Jiutepec, Morelos, México
teléfonos: + (52) (777) 329 3688, 329 3600, extensión 217
fax: + (52) (777) 329 3682
mamejia@tlaloc.imta.mx

Roger Beckie

Department of Earth and Ocean Sciences
University of British Columbia
6339 Stores Road
Vancouver, B.C. V6T 1Z A Canada
rbeckie@geology.ubc.ca